

Řízení procesů

Obsah přednášek

Jan Cvejn

Univerzita Pardubice,

2006-2007

Předmluva

Cílem tohoto textu je shrnutí základních teoretických pojmů a souvislostí, se kterými se pracuje v oblasti automatického řízení technologických procesů.

Rozsah materiálu zhruba odpovídá přednáškám předmětu Řízení procesů na Univerzitě Pardubice. Některé popisované výsledky jsou vzhledem k účelu textu prezentovány zjednodušeně a bez důkazů. Úplný výklad je třeba vyhledat v příslušné odborné literatuře. Na druhé straně, záměrem autora bylo uvést a vysvětlit souvislosti, které jsou důležité pro pochopení látky a pro získání přehledu o problematice.

Tématicky je text směřován především do následujících oblastí:

- Úvod do modelování, shrnutí základních fyzikálních zákonů využitelných pro získání matematických modelů soustav hydraulických, tepelných a chemických.
- Analýza chování lineárních dynamických soustav s jedním vstupem a jedním výstupem, v časové a frekvenční oblasti. Základním využívaným nástrojem je Laplaceova transformace.
- Analýza a návrh zpětnovazebního řízení, především s využitím PID regulátorů.

Upozornění: Jedná se o vývojovou verzi textu, která neprošla žádnou jazykovou, obsahovou ani formální korekcí. Autor neručí za správnost textu a uvítá připomínky vedoucí k odstranění případných nedostatků.

Doc. Ing. Jan Cvejn, Ph.D.

Datum poslední úpravy: 1.11.2007

Obsah

1. Úvod.....	4
Řízení výrobních procesů	4
Automatické řízení.....	4
2. Systémy.....	6
3. Matematické modely dynamických systémů.....	8
Získání matematického modelu	9
Tepelné soustavy.....	10
Hydraulické systémy (potrubí a nádrže).....	13
Chemické reaktory	14
Směšování látek	16
Složené soustavy.....	17
4. Tvary popisu dynamických systémů.....	20
Výstupní popis	20
Stavový popis.....	20
Lineární systémy.....	21
Ustálená hodnota.....	23
Statická charakteristika	24
Odchylový tvar popisu lineárních systémů.....	24
Linearizace modelu.....	25
5. Vlastnosti časově invariantních lineárních systémů	28
Přechodová charakteristika	29
Impulsní charakteristika.....	30
6. Fourierova a Laplaceova transformace.....	31
Harmonický rozklad periodického signálu	31
Fourierova transformace	32
Laplaceova transformace	33
Základní vlastnosti Laplaceovy transformace	33
Slovník Laplaceovy transformace.....	35
7. Využití Laplaceovy transformace.....	37
Určení časové odezvy lineárních systémů	37
Řešení stavových rovnic	44
8. Obrazový přenos.....	46
Obecné vlastnosti přenosu	46
Počáteční a ustálená hodnota výstupu.....	47
Algebra přenosu a bloková schémata	48
Zpětná vazba	51
9. Frekvenční přenos.....	56
Frekvenční charakteristika	57
Amplitudová a fázová charakteristika	58
10. Přehled nejčastějších typů lineárních soustav.....	61
Soustava prvního řádu.....	61
Soustava druhého řádu.....	64
Příklad složené soustavy druhého řádu.....	68
Soustavy vyššího řádu.....	70
Soustava s dopravním zpožděním.....	71
Náhrada soustavy vyššího řádu soustavou s dopravním zpožděním	73
11. Automatická regulace	75

Otevřené řízení.....	75
Zpětnovazební řízení.....	76
Technická realizace regulačních obvodů.....	77
Elektronické řídicí systémy.....	77
12. Části regulačního obvodu	80
Nespojité regulátory.....	80
PID regulátor.....	82
Význam složek PID regulátoru.....	84
Číslicový PID regulátor	85
Akční členy a snímače	86
13. Stabilita dynamických systémů.....	88
Stabilita lineárních systémů	88
Stabilita uzavřeného regulačního obvodu.....	89
Algebraická kritéria vyšetření stability	90
Frekvenční kritéria vyšetření stability	93
14. Nastavení parametrů PID regulátorů	95
Kritéria nastavení parametrů regulačního obvodu.....	95
Metody nevyžadující znalost přenosu.....	98
Metody využívající znalost přenosu soustavy	101
15. Logické řízení	106
Logické funkce.....	106
Booleova algebra	109
Sekvenční logické obvody	110
Použitá literatura	112

1. Úvod

Řízení výrobních procesů

Pod pojmem řízení výrobních procesů zpravidla rozumíme následující oblasti:

- Výrobní rozvrhování
 - Transformace zakázek na úroveň směny. Cílem je dosáhnout shody mezi požadavky zakázky a organizací výroby v daném období.
- Operativní řízení výroby
 - Řeší problémy prostorové a časové koordinace při manipulaci a zpracování materiálu v rámci výrobního úseku. Sleduje se splnění technologických a ekonomických kritérií.
- Řízení technologických procesů
 - Řízení procesu transformace a rozvodu energie a hmoty v reálném čase. Uvažují se kritéria technologického charakteru a požadavky optimalizace vlastního technologického procesu.

Řízení technologických procesů, na které je tento text zaměřen, má tyto hlavní úkoly:

- Kontrola stavu a průběhu procesů
 - snímání hodnot veličin, vyhodnocování provozních stavů, výpočet souhrnných ekonomických a technologických ukazatelů
- Realizace spojení operátora s řízených procesem
 - zobrazení informací o procesu, umožnění v daných mezích modifikovat parametry procesu
- Automatické zabezpečování při mimořádných provozních stavech, haváriích
- Stabilizace vybraných parametrů procesu, dosažení invariantnosti (nezávislosti) na vnějších poruchových vlivech
- Optimalizace technologických procesů (často podle ekonomických kritérií)
- Optimalizace vlastního procesu řízení

Automatické řízení

Pod pojmem *automatické řízení* zpravidla rozumíme řízení v reálném čase s využitím automatů, regulátorů nebo jiných automatizačních prostředků.

Automatizace řízení může mít řadu důvodů, např.:

- Ekonomické hledisko (důmyslně navržená automatika může řídit lépe než člověk)

- Ohled na fyzická a psychická omezení člověka
 - neschopnost člověka zasahovat dostatečně rychle a přesně, popř. spolehlivě
 - neschopnost zpracovávat současně velké množství informací
 - nemožnost prodlévat v nezdravém a nebezpečném prostředí

Naopak lidský činitel je však v některých případech nepostradatelný, např.:

- Úplná algoritmizace některých postupů není možná nebo je příliš obtížná
 - často je velmi obtížné exaktně formulovat postupy, které jsou výsledkem dlouholeté zkušenosti
- Schopnost člověka rozhodovat i v situacích, které nebyly předpokládány
- Selhání čidel nebo informačních cest, kdy automatika získá falešné informace o stavu řízené technologie.

Proto má smysl některá důležitá rozhodování ponechat na lidské obsluze. V procesu řízení člověk zpravidla figuruje jako:

- Obsluha
 - nahrazuje činnost automatiky a ujímá se ručního řízení
- Operátor
 - hierarchicky nadřazen automaticce
 - vyhodnocuje signalizaci a hlášení automatiky
 - povoluje či blokuje činnost automatiky

Automatické řízení může být víceúrovňové:

- Automaty na základní úrovni jsou sledovány a řízeny nadřazeným počítačem.
 - obsluha pak má pouze pozorovací a rozhodovací roli

Rozlišují se 2 základní typy úloh:

- Úlohy automatické regulace
 - udržování parametrů procesu na požadovaných hodnotách (konstantních nebo měnících v čase definovaným způsobem)
- Úlohy logického řízení
 - řízený objekt se nachází v konkrétním čase v některém z konečného počtu stavů. Cílem je zaručit, že objekt přechází mezi stavy definovaným způsobem. Stavem se může rozumět také provádění určité činnosti.

Logické řízení často představuje hierarchicky vyšší vrstvu řídicího systému, zatímco regulace odpovídá nejnižší úrovni.

2. Systémy

Na fyzikálních objektech, popř. soustavách těchto objektů, je možné sledovat různé veličiny. Zvolením souboru veličin, které jsou na objektu významné nebo zajímavé, definujeme tzv. *systém*. Zbývající část objektivní reality je označována jako *okolí systému*. Na každém objektu lze zřejmě systém definovat mnoha způsoby.

Bez ohledu na rozdílnou fyzikální povahu reálných objektů je možné systémy analyzovat a matematicky s nimi pracovat jednotným způsobem.

Dynamický systém je takový, kdy hodnoty výstupních veličin závisí nejenom na aktuálních hodnotách vstupů, ale rovněž na předchozí historii vstupů a výstupů. Mezi parametry dynamického systému patří vždy čas.

U systémů se dle interakce s okolím rozlišují tři skupiny veličin:

- *Výstupní (sledované) veličiny* (často označení \mathbf{y})
 - veličiny, které způsobují změny veličin zahrnutých do okolí systému
- *Vstupní (řídící) veličiny* (často označení \mathbf{u})
 - veličiny, které závisí pouze na okolí systému a způsobují změny hodnot jeho ostatních veličin
- *Vnitřní veličiny*
 - nemusí být přímo měřitelné, ale jsou ovlivňovány vstupem a mají vliv na výstup
- *Stavové veličiny* (označení většinou \mathbf{x})
 - vnitřní nebo výstupní veličiny, jejichž hodnoty jednoznačně odpovídají stavu systému (viz dále)

Stav dynamického systému je definován jako minimální soubor proměnných, jejichž okamžitá hodnota poskytuje informaci o historii systému, která při známé hodnotě vstupů postačí k stanovení dalšího vývoje systému.

Stav dynamického systému se zřejmě může měnit v čase, i když hodnoty vstupů, a dokonce i výstupů, zůstávají konstantní.

Dynamické systémy, na které nepůsobí žádné vstupní veličiny, se nazývají *autonomní*.

Podle povahy veličin je možné rozlišit systémy:

- *Spojité*
 - všechny veličiny systému jsou spojité
- *Diskrétní*
 - hodnoty veličin včetně času nejsou spojité, ale celočíselné

- takový systém vznikne na reálném objektu teoreticky již zavedením rozlišovací úrovně – hodnoty veličin jsou rozlišitelné pouze pokud jejich rozdíl je v absolutní hodnotě větší než tato hodnota
- diskrétní čas je chápán jako posloupnost kroků

Příklady:

- Zajímá-li nás výška hladiny v nádrži, je výstupní veličinou výška hladiny, vstupními veličinami průtok napouštěcím a vypouštěcím ventilem. Stav je dán výškou hladiny v nádrži.
- Pokud jsou hodnoty hladiny snímány každou sekundu a převáděny na celá čísla v rozsahu 0-255, jedná se o diskrétní systém.
- Při ohřevu látky v nádobě je vstupní veličinou příkon topného tělesa. Výstupní veličinou je teplota měřená snímačem v daném bodě. Stav systému odpovídá výstupní veličině pouze pokud dochází k dokonalému promíchávání, tj. je zaručeno, že teplota je ve všech místech nádrže stejná, což lze technicky zaručit jen přibližně. V opačném případě stav nelze popsat konečným počtem proměnných.

3. Matematické modely dynamických systémů

Pro zjištění informací o chování objektů reálného světa je třeba definovat systém a vyšetřit jeho vlastnosti. To je možné provést následujícími způsoby:

- měřením hodnot veličin na existujícím zařízení
- vyšetřováním na modelech (tzv. *simulace*)
- metodami matematicko-fyzikální analýzy

Získání neznámých hodnot parametrů matematického modelu z měřených dat se označuje jako tzv. *identifikace*.

Rozlišujeme modely:

- Fyzikální
 - model je reálná soustava, která má podobné vlastnosti jako soustava vyšetřovaná, nebo se její chování dá popsat formálně obdobným způsobem (využívají se fyzikální analogie)
- Matematické
 - matematická formulace závislosti chování stavových a výstupních veličin na vstupních veličinách a na čase.
 - dynamika většinou popsána soustavou diferenciálních rovnic.
 - jinou možností jsou např. operátorový přenos, přechodová nebo frekvenční charakteristika (viz dále)

Pro získání matematického modelu je využito matematického popisu fyzikálních jevů, které jsou dostatečně elementární, aby byly respektovány vazby mezi prvky struktury systému. Hloubka a komplexnost uvažovaných jevů záleží na účelu využití modelu. Čím přesnější model, tím obtížnější vytvoření a pracnější využití.

Matematické modely dynamických systémů lze rozdělit podle řady kritérií, např.:

A)

- Lineární
 - popsané soustavou lineárních diferenciálních rovnic
 - umožňují analytické řešení
 - ve skutečnosti pouze idealizace – reálné systémy se chovají lineárně jen přibližně v malém okolí pracovního bodu (stavu)
- Nelineární
 - popsané soustavou nelineárních diferenciálních rovnic
 - neumožňují přímé analytické řešení, proto se často linearizují v okolí zvoleného pracovního bodu

B)

- S jedním vstupem a jedním výstupem
- S mnoha vstupy a mnoha výstupy

C)

- Se spojitým časem
- S diskrétním časem
 - místo chování soustavy v čase se vyšetřují změny stavu a výstupu v diskrétních (oddělených) krocích. Diskrétní kroky např. odpovídají vzorkování hodnot veličin při zpracování výstupu, popř. řízení počítačem.

D)

- Deterministické
 - předpokládá se, že parametry systému jsou přesně známe
 - stav v čase $t_2 > t_1$ je jednoznačně určen stavem v bodě t_1 , časy t_1, t_2 a historií hodnot vstupní veličiny mezi t_1, t_2
- Stochastické
 - zahrnují neurčitost vstupujících poruch a parametrů
 - stav v čase $t_2 > t_1$ je náhodnou veličinou, jejíž hustota pravděpodobnosti však závisí na stavu v bodě t_1 a historii hodnot vstupní veličiny mezi t_1, t_2

E)

- Se soustředěnými parametry
 - počet stavových veličin je konečný
 - u fyzikálních systémů je většinou splněno jen přibližně
 - matematicky popsány soustavou obyčejných diferenciálních rovnic
- S rozprostřenými parametry
 - stav systému nelze uspokojivě popsat konečným počtem stavových veličin
 - např. teplota vody v nádobě při ohřevu je ve skutečnosti v každém bodě jiná
 - matematicky popsány soustavou parciálních diferenciálních rovnic

Získání matematického modelu

Pro získání diferenciálních rovnic popisujících chování soustavy je zpravidla využito základních bilancí zachování hmoty (popř. energie, tepla, látky) a vazeb mezi veličinami. Obecně mají tyto bilance tvar:

Změna akumulované hmoty (popř. objemu, tepla, látky, el. náboje) v soustavě = rozdíl vstupující a vystupující hmoty (resp. objemu, tepla, látky, el. náboje), vše za jednotku času.

Formální zápis této bilance je diferenciální rovnice:

$$\frac{dA}{dt} = Q_i - Q_o$$

kde A má význam akumulovaného množství a Q_i, Q_o je vstupující a vystupující tok.

U mechanických a elektrických soustav se navíc setkáváme se setrvačností (tendence setrvat v rovnoměrném pohybu) nebo její analogií. Toto chování lze obecně popsat následovně:

Změna veličiny vyjadřující velikost a směr pohybu (tok, proudu) za jednotku času = působící síla (rozdíl tlaků, napětí).

Speciální tvary těchto bilancí pro jednotlivé typy soustav a nejdůležitější vztahy mezi veličinami jsou popsány dále.

Tepelné soustavy

Základní bilance:

Změna množství tepla A akumulovaného tělesem za jednotku času t je rovna rozdílu vstupujícího a vystupujícího tepelného toku.

Pro teplo obsažené v tělese platí:

$$A = m c T \quad [J] \quad (\text{kde } T \text{ je absolutní teplota})$$

Odpovídající diferenciální rovnice je:

$$m c \frac{dT}{dt} = Q_i - Q_o \quad [W]$$

kde m je hmotnost tělesa $[kg]$, c tepelná kapacita a Q_i, Q_o vstupující a vystupující tepelný tok $[W] = [J \cdot s^{-1}]$. Pozn.: jelikož v bilanci figuruje vždy rozdíl teplot, nezáleží na tepelné stupnici – tj. T může být i v $[^{\circ}C]$.

Další potřebné vztahy:

- Tepelný tok stěnou oddělující dvě prostředí:

$$Q = \lambda \frac{S}{d} (T_1 - T_2) \quad [W]$$

kde S je plocha stěny, d je tloušťka stěny, λ součinitel tepelné vodivosti a $T_1 - T_2$ rozdíl teplot prostředí.

- Tepelný tok při přestupu tepla mezi dvěma prostředími:

$$Q = \alpha S (T_1 - T_2)$$

kde α je součinitel přestupu tepla (určen většinou experimentálně).

- Prostup tepla stěnou (bez uvažování dynamiky stěny)

V případě, že se jedná o prostup tepla mezi dvěma prostředími oddělenými tuhous stěnou, pro teploty na okraji prostředí platí:

$$(T_1 - T_{s_1}) + (T_{s_1} - T_{s_2}) + (T_{s_2} - T_2) = T_1 - T_2 .$$

Po vyjádření rozdílů teplot z předchozích vztahů dostáváme:

$$T_1 - T_2 = \frac{Q}{\alpha_1 S} + \frac{Q}{\frac{\lambda S}{d}} + \frac{Q}{\alpha_2 S} = \frac{Q}{S} \left[\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right] .$$

Odtud $Q = k \cdot S(T_1 - T_2)$, kde k je součinitel prostupu tepla a platí:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} .$$

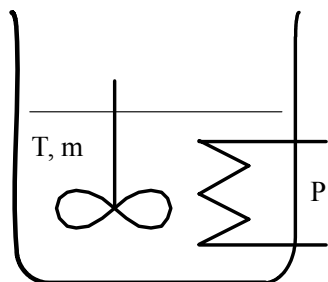
- Tepelný tok proudící tekutiny. Při mísení tekutin s různou teplotou je vstupující tepelný tok přitékající složky dán výrazem

$$Q_i = McT$$

kde M je hmotnostní průtok $[kg \cdot s^{-1}]$, T teplota a c tepelná kapacita.

Příklady:

1. Ohřev obsahu nádoby elektrickým ohříváčem s výkonem P (předpokládá se, že veškerý výkon ohříváče přejde do kapaliny.

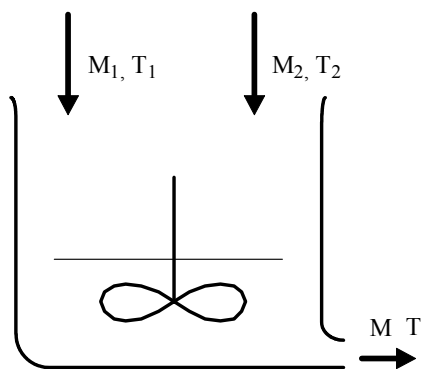


Po dosazení do základní bilance dostáváme rovnici (P odpovídá Q_i a tepelné ztráty Q_o)

$$mc \frac{dT}{dt} = P - kS(T - T_0)$$

kde T_0 je teplota okolí, k součinitel prostupu tepla stěnou nádoby do okolí a S plocha pláště nádoby, kterým probíhá tepelná výměna s okolím. Neuvažuje se dynamika stěny nádoby.

2. Mísení obsahu nádoby o teplotě T se stejnou přitékající kapalinou o teplotách T_1 a T_2 a hmotnostních přítocích M_1, M_2 [$\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$] (předpokládá se dokonalé míchání a vyrovnaný stav, kdy přítok a výtok z nádoby jsou stejné):



$$mc \frac{dT}{dt} = [M_1 c T_1 + M_2 c T_2] - [M c T + kS(T - T_0)]$$

kde $M = M_1 + M_2$.

Pokud jsou nulové ztráty do okolí, rovnice se zjednoduší:

$$m \frac{dT}{dt} + MT = M_1 T_1 + M_2 T_2.$$

Pro vyrovnaný stav, kdy $\frac{dT}{dt} = 0$, pak bude platit: $T = \frac{M_1 T_1 + M_2 T_2}{M}$.

3. Proměnný objem. Jestliže objem není ustálený, platí pro m rovnice:

$$\frac{dm}{dt} = M_1 + M_2 - M.$$

a současně místo členu na levé straně tepelné bilance bude

$$\frac{d}{dt}(mcT) = mc \frac{dT}{dt} + \frac{dm}{dt} cT = mc \frac{dT}{dt} + (M_1 + M_2 - M) cT.$$

Tepelná rovnice se pak změni a bude mít tvar

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{mc} [M_1 c T_1 + M_2 c T_2 - (McT + kS(T - T_0) + (M_1 + M_2 - M)cT)]$$

Hydraulické systémy (potrubí a nádrže)

Základní bilance zachování hmotnosti:

- Okamžitá změna objemu látky v nádrži za jednotku času je rovna

$$\frac{dV}{dt} = S \frac{dh}{dt} = Q_1 - Q_2 \quad [m^3 \cdot s^{-1}]$$

kde Q_1 , Q_2 jsou přítok a výtok $[m^3 \cdot s^{-1}]$ (vstupující a vystupující průtok), h je výška hladiny $[m]$ a S průřez nádrže (za předpokladu, že je konstantní).

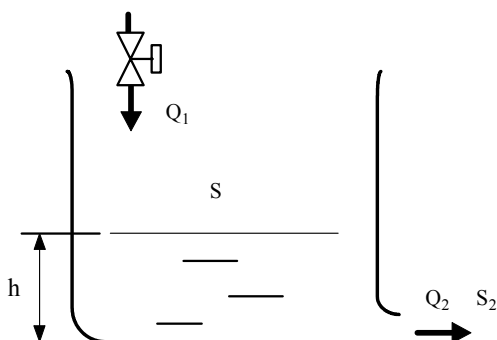
Další využívané zákonitosti:

- V přímé větvi potrubí je v každém místě v důsledku nestlačitelnosti kapaliny konstantní průtok (rovnice kontinuity):

$$Q = S \cdot v = konst. \quad [m^3 \cdot s^{-1}]$$

kde S je průřez potrubí kolmý na směr proudění a v rychlost proudění.

- Hydrostatický tlak na dně nádrže je určen vztahem $p = \rho gh$ $[Pa]$.



Jestliže je výtok z nádrže volný, je pro určení závislosti výšky hladiny na přítoku třeba určit výtokovou rychlost, která se určí z Bernoulliho rovnice (jeden z tvarů zákona zachování energie):

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = konst.,$$

kde ρ je hustota, p působící tlak a g tíhové zrychlení.

V nejběžnějším případě je tlak na hladině kapaliny a u výtoku stejný. Pak platí:

$$v^2 + 2gh = v_2^2$$

Po vyjádření v z rovnice kontinuity (S_2 je průřez výtokového otvoru, v_2 výtoková rychlost) dostáváme:

$$\left(1 - \left(\frac{S_2}{S}\right)^2\right)v_2^2 = 2gh \quad \Rightarrow \quad v_2 \approx \sqrt{2gh} \quad (\text{jelikož u nádrže je } S_2 \ll S_1).$$

Sestavením předchozích vztahů dostáváme konečnou rovnici:

$$S \frac{dh}{dt} + S_2 \sqrt{2gh} = Q_1.$$

Ztráty při proudění výtokovým otvorem nebo např. ventilem v potrubí se projeví rozdílem tlaků o hodnotu $\Delta p = \xi \frac{\rho v^2}{2}$, kde ξ je ztrátový součinitel.

Při ustáleném proudění v přímém potrubí platí pro tlakovou ztrátu $\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2}$, kde pro ztrátový součinitel λ existuje řada vztahů v závislosti na typu proudění. Přitom pro laminární proudění (pomalé) je nepřímo úměrný v a pro turbulentní proudění na v nezávisí. Je tedy možné zavést hydraulický odpor R_H vztahem:

$$\Delta p = R_H \cdot Q^n,$$

kde $n = 1$ pro laminární proudění a $n = 2$ pro turbulentní.

Chemické reaktory

Místo hmotností nebo objemové bilance se používá bilance látková (na rozdíl od hydromechanických soustav zde může látka vznikat):

Změna množství látky zadržované v systému =
množství látky vznikající + množství látky přiváděné - množství látky vznikající -
množství látky odváděné (vše za jednotku času)

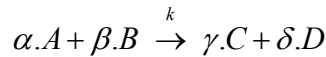
Další vztahy:

- Pro přiváděné, resp. odváděné množství látky A za jednotku času platí:

$$Q_A = Q \cdot x_A$$

kde Q je objemový průtok $[m^3 \cdot s^{-1}]$ a x_A molární koncentrace složky A ve vstupující, resp. vystupující směsi $[mol \cdot m^{-3}]$.

- Pro akumulované množství látky platí: $N_A = V \cdot x_A$.
- Kinetika chemických reakcí (předpokládá se dokonalé míchání). U reakce typu



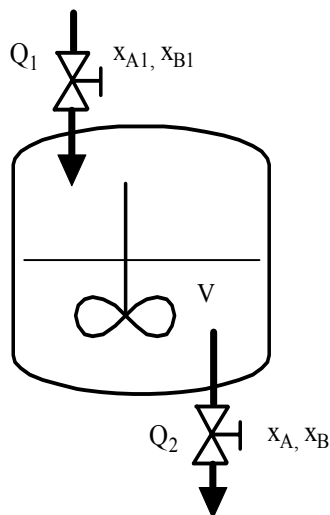
kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou stechiometrické koeficienty a k konstanta reakční rychlosti platí:

$$\gamma^{-1} \frac{dN_C}{dt} = \delta^{-1} \frac{dN_D}{dt} = -\alpha^{-1} \frac{dN_A}{dt} = -\beta^{-1} \frac{dN_B}{dt} = V \cdot r_T \cdot x_A^\alpha x_B^\beta$$

kde N_A, N_B, N_C, N_D označuje množství látky A, B, C, D . V je objem látky v reaktoru a x_A, x_B molární koncentrace vstupujících složek.

Pro koeficient r_T platí Arrheniův vztah: $r_T = A \cdot e^{\frac{-E}{RT}}$, kde R je plynová konstanta, T absolutní teplota a A, E konstanty dané typem reakce.

Průtokový reaktor



Např. pro reakci typu $A \rightarrow B$ při konstantní teplotě, přítok Q_1 a koncentrace vstupujících složek x_{A1}, x_{B1} dostáváme po dosazení do bilanční rovnice soustavu:

$$\frac{d}{dt}(V \cdot x_A) = Q_1 x_{A1} - r_T \cdot V \cdot x_A - Q_2 x_A$$

$$\frac{d}{dt}(V \cdot x_B) = r_T \cdot V \cdot x_A + Q_1 x_{B1} - Q_2 x_B$$

kde x_A, x_B jsou koncentrace složek vystupující směsi.

Jestliže předpokládáme, že $Q_1 = Q_2 = Q = konst.$, je $V = konst.$ a soustava má tvar:

$$V \frac{dx_A}{dt} = x_{A1} Q - (Q + r_T V) x_A$$

$$V \frac{dx_B}{dt} = x_{B1} Q + r_T V x_A - x_B Q$$

První rovnice je nezávislá na druhé. Jestliže se nebude jednat o reakce monomolekulární, budou v rovnicích figurovat součiny koncentrací a rovnice budou nelineární. Pro obousměrnou reakci typu $A \xrightleftharpoons[k_2]{k_1} B$ je pro rovnovážný stav, kdy

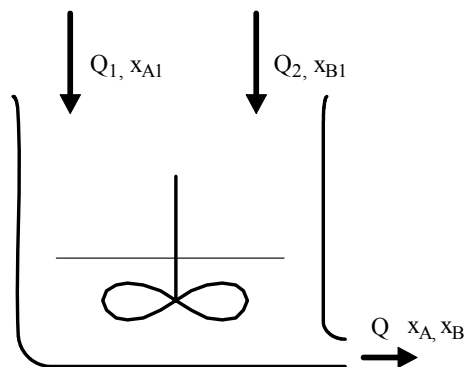
$$\frac{dx_A}{dt} = \frac{dx_B}{dt} = 0 \text{ možné dopočítat teplotu, kdy } x_B \text{ je maximální.}$$

Vsádkový reaktor

- speciální případ, kdy vstupující a vystupující průtoky jsou nulové. Platí soustava výše pro $Q = 0$.

Směšování látek

Základní bilance je stejná jako u chemického reaktoru, pouze mezi složkami neprobíhá reakce. Např. jestliže do nádoby přitékají složky A a B o koncentracích x_{A1}, x_{B1} a odtéká směs o koncentraci látek x_A, x_B , dostáváme:



$$V \frac{dx_A}{dt} = x_{A1} \cdot Q_1 - (Q_1 + Q_2)x_A$$

$$V \frac{dx_B}{dt} = x_{B1} \cdot Q_2 - (Q_1 + Q_2)x_B$$

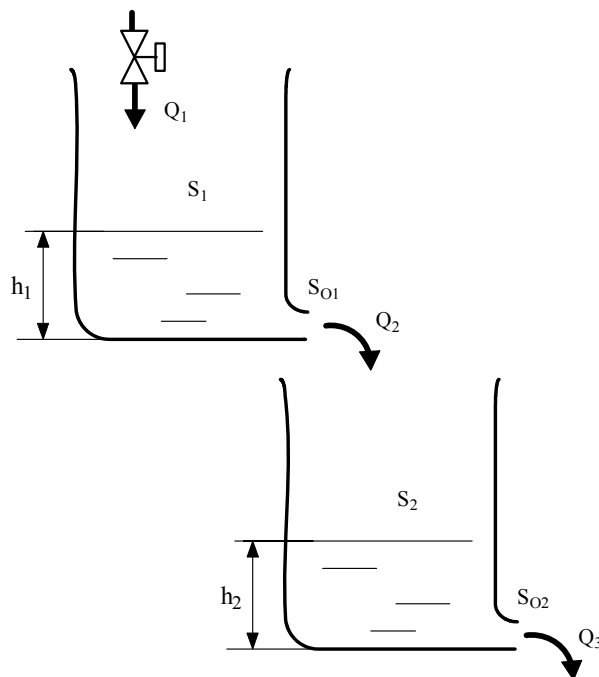
Složené soustavy

V případě systémů skládajících se z několika elementárních soustav rozlišujeme:

- Soustavy bez zpětného ovlivňování
 - výstup jedné elementární soustavy je často vstupem jiné, ale pouze v jednom směru
 - dynamiku lze pak řešit odděleně
 - např. soustava nádrží, kdy výtok z jedné je přítokem do druhé
- Soustavy se zpětným ovlivňováním
 - dynamiku nelze řešit odděleně
 - např.:
 - soustava nádrží se spojeným dnem
 - elektrický obvod RLC

Model soustavy složené z elementárních prvků, jejichž chování je popsáno obyčejnými diferenciálními rovnicemi, je ve tvaru soustavy algebraických a obyčejných diferenciálních rovnic.

Příklad 1: Soustava dvou nádrží bez zpětného ovlivňování.



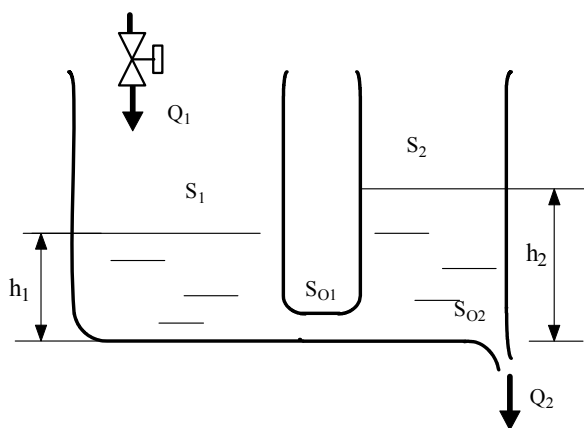
Výtok z 1. nádrže $Q_2 = S_{o1}\sqrt{2gh_1}$ je současně přítokem do 2. nádrže. Aplikací předchozích výsledků pro jednotlivé nádrže získáme soustavu:

$$S_1 \frac{dh_1}{dt} + S_{o1}\sqrt{2gh_1} = Q_1$$

$$S_2 \frac{dh_2}{dt} + S_{o2}\sqrt{2gh_2} = S_{o1}\sqrt{2gh_1} .$$

V tomto případě je 1. rovnice řešitelná nezávisle na 2. rovnici. Pro zjištěný průběh $h_1(t)$ lze řešením druhé rovnice určit $h_2(t)$.

Příklad 2: Soustava dvou nádrží se spojeným dnem



Průřezy otvoru mezi nádržemi a výtokového otvoru jsou S_{o1} a S_{o2} .

Rychlost výtoku z nádrže 1 je rovna $Q_{12} = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$ (to lze potvrdit dosazením do Bernoulliho rovnice), jestliže $h_1 \geq h_2$. Člen $Q_{12} = S_{o1}\sqrt{2g(h_1 - h_2)}$ odpovídá výtoku z nádrže 1 a současně přítoku do nádrže 2. Pokud $h_1 < h_2$, musí mít tento člen opačné znaménko, ale výraz pod odmocninou musí zůstat kladný, což formálně zapíšeme jako

$$Q_{12} = S_{o1} \cdot \text{sign}(h_1 - h_2) \cdot \sqrt{2g|h_1 - h_2|}$$

kde funkce $\text{sign}(x)$ je rovna 1 pro $x > 0$, -1 pro $x < 0$ a 0 pro $x = 0$.

Aplikací předchozích výsledků pro jednotlivé nádrže získáme soustavu:

$$S_1 \frac{dh_1}{dt} + S_{o1} \cdot \text{sign}(h_1 - h_2) \cdot \sqrt{2g|h_1 - h_2|} = Q_1$$

$$S_2 \frac{dh_2}{dt} + S_{O2} \sqrt{2gh_2} - S_{O1} \cdot \text{sign}(h_1 - h_2) \cdot \sqrt{2g|h_1 - h_2|} = 0.$$

Dynamiku v tomto případě nelze řešit odděleně, protože v obou rovnicích se vyskytují proměnné h_1 , h_2 .

4. Tvary popisu dynamických systémů

Dynamické systémy lze definovat mnoha způsoby. Tato část obsahuje přehled nejčastěji využívaných tvarů popisu dynamických systémů a shrnuje některé jejich základní vlastnosti, především se zaměřením na systémy s jedním vstupem a jedním výstupem.

Výstupní popis

Definuje závislost dynamiky výstupní veličiny přímo na vstupu soustavy:

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, \dot{y}, y, u^{(m-1)}, \dots, u, t)$$

y ... výstupní veličina
 $y^{(k)}$... k-tá derivace výstupní veličiny
 u ... vstupní veličina
 t ... čas

$y(t)$ je hledaný průběh, který vyhovuje diferenciální rovnici a zadaným počátečním podmínkám v čase, který je pro jednoduchost zvolen jako 0.

$$y^{(n-1)}(0) = y_{n-1,0}, \dots, y(0) = y_{0,0}.$$

V praxi musí platit: $m \leq n$ - Podmínka fyzikální realizovatelnosti (v opačném případě by skoková změna na vstupu vyvolala nekonečně velký výstup).

V případě, že funkce f je nezávislá na čase, je systém označován jako časově invariantní nebo stacionární (platí pro všechny zde uvažované systémy).

Řádem systému rozumíme řád nejvyšší derivace.

Stavový popis

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u, t), \quad i = 1, \dots, n$$

$$y = g(x_1, \dots, x_n)$$

y ... výstupní veličina
 x_i ... stavové veličiny
 u ... vstupní veličina

vektorový zápis:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t) \\ y &= g(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{1}$$

Počáteční podmínky:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 .$$

Stavový popis je obecnější a v mnoha případech přirozenější, protože často je model přímo popsán soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu. Složky vektoru \mathbf{x} v tom případě přímo odpovídají stavovým proměnným. Stavový popis rovněž umožňuje jednotným způsobem pracovat i se systémy s mnoha vstupy a mnoha výstupy.

Řádem systému v tomto případě rozumíme dimenzi stavového vektoru \mathbf{x} .

Z výstupního popisu jednorozměrového systému lze vždy snadno získat stavový popis. Uvažujme model ve tvaru:

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, \dot{y}, y, u, t) .$$

Zvolme

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

...

$$x_n = y^{(n-1)}$$

po dosazení získáváme soustavu:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

...

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, u, t)$$

kteřá je ve standardním stavovém tvaru. Zvolené stavové proměnné tedy odpovídají derivacím výstupní veličiny. Tato volba stavových veličin je ale jen jednou z možností.

Tento tvar se využívá i pro systémy s mnoha vstupy a mnoha výstupy. V tomto případě jsou \mathbf{u} a \mathbf{y} vektory.

Lineární systémy

Jsou popsány pomocí lineárních diferenciálních rovnic:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u . \quad (2)$$

Koeficienty a_i mohou být obecně funkce času, ale většinou jsou to konstanty. Pak se jedná o časově invariantní systém (systém s konstantními koeficienty).

Pozn.: V literatuře se lze spíše setkat s tvarem

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u, \quad a_n \neq 0$$

který lze snadno převést na (2) vydělením a_n . Jelikož různým a_n odpovídá jediný normovaný popis (2), je tento tvar výhodnější, protože odstraňuje mnohoznačnost. Jinou možností jak rovnici normalizovat, je vydělit ji a_0 (pokud $a_0 \neq 0$), což se rovněž s výhodou využívá (viz např. část 8 - Obrazový přenos).

Příklady:

Lineární systém prvního řádu s konstantními koeficienty:

$$\dot{y} + 3y = u.$$

Nelineární systém (model výšky hladiny v nádrži v závislosti na přítoku):

$$\dot{y} + k\sqrt{y} = u.$$

Pozn.: Stavový popis lineárního systému s jedním vstupem a jedním výstupem má tvar:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{aligned}$$

kde \mathbf{A} je matice (n,n) , \mathbf{b}, \mathbf{c} vektory řádu n .

Obecný tvar stavového popisu lineárního systému s více vstupy a více výstupy je

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \tag{3}$$

kde $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ jsou matice příslušných rozměrů a \mathbf{y}_0 je konstantní vektor.

Případ, kdy rovnice (2) na levé straně obsahuje konstantní člen, není třeba zvlášť uvažovat, protože lze vždy převést na rovnici bez tohoto členu. Uvažujme např. systém

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y + 4 = u.$$

Definujme $3e = 3y + 4$, tj. $e = y + \frac{4}{3}$. Potom pro e platí rovnice ve standardním tvaru

$$\ddot{e} + 2\dot{e} + 3e = u.$$

Např. v rovnici

$$m c \frac{dT}{dt} + kS(T - T_0) = P$$

kteřá popisuje vývoj teploty v nádobě s kapalinou při ohřevu, je možné dosadit $\mathcal{G} = T - T_0$. Rovnice pro \mathcal{G} má standardní tvar

$$m c \frac{d\mathcal{G}}{dt} + kS\mathcal{G} = P.$$

Jinou možností je zahrnout konstantu do u na pravé straně nebo převést rovnici do odchylkového tvaru – viz dále.

Ustálená hodnota

Uvažujme nelineární stacionární systém popsany rovnicí

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, \dot{y}, y, u^{(m-1)}, \dots, u).$$

Jestliže se pro $t \rightarrow \infty$ nemění hodnoty vstupů, hodnota stavových, popř. výstupních veličin, se může (u reálných systémů je tomu tak většinou) pro $t \rightarrow \infty$ ustálit na konstantní hodnotě.

Označme

$$y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t), \quad u_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t).$$

Jelikož v ustáleném stavu jsou hodnoty časových derivací nulové, platí rovnice

$$f(0, 0, \dots, y_\infty, 0, 0, \dots, u_\infty) = 0.$$

Odkud lze snadno určit y_∞ v závislosti na u_∞ .

Pro lineární systém

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u$$

platí

$$y_\infty = \frac{b_0}{a_0} u_\infty.$$

V případě stavového popisu je ustálená hodnota \mathbf{x}_∞ dána řešením soustavy rovnic

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_\infty, u_\infty) = \mathbf{0}.$$

Statická charakteristika

Systémy, u kterých pro ustálenou hodnotu řízení u_∞ existuje ustálená hodnota výstupu y_∞ , nazýváme *statické*. Ostatní systémy jsou *astatické*.

Závislost y_∞ na u_∞ u statických systémů se nazývá *statická charakteristika*.

Pro lineární systémy je statická charakteristika lineární a její směrnice se nazývá *statické zesílení*.

Např. pro zmíněný systém $\dot{y} + k\sqrt{y} = u$ je statická charakteristika dána vztahem

$$y_\infty = \frac{u_\infty^2}{K^2}.$$

Odchylový tvar popisu lineárních systémů

Uvažujme systém popsany rovnicí s absolutním členem:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y + k = b_m u^{(m)} + \dots + b_0u.$$

Dojde-li ke změně vstupní veličiny oproti průběhu $u(t)$ na $u(t) + \Delta u(t)$, bude odpovídající reakce popsána rovnicí

$$(y + \Delta y)^{(n)} + \dots + a_0(y + \Delta y) + k = b_m (u + \Delta u)^{(m)} + \dots + b_0(u + \Delta u).$$

Po odečtení původní rovnice dostáváme diferenciální rovnici pro Δy , která je stejná (až na to, že neobsahuje absolutní člen):

$$(\Delta y)^{(n)} + \dots + a_0\Delta y = b_m (\Delta u)^{(m)} + \dots + b_0\Delta u$$

Většinou se pracuje s odchylkami vůči ustálenému stavu.

Např. uvažujme soustavu (průtokový směřovač) popsanou rovnicí

$$mc \frac{dT}{dt} + kS(T - T_0) + McT = M_1cT_1 + M_2cT_2$$

kde dojde ke změně vstupu T_1 vůči ustálenému stavu. Odpovídající změna výstupu T je dána rovnicí

$$mc \frac{d\Delta T}{dt} + (kS + Mc)\Delta T = M_1 c_1 \Delta T_1$$

Linearizace modelu

Předpokládejme, že stacionární nelineární systém je popsán rovnicí

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, \dot{y}, y, u^{(m-1)}, \dots, u)$$

a že funkce f má spojité parciální derivace podle proměnných $y^{(n-1)}, \dots, \dot{y}, y, u^{(m-1)}, \dots, u$ (tato podmínka je nutná pro to, aby bylo možné vyjádřit přírůstek funkce f).

Jestliže vyšetřujeme chování systému v malém okolí určitého (většinou ustáleného) stavu, je často možné uvažovat, že systém je v tomto okolí přibližně lineární.

Uvažujme dva průběhy výstupu stejného systému, které se příliš neliší. První označme y_0 a druhý y . u_0 a u jsou odpovídající průběhy řízení.

Jestliže odchylka je malá pro všechny derivace do řádu n , je funkci f možné přibližně nahradit pomocí diferenciálu.

Platí:

$$\begin{aligned} f(y^{(n-1)}, \dots, y, u^{(m-1)}, \dots, u) &\approx \\ &\approx f(y_0^{(n-1)}, \dots, y_0, u_0^{(m-1)}, \dots, u_0) + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \Bigg|_{(y_0^{(n-1)}, \dots, y_0, u_0^{(m-1)}, \dots, u_0)} \cdot \Delta y^{(n-1)} + \dots \\ &\dots + \frac{\partial f}{\partial y} \Bigg|_{(y_0^{(n-1)}, \dots, y_0, u_0^{(m-1)}, \dots, u_0)} \cdot \Delta y + \dots + \frac{\partial f}{\partial u} \Bigg|_{(y_0^{(n-1)}, \dots, y_0, u_0^{(m-1)}, \dots, u_0)} \cdot \Delta u \end{aligned}$$

kde $\Delta y^{(k)} = y^{(k)} - y_0^{(k)}$, $\Delta u^{(k)} = u^{(k)} - u_0^{(k)}$ jsou odchylky hodnot průběhu y , řízení u a jejich derivací.

Jelikož $\Delta(y^{(k)}) = (\Delta y)^{(k)}$, $\Delta(u^{(k)}) = (\Delta u)^{(k)}$, po zavedení nových proměnných $x = \Delta y$ a $v = \Delta u$ z rovnice výše dostáváme:

$$\begin{aligned} x^{(n)} = y^{(n)} - y_0^{(n)} &= f(y^{(n-1)}, \dots, y, u^{(m-1)}, \dots, u) - f(y_0^{(n-1)}, \dots, y_0, u_0^{(m-1)}, \dots, u_0) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \Bigg|_{(y_0^{(n-1)}, \dots, y_0, u_0^{(m-1)}, \dots, u_0)} \cdot x^{(n-1)} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y} \Bigg|_{(y_0^{(n-1)}, \dots, y_0, u_0^{(m-1)}, \dots, u_0)} \cdot x + \\ &\dots + \frac{\partial f}{\partial u} \Bigg|_{(y_0^{(n-1)}, \dots, y_0, u_0^{(m-1)}, \dots, u_0)} \cdot v \end{aligned}$$

což je lineární diferenciální rovnice pro výstup $x(t)$ a vstup $v(t)$. Pro skutečnou výstupní hodnotu platí $y(t) = y_0(t) + x(t)$.

Většinou chování systému linearizujeme v okolí ustáleného stavu, kdy platí $y_0^{(k)}(t) = 0$, $u_0^{(k)}(t) = 0$ pro všechna $k > 0$. V tom případě jsou členy $\frac{\partial f}{\partial y^{(i)}}$, $\frac{\partial f}{\partial u^{(i)}}$ konstantní a jedná se o lineární systém s konstantními koeficienty.

Aplikujeme-li tento postup na lineární diferenciální rovnici, dostaneme odchylkový tvar popsany výše.

Příklady:

1. Uvažujme nelineární systém $\dot{y} + k\sqrt{y} = 10u$. Linearizace v okolí ustálené hodnoty výstupu y_∞ :

$$\dot{y} = -k\sqrt{y} + 10u$$

$$\frac{d}{dt} \Delta y = \left. \frac{\partial(-k\sqrt{y} + 10u)}{\partial y} \right|_{(y_\infty, u_\infty)} \Delta y + \left. \frac{\partial(-k\sqrt{y} + 10u)}{\partial u} \right|_{(y_\infty, u_\infty)} \Delta u$$

tj.:

$$\Delta \dot{y} + \frac{k}{2} \frac{1}{\sqrt{y_\infty}} \Delta y = 10 \Delta u,$$

což je lineární diferenciální rovnice pro Δy . Pro známou hodnotu u_∞ určíme ustálený stav y_∞ z původní rovnice:

$$k\sqrt{y_\infty} = 10u_\infty \Rightarrow y_\infty = \left(\frac{10u_\infty}{k} \right)^2$$

2. Pro rovnici $\dot{y} + 3y = u^{1.5}$ obdobně získáme linearizovaný tvar

$$\ddot{x} + 3y_0 \dot{x} + 3\dot{y}_0 x = 1.5\sqrt{u_0} v.$$

kde $x = \Delta y$ a $v = \Delta u$.

3. Rovnice průtokového směšovače

$$m \frac{dT}{dt} = -(M_1 + M_2)T + M_1 T_1 + M_2 T_2$$

je lineární vzhledem k změnám T_1, T_2 . Uvažujeme-li ale jako vstupy přítoky M_1, M_2 , je rovnice nelineární (na pravé straně je součin $(M_1 + M_2)$ a T). Linearizovaný tvar pro změnu M_1 je

$$m \frac{dT}{dt} = -(M_1 + M_2)\Delta T + (-T + T_1)\Delta M_1.$$

Linearizace ve stavovém tvaru

V případě obecného stavového popisu s mnoha vstupy a mnoha výstupy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ dostáváme výsledek v podobě soustavy

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \Delta \mathbf{x} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \Delta \mathbf{u}$$

kde

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{pmatrix}$$

jsou Jacobiho matice vektorové funkce \mathbf{f} podle \mathbf{x} a \mathbf{u} . Linearizací výstupní rovnice $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ dostáváme obdobně

$$\Delta \mathbf{y} = \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \Delta \mathbf{x} + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \Delta \mathbf{u}.$$

Získaná soustava má tedy pro odchylky $\Delta \mathbf{x}$, $\Delta \mathbf{y}$, $\Delta \mathbf{u}$ standardní tvar (3).

5. Vlastnosti časově invariantních lineárních systémů

Lineární systémy jsou nejdůležitější skupinou dynamických systémů. K jejich hlavním přednostem patří znalost analytického tvaru řešení pro libovolné počáteční podmínky.

Ačkoliv většina fyzikálních systémů je ve skutečnosti nelineárních, v určitém okolí zvoleného pracovního bodu je často možné systém linearizovat a pokládat za lineární.

V této části jsou shrnuty některé důležité vlastnosti časově invariantních jednorozměrových lineárních systémů se spojitým časem v časové oblasti.

Obecný matematický tvar popisu:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u, \quad n \geq m$$

= tzv. nehomogenní rovnice (má nenulovou pravou stranu).

Rovnice s nulovou pravou stranou = tzv. homogenní rovnice:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = 0.$$

Každá funkce, která vyhovuje diferenciální rovnici, se nazývá řešení této rovnice. Řešení je vždy nekonečně mnoho (liší se od sebe např. počáteční podmínkou).

Linearita řešení homogenní rovnice

Jsou-li $y_1(t)$ a $y_2(t)$ dvě řešení homogenní rovnice, potom $k_1y_1(t) + k_2y_2(t)$ rovněž vyhovuje této rovnici pro libovolná k_1, k_2 .

Lineární závislost řešení na pravé straně (princip superpozice)

Je-li $y_1(t)$ řešení nehomogenní rovnice pro vstup $u_1(t)$ a $y_2(t)$ řešení stejné rovnice pro $u_2(t)$, potom $k_1y_1(t) + k_2y_2(t)$ je řešením této rovnice pro vstup $u(t) = k_1u_1(t) + k_2u_2(t)$, kde k_1, k_2 jsou libovolná čísla.

Obecný tvar řešení

Sestrojíme tzv. charakteristickou rovnici:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Má-li charakteristická rovnice právě n různých kořenů, pak libovolné řešení homogenní rovnice má tvar

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t} \quad (4)$$

kde konstanty C_1, \dots, C_n se dopočítají z počátečních podmínek, případně okrajových podmínek.

- Pro určení C_1, \dots, C_n je nutno vyřešit soustavu lineárních rovnic

Namísto členů odpovídajících komplexně sdruženým kořenům jsou v součtu (4) členy tvaru $C_{i1}e^{\alpha t} \cos(\beta t) + C_{i2}e^{\alpha t} \sin(\beta t)$.

Pokud jsou některé kořeny násobné s násobností n_i , je v součtu (4) dosazeno

$$\sum_{j=1}^{n_i} C_{ij} t^j e^{\lambda_i t} \text{ místo } C_i e^{\lambda_i t}, \text{ takže celkový počet členů v součtu je } n.$$

Pro získání řešení nehomogenní rovnice je možné odhadnout partikulární řešení nebo použít metodu variace konstant:

- Po získání obecného řešení homogenní části ve tvaru (4) se místo konstant C_i uvažují jako funkce času. Po dosazení do původní rovnice se určí funkce $C_i(t)$ v závislosti na počátečních podmínkách

V technické praxi se využívá spíše Laplaceova transformace, která je popsána v dalších kapitolách a nevyžaduje dodatečné řešení soustavy lineárních rovnic.

Přechodová charakteristika

V teorii lineárních systémů má velký význam analýza odezvy na speciální typy vstupních signálů.

S těmito signály se také často pracuje v praxi – např. při identifikaci, kdy chceme na základě odezvy určit hodnoty parametrů soustavy.

Přechodová charakteristika je reakcí soustavy na jednotkový skok na vstupu v čase $t = 0$ při nulových počátečních podmínkách. Označení většinou $h(t)$. Výhodou přechodové charakteristiky je její snadná realizovatelnost.

Jednotkový skok je matematicky definován následovně:

$$\begin{aligned} \eta(t) &= 0 \text{ pro } t \in (-\infty, 0) \\ \eta(t) &= 1 \text{ pro } t \in [0, \infty). \end{aligned}$$

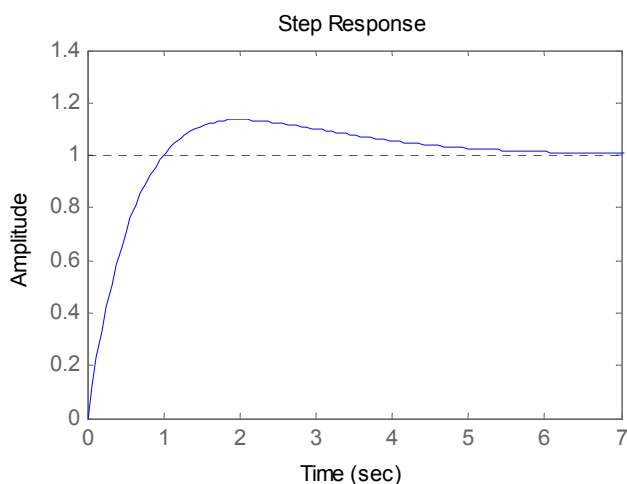
V praxi je zpravidla možné spíše změřit reakci systému, který má ustálený výstup y_0 , na skokovou změnu vstupu dané velikosti Δu . Díky linearitě systému pro přechodovou funkci platí:

$$h(t) = \frac{y(t) - y_0}{\Delta u}$$

Pozn.: přechodová charakteristika lze určit (tj. nabývá konečných hodnot), i když na pravé straně rovnice jsou derivace u (to není zcela zřejmé, protože derivace

$\frac{d\eta(t)}{dt}(0) = \infty$). Je však nutné, aby $m \leq n$ - jinak platí $\left| \lim_{t \rightarrow 0} h(t) \right| = \infty$.

Např. přechodová charakteristika soustavy $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 2\dot{u} + u$ je na obr. níže.



Impulsní charakteristika

nebo také „váhová funkce“. Označení je většinou $g(t)$.

Je reakcí na tzv. Diracův impuls, který je matematicky definován následovně:

$$\delta(t) = 0 \text{ pro } t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Zřejmě musí být $\delta(0) \rightarrow \infty$, neboť jinak by nemohlo platit $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$. Z tohoto důvodu Diracův impuls není fyzikálně realizovatelný.

Platí:

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} \tag{5}$$

kde $h(t)$ je přechodová charakteristika.

6. Fourierova a Laplaceova transformace

Předchozí kapitoly se zabývaly analýzou chování lineárních systémů v časové oblasti. V praxi se však rovněž často využívá analýza ve frekvenční oblasti, kdy nezávislou proměnnou je frekvence harmonických složek obsažených v signálu.

Analýza ve frekvenční oblasti má velký význam jak v oblasti zpracování signálů (např. návrh filtrů), tak i přímo ve zpětnovazebním řízení. Základním nástrojem je Fourierova transformace, která myšlenkově vychází z harmonického rozkladu periodického signálu.

Laplaceova transformace, která je rozšířením Fourierovy transformace, navíc poskytuje elegantní aparát pro výpočet časových průběhů a je standardním nástrojem pro návrh a analýzu regulačních obvodů.

Princip řešení pomocí Laplaceovy transformace spočívá v převedení diferenciálních rovnic na algebraické. Po jejich vyřešení je však třeba provést zpětnou transformaci výsledku do časové oblasti, což je bohužel snadné pouze u lineárních diferenciálních rovnic. Laplaceovy transformace je ale možné s výhodou využít i pro jiné operace - např. pro získání výstupního popisu ze stavového.

Pro získání řešení v časové oblasti se většinou využívá rozkladu obrazu řešení na parciální zlomky a pro získání vzoru jednotlivých zlomků se použije slovník.

Harmonický rozklad periodického signálu

Funkce $\cos(\omega_1 t)$ a $\sin(\omega_1 t)$ jsou periodické s periodou $2\pi / \omega_1$. Je zřejmé, že libovolným váženým součtem složek $\cos(\omega_1 t), \cos(2\omega_1 t), \dots, \cos(k\omega_1 t)$ a $\sin(\omega_1 t), \sin(2\omega_1 t), \dots, \sin(k\omega_1 t)$ získáme opět periodický signál s periodou $2\pi / \omega_1$.

Platí to však i obráceně – funkci $y(t)$ s periodou $2T$ je možné vyjádřit jako nekonečný vážený součet harmonických členů (Fourierova řada):

$$\tilde{y}(t) = A_0 + (A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t)) + (A_2 \cos(2\omega_1 t) + B_2 \sin(2\omega_1 t)) + \dots$$

kde $\omega_1 = \frac{\pi}{T}$ a $\{A_i, B_i\}$ jsou nějaké reálné koeficienty.

Funkce $y(t)$ a $\tilde{y}(t)$ nemusí být stejné - např. pokud $y(t)$ je nespojitá, ale platí:

$$\int_{-T}^T |y(t) - \tilde{y}(t)|^2 dt = 0.$$

Pro formální zjednodušení je možné opět vyjádřit harmonické složky jako komplexní funkce $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ a předchozí rozvoj je možné zapsat ve tvaru:

$$\tilde{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t} \quad (6)$$

kde C_k jsou nějaké koeficienty (nyní komplexní čísla) a i imaginární jednotka. Zápis (6) je třeba chápat tak, že $\tilde{y}(t)$ je komplexní, ale že nás zajímá pouze reálná složka.

Pro koeficienty C_k lze odvodit vztah:

$$C_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) e^{-ik\omega t} dt$$

Fourierova transformace

Položením $T \rightarrow \infty$ je možné předchozí výsledky rozšířit i pro neperiodické funkce. Dostáváme tak tzv. Fourierovu transformaci.

Fourierova transformace převádí funkci času $y(t)$ na funkci frekvence $Y(\omega)$. $Y(\omega)$ je komplexní číslo, které má význam amplitudy a fázového posunu harmonické složky s frekvencí ω v signálu $y(t)$.

Fourierův obraz funkce y je dán vztahem:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt$$

Je-li znám obraz nějaké funkce $Y(\omega)$ lze získat vzor zpětnou transformací:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Fourierův obraz se zapisuje často s argumentem $i\omega$ místo ω , tj. $Y(i\omega)$ místo $Y(\omega)$. Tento způsob zápisu vyplývá ze souvislosti s Laplaceovou transformací.

Fourierův obraz $Y(\omega)$ jako funkce ω má význam amplitudy a fázového posuvu složky $\cos(\omega t)$ v signálu. V praxi se pracuje rovněž s často veličinou

$$Y(\omega) \overline{Y(\omega)},$$

(tzv. výkonové spektrum) která je nezávislá na fázi a je úměrná výkonu jednotlivých harmonických složek.

Nevýhodou ale je, že Fourierova transformace neexistuje pro řadu funkcí včetně těch které jsou řešením lineárních diferenciálních rovnic, např. e^t (neplatí $\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| dt < \infty$).

Tento problém však odstraňuje Laplaceova transformace, kterou lze chápat jako rozšíření Fourierovy transformace.

Laplaceova transformace

Předpokládejme, že funkce $y(t)$ je nulová pro $t < 0$ a místo výrazu $i\omega$ ve Fourierově transformaci dosadíme komplexní argument $s = \alpha + i\omega$, který obsahuje i reálnou část. Potom výraz

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt \quad (7)$$

má konečnou hodnotu pro funkce, pro které platí $|y(t)| < Me^{\alpha t}$, kde M je nějaké číslo.

Nemusí tedy už platit $\int_0^{\infty} |y(t)| dt < \infty$.

Výraz (7) definuje Laplaceův obraz funkce $y(t)$. Fourierův obraz (pokud existuje) se získá okamžitě dosazením $s = i\omega$.

Inverzní Laplaceova transformace je definována analogicky:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y(s) e^{st} ds \quad (8)$$

kde c je voleno tak, aby všechny singulární body funkce $Y(s)$ byly v polorovině $\text{Re } z < c$. Přes formální podobnost se zpětnou Fourierovou transformací je zásadním rozdílem, že (8) je integrálem funkce komplexní proměnné.

Ve starší české literatuře se místo Laplaceova operátoru s často používá p .

Základní vlastnosti Laplaceovy transformace

Označme $\mathcal{L}\{y(t)\} \triangleq Y(s)$ Laplaceův obraz funkce $y(t)$.

Dále následuje přehled vybraných základních vlastností L-transformace, které se dále v textu využívají.

Linearita obrazu

$$\mathcal{L}\{a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)\} = a_1 \mathcal{L}\{y_1(t)\} + a_2 \mathcal{L}\{y_2(t)\} = a_1 Y_1(s) + a_2 Y_2(s).$$

kde a_1, a_2 jsou libovolná čísla.

Důkaz:

$$\int_0^{\infty} (a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)) e^{-st} dt = a_1 Y_1(s) + a_2 Y_2(s).$$

Obraz první derivace

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt} y(t) \right\} = s Y(s) - y(0).$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) e^{-st} dt &= \left[y(t) e^{-st} \right]_0^{\infty} - (-s) \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt = \\ &= s \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt - y(0) = s Y(s) - y(0). \end{aligned}$$

Obraz druhé a vyšší derivace

$$\mathcal{L} \{ y^{(k)}(t) \} = s^k Y(s) - \left[s^{k-1} y(0) + s^{k-2} \dot{y}(0) + \dots + y^{(k-1)}(0) \right].$$

V případě nulových počátečních podmínek platí:

$$\mathcal{L} \{ y^{(k)}(t) \} = s^k Y(s).$$

Obraz integrálu

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t y(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} Y(s).$$

Obraz konvoluce

$$\mathcal{L} \{ g(t) * u(t) \} \triangleq \mathcal{L} \left\{ \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau \right\} = G(s) U(s).$$

Pozn.: je-li $g(t)$ impulsní charakteristika lineárního systému a $u(t)$ je jeho vstup, pak výstup v čase je dán konvolutorním integrálem

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) u(t-\tau) d\tau.$$

Počáteční a konečná hodnota

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s Y(s).$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s)$$

Druhý vztah platí pouze tehdy, pokud $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ existuje. To je splněno právě tehdy, když funkce $s Y(s)$ nemá žádné póly (tj. body, ve kterých $s Y(s) \rightarrow \infty$) v polorovině $\{\operatorname{Re}\{s\} \geq 0\}$.

Posun proměnných v obraze

$$\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = F(s + a).$$

Posun proměnných v originále (časové zpoždění)

$$\mathcal{L}\{f(t - a)\} = e^{-as} F(s).$$

Slovník Laplaceovy transformace

Pro získání obrazů a průběhů v časové oblasti se většinou nepracuje přímo s definičními vztahy Laplaceovy transformace, i když je to možná cesta, ale spíše se využívá:

- linearita
- slovník základních funkcí a jejich obrazů
- dalších základních vlastností (obraz derivace a integrálu, posun vzoru apod.).

Slovník základních funkcí byl vytvořen aplikací definičních vztahů a výše uvedených pravidel.

Pozn.: Je třeba mít stále na paměti, že Laplaceova transformace je definována pouze pro funkce, které jsou pro $t < 0$ nulové (interval integrace v definičním vztahu (7) je $[0, \infty)$). Takže např. $\frac{1}{s+1}$ je ve skutečnosti obrazem funkce $e^{-t}\eta(t)$ a nikoliv e^{-t} . Pro jednoduchost se násobení skokovou funkcí $\eta(t)$ často vynechává, ale zejména při práci s časovým posunem to může vést k chybám, protože

$$f(t - \tau)\eta(t) \neq f(t - \tau)\eta(t - \tau).$$

Pak je třeba násobení $\eta(t - \tau)$ zapisovat.

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$ (Diracův impuls)	1
$\eta(t)$ (jednotkový skok)	$\frac{1}{s}$
T	$\frac{1}{s^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\frac{1}{T}e^{-t/T}$ (T je časová konstanta)	$\frac{1}{Ts+1}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$

7. Využití Laplaceovy transformace

Princip řešení pomocí Laplaceovy transformace spočívá v převedení diferenciálních rovnic na algebraické. Po jejich vyřešení je však třeba provést zpětnou transformaci výsledku do časové oblasti, což je bohužel snadné pouze u lineárních diferenciálních rovnic. Laplaceovy transformace je ale možné s výhodou využít i pro jiné operace - např. pro získání výstupního popisu ze stavového.

Pro získání řešení v časové oblasti se většinou využívá rozkladu obrazu řešení na parciální zlomky a pro získání vzoru jednotlivých zlomků se použije slovník.

Určení časové odezvy lineárních systémů

Obecný postup

1. Provedeme Laplaceovu transformaci levé a pravé strany rovnice.
2. Vyjádříme $Y(s)$. Dostaneme výraz ve tvaru

$$Y(s) = \frac{\beta_q s^q + \dots + \beta_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

kde β_i jsou nějaké koeficienty (jsou jiné než b_i z původní rovnice, protože je v nich zahrnut vliv počátečních podmínek a vstupní funkce).

Mnohočlen ve jmenovateli je identický s levou stranou charakteristické rovnice (až na jiné označení proměnné).

3. Mnohočlen ve jmenovateli lze pak rozložit na součin činitelů:

$$Y(s) = \frac{\beta_q s^q + \dots + \beta_0}{(s - c_1) \dots (s - c_n)} \quad (9)$$

Pro rozložení mnohočlenu $s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$ na kořenové součinitele $(s - c_1) \dots (s - c_n)$ je v obecném případě třeba řešit algebraickou charakteristickou rovnicí

$$s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

(což je bohužel možné analyticky pouze pro $n \leq 4$. Pro vyšší řád je obecně nutné použít pro určení kořenů numerické metody. Jestliže je ale některý kořen c_i znám, je možné vydělením faktorem $s - c_i$ řád polynomu snížit.)

Koeficienty c_i pak odpovídají právě kořenům této rovnice, protože pro $s = c_i$ je levá strana rovnice nulová.

Pozn.: Kořeny mohou být i komplexní. Má-li algebraická rovnice komplexní kořen c_k , má současně i kořen \bar{c}_k , který je komplexně sdružený k c_k .

4. Jestliže stupeň jmenovatele je větší než stupeň čitatele, je možné výraz (9) rozložit na parciální zlomky (pokud jsou různé kořeny c_i):

$$Y(s) = \frac{A_1}{(s - c_1)} + \frac{A_2}{(s - c_2)} + \dots + \frac{A_n}{(s - c_n)}$$

kde konstanty A_i (obecně komplexní v případě komplexních kořenů) lze jednoznačně určit. Postup určení koeficientů A_k je naznačen v následujících příkladech.

Při násobnosti kořenů vypadá obecný rozklad následovně:

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{k_1} \frac{A_{1i}}{(s - c_1)^i} + \dots + \sum_{i=1}^{k_n} \frac{A_{ni}}{(s - c_n)^i}$$

kde k_i je násobnost i -tého kořene.

5. S využitím slovníku určíme složky řešení jako vzory parciálních zlomků $\frac{A_k}{s - c_k}$, popř. $\frac{A_k}{(s - c_k)^i}$. Výsledný časový průběh $y(t)$ je součtem těchto částečných řešení.

Určení koeficientů rozkladu

Konstanty A_i rozkladu lze určit několika způsoby.

a) Základní a univerzální metodou je sečtení zlomků a porovnání koeficientů u jednotlivých mocnin s .

Např.:

$$\begin{aligned} \frac{2}{(s+2)(s+3)} &= \frac{A_1}{(s+2)} + \frac{A_2}{(s+3)} = \\ &= \frac{A_1(s+3)}{(s+2)} + \frac{A_2(s+2)}{(s+3)} = \frac{(A_1 + A_2)s + (3A_1 + 2A_2)}{(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

Odtud získáme soustavu 2 rovnic o 2 neznámých pro A_1, A_2 :

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 2 \\ 3A_1 + 2A_2 &= 0 \end{aligned}$$

b) Koeficient A_1 u příkladu výše je možné získat bez řešení soustavy rovnic tak, že nejprve vynásobíme obě strany činitelem $(s + 2)$:

$$\frac{2}{s+3} = A_1 + \frac{(s+2)A_2}{(s+3)}$$

Pokud položíme $s + 2 = 0$, tj. $s = -2$, druhý člen na pravé straně zmizí a dostaneme $A_1 = \frac{2}{1}$. Obdobně lze získat A_2 .

Pokud rozklad obsahuje násobný kořen (kterému odpovídá více parciálních zlomků), lze takto získat pouze koeficient pro první zlomek příslušný danému kořeni. Koeficienty pro další zlomky lze získat po zderivování podle s (viz příklad 4 níže), popř. metodou a).

1. Příklad

Určeme přechodovou charakteristiku soustavy popsané rovnicí

$$\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t).$$

Vstupem je tedy jednotkový skok $u(t) = \eta(t)$.

Po provedení Laplaceovy transformace levé a pravé strany dostáváme:

$$sY(s) + 3Y(s) = \frac{1}{s}.$$

Po úpravě:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+3)}.$$

Univerzálním postupem je výraz rozložit na elementární (parciální) zlomky a na ně aplikovat slovník.

Předpokládejme, že výraz lze rozložit na jednoduché zlomky s neznámými čitateli ve tvaru:

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3}. \quad (10)$$

Po sečtení:

$$Y(s) = \frac{A(s+3) + Bs}{s(s+3)} = \frac{(A+B)s + 3A}{s(s+3)}.$$

Čitatel musí být roven čitateli původního zlomku, tj. 1. Přitom dva mnohočleny jsou stejné právě když mají stejné koeficienty. Porovnáním koeficientů získáváme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ 3A &= 1. \end{aligned}$$

Řešením je $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$. Tedy $Y(s) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+3} \right)$. Vzorem $\frac{1}{s}$ je $\eta(t)$ a vzorem $\frac{1}{s+3}$ je e^{-3t} . Výsledek je tedy $h(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})$.

Výsledek lze však získat i přímou metodou bez řešení soustavy rovnic. Napišme

$$\frac{1}{s(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3}.$$

Konstantu A je zřejmě možné získat vynásobením obou stran s a následně položením $s = 0$:

$$\frac{1}{3} = A + 0 \Rightarrow A = \frac{1}{3}.$$

Stejně tak pro získání B stačí vynásobit obě strany členem $(s+3)$ a položit $s = -3$.

$$\frac{1}{(-3)} = 0 + B \Rightarrow B = -\frac{1}{3}.$$

2. Příklad

Určeme reakci stejné soustavy jako v předchozím případě

$$\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t)$$

na vstupu ve tvaru $u(t) = 10[\eta(t) - \eta(t-1)]$, tj. na vstupu je jednotkový impuls velikosti 10 a šířky 1, při nulových počátečních podmínkách.

Díky linearitě a nulovým počátečním podmínkám je možné získat výsledek jako

$$y(t) = 10[h(t) - h(t-1)]$$

kde $h(t)$ je přechodová funkce, tj. reakce na jednotkový skok $\eta(t)$. Výše bylo určeno, že pro $t \geq 0$ je $h(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})$.

Přechodová funkce je nulová pro $t < 0$ a $h(t-1)$ musí být nulová pro $t < 1$, což vyjádříme symbolem $\eta(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{10}{3} \left[(1 - e^{3t})\eta(t) - (1 - e^{3(t-1)})\eta(t-1) \right] = \\ &= \frac{10}{3} \left[\eta(t) - \eta(t-1) - e^{3t}\eta(t) + e^{3(t-1)}\eta(t-1) \right]. \end{aligned}$$

Pokud bychom pracovali se vstupem přímo ve tvaru $u(t) = 10[\eta(t) - \eta(t-1)]$, pak s využitím operátoru časového posuvu dostáváme:

$$sY(s) + 3Y(s) = \frac{10}{s} - \frac{10e^{-s}}{s}.$$

Pro $Y(s)$ zřejmě dostaneme:

$$Y(s) = 10 \left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} \right) + 10 \left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} \right) e^{-s}$$

což odpovídá výsledku výše.

3. Příklad

Určeme přechodovou funkci systému

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t).$$

Pro přechodovou funkci platí:

$$\begin{aligned} s^2Y(s) + 2sY(s) + 3Y(s) &= \frac{1}{s} \\ Y(s) &= \frac{1}{s(s^2 + 2s + 3)}. \end{aligned}$$

Kořeny členu $s^2 + 2s + 3$ ve jmenovateli jsou $s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-3} = -1 \pm i\sqrt{2}$ a jsou tedy komplexní. Práci s komplexními čísly je však možné se vyhnout, pokud se komplexní člen nebude rozkládat a nahradí se 2 reálnými konstantami. Potom rozklad na parciální zlomky vypadá následovně:

$$\frac{1}{s(s^2 + 2s + 3)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 3}.$$

Pro získání A , B a C je třeba sečíst zlomky a porovnat koeficienty:

$$\frac{1}{s(s^2 + 2s + 3)} = \frac{A(s^2 + 2s + 3) + (Bs + C)s}{s(s^2 + 2s + 3)}$$

tedy:

$$s^2 \cdot (A + B) = 0$$

$$s \cdot (2A + C) = 0$$

$$1 \cdot (3A) = 1$$

Odtud dostáváme:

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = -\frac{2}{3}.$$

Komplexní člen $\frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 3}$ ještě upravíme tak, aby se dal využít slovník (viz obrazy funkcí $e^{-at} \sin \omega t$, $e^{-at} \cos \omega t$):

$$\begin{aligned} \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 3} &= \frac{Bs + C}{(s+1)^2 + 2} = B \frac{s}{(s+1)^2 + (\sqrt{2})^2} + C \frac{1}{(s+1)^2 + (\sqrt{2})^2} = \\ &= B \frac{s+1}{(s+1)^2 + (\sqrt{2})^2} + (C-B) \frac{1}{(s+1)^2 + (\sqrt{2})^2} = \\ &= B \frac{s+1}{(s+1)^2 + (\sqrt{2})^2} + \frac{(C-B)}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{(s+1)^2 + (\sqrt{2})^2} \end{aligned}$$

Výsledek je tedy:

$$y(t) = A + Be^{-t} \cos \sqrt{2}t + \frac{C-B}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin \sqrt{2}t = \frac{1}{3} \left[1 - e^{-t} \cos \sqrt{2}t - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin \sqrt{2}t \right].$$

4. Příklad

Odezva systému

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t) - \dot{u}(t)$$

na vstup $u(t) = t$ s počátečními podmínkami $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$, $u(0) = 0$ (předpokládáme, že v čase $t < 0$ byla hodnota řízení nulová. Pokud tomu tak není, je třeba zahrnout i počáteční podmínky řízení.)

Laplaceův obraz rovnice:

$$s^2 Y(s) - s \cdot 1 + 4(sY(s) - 1) + 3Y(s) = (1-s) \frac{1}{s^2}.$$

Úpravy:

$$(s^2 + 4s + 3)Y(s) = \frac{(s+4)(1-s)}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{(s+4)(1-s)}{s^2(s^2 + 4s + 3)} = \frac{(s+4)(1-s)}{s^2(s+1)(s+3)}$$

Rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{(s+4)(1-s)}{s^2(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+3}$$

Protože kořen 0 je dvojnásobný, přísluší mu v rozkladu 2 členy: $\frac{A}{s}$ a $\frac{B}{s^2}$. Obecně k -násobnému kořeni a přísluší členy

$$\frac{A_1}{s-a}, \frac{A_2}{(s-a)^2}, \dots, \frac{A_k}{(s-a)^k}$$

Sečtením zlomků získáme soustavu 4 rovnic o 4 neznámých, jejíž řešení může být poměrně pracné. Získání koeficientů přímou metodou:

$$\text{vynásobení } s^2, s=0: \Rightarrow B = \frac{4}{3}$$

$$\text{vynásobení } s+1, s=-1: \Rightarrow C = \frac{3 \cdot 2}{(-1)^2 \cdot 2} = 3$$

$$\text{vynásobení } s+3, s=-3: \Rightarrow D = \frac{1 \cdot 4}{(-3)^2 \cdot (-2)} = -\frac{2}{9}$$

Pro získání koeficientu A je možné vynásobit s^2 , zderivovat a dosadit $s=0$.

$$\frac{(s+4)(1-s)}{(s+1)(s+3)} = As + B + C \frac{s^2}{s+1} + D \frac{s^2}{s+3}$$

$$\begin{aligned} & \frac{((s+4)(1-s))' (s+1)(s+3) - (s+4)(1-s)((s+1)(s+3))'}{(s+1)^2(s+3)^2} = \\ & = \frac{((1-s) - (s+4))(s+1)(s+3) - (s+4)(1-s)((s+3) + (s+1))}{(s+1)^2(s+3)^2} \end{aligned}$$

$$A = \frac{(1-4) \cdot 3 - 4 \cdot (3+1)}{1^2 \cdot 3^2} = -\frac{25}{9}$$

Obecně, pro získání koeficientu u k -násobného kořene s_i je možné vynásobit $(s-s_i)^k$, $k-1$ krát zderivovat a dosadit $s=s_i$.

Řešení je $y(t) = -\frac{25}{9} + \frac{4}{3}t + 3e^{-t} - \frac{2}{9}e^{-3t}$.

Řešení stavových rovnic

Laplaceova transformace je rovněž účinným nástrojem pro výpočet časové odezvy systémů popsaných soustavou diferenciálních rovnic ve stavovém tvaru:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u.$$

Na jednotlivé řádky soustavy lze aplikovat Laplaceovu transformaci, což lze zapsat opět ve vektorovém tvaru:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{b}U(s).$$

Po převedení \mathbf{X} na levou stranu:

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{b}U(s) + \mathbf{x}_0$$

kde \mathbf{E} je jednotková matice.

Řešením této soustavy lineárních rovnic je třeba určit složky vektoru $\mathbf{X}(s)$ v závislosti na parametru s a následně provést jejich zpětnou transformaci.

Řešení lze obecně vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{b}U(s) + \mathbf{x}_0).$$

Příklad: Určeme reakci systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + 2x_1 + x_2 &= u \\ \dot{x}_2 + x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, na jednotkový skok na vstupu.

Po Laplaceově transformaci:

$$\begin{aligned} sX_1 - 1 + 2X_1 + X_2 &= \frac{1}{s} \\ sX_2 - 0 + X_1 - X_2 &= 0. \end{aligned}$$

Po úpravě získáme soustavu lineárních rovnic:

$$(s+2)X_1 + X_2 = \frac{1}{s} + 1$$
$$X_1 + (s-1)X_2 = 0.$$

Z druhé rovnice dosadíme do první:

$$(1 - (s+2)(s-1))X_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad X_2(s) = \frac{\frac{1}{s} + 1}{1 - (s+2)(s-1)} = \frac{1+s}{s - s(s+2)(s-1)}$$
$$\Rightarrow X_1(s) = \frac{(1-s)(1+s)}{s - s(s+2)(s-1)} = \frac{s^2 - 1}{s^3 + s^2 - 3s}.$$

Časové průběhy lze získat zpětnou L-transformací složek $X_1(s)$ a $X_2(s)$.

8. Obrazový přenos

Uvažujme lineární systém

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u .$$

Vyjádříme-li obecně řešení $Y(s)$ v Laplaceově transformaci, dostáváme:

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} U(s) + \frac{\{\text{členy závislé na počátečních podmínkách}\}}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} .$$

První sčítanec lze napsat ve tvaru

$$F(s) \cdot U(s)$$

kde

$$F(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$

je tzv. *obrazový přenos* systému, který je definován jako poměr $\frac{Y(s)}{U(s)}$ při nulových počátečních podmínkách. Přenos zřejmě nezávisí na vstupním signálu a charakterizuje samotnou soustavu. Jmenovatel přenosu je stejný pro všechny tři členy $Y(s)$.

Např. přenos soustavy $\ddot{y} + 3\dot{y} + y = 2u + \dot{u}$ je $F(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+1}$.

Jelikož Laplaceovým obrazem Diracova impulsu je 1, je $F(s)$ rovno obrazu odezvy systému na Diracův impuls, tj. obrazu impulsní charakteristiky.

Obecné vlastnosti přenosu

Předpokládejme přenos systému ve tvaru:

$$F(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

$P(s)$ a $Q(s)$ jsou mnohočleny proměnné s . $F(s)$ je racionální lomená funkce, která se nazývá *ryzí* pokud platí $m < n$.

Mnohočlen (polynom) ve jmenovateli se nazývá *charakteristický* a je identický s levou stranou charakteristické rovnice příslušné diferenciální rovnice.

Mnohočleny v čitateli a jmenovateli je možné rozložit na součin činitelů:

$$F(s) = b_m \cdot \frac{(s - d_1) \dots (s - d_m)}{(s - c_1) \dots (s - c_n)}$$

kde d_i a c_i jsou kořeny mnohočlenů čitatele a jmenovatele (obecně komplexní).

Kořeny čitatele se nazývají *nuly* přenosu.

Kořeny jmenovatele se nazývají *póly* přenosu.

Přenos lze snadno upravit do tvaru, se kterým se v praxi pracuje častěji:

$$F(s) = K \frac{1}{s^k} \frac{(\tau_1 s + 1) \dots (\tau_{m'} s + 1)}{(T_1 s + 1) \dots (T_{n'} s + 1)} \quad (11)$$

kde platí $m' \leq m$, $n' \leq n$, K je konstanta a k odpovídá násobnosti nulového kořene.

V případě, že parametry T_i , τ_i jsou kladné, jsou označovány jako *časové konstanty*.

Např.:
$$\frac{1}{s(s+3)(s+2)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{3}s+1)(\frac{1}{2}s+1)}$$

Počáteční a ustálená hodnota výstupu

Uvažujme reakci systému na vstupní signál $u(t)$ při nulových počátečních podmínkách. Ze znalosti přenosu je možné určit přímo hodnotu výstupu pro $t \rightarrow 0+$ a $t \rightarrow \infty$, pokud tyto limity existují.

Pozn.: Limita pro $t \rightarrow 0$ se uvažuje zprava (značeno +), protože pro $t = 0$ může dojít ke skokové změně a limita v běžném smyslu pak neexistuje.

Hodnota výstupu v čase $t \rightarrow 0+$ lze určit pomocí věty o počáteční hodnotě Laplaceovy transformace:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} y(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) U(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} (s U(s)) = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) \cdot \lim_{t \rightarrow 0+} u(t). \end{aligned}$$

Např. hodnota přechodové funkce v bodě 0 bude rovna $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s)$. Jestliže $m < n$, je hodnota v čase nulová.

Užitečné může být i vyšetření derivace výstupu v počátku. Platí:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0^+} \dot{y}(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 F(s)U(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} (sU(s)) = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t).\end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že derivace přechodové funkce v počátku je rovna $\lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$, je tedy pro $n = m + 1$ nenulová a pro $n > m + 1$ rovna 0.

Pro vyšetření ustálené hodnoty předpokládejme, že součin $sF(s)U(s)$ má póly pouze v levé otevřené polorovině $\operatorname{Re}\{s\} < 0$ (to je ekvivalentní podmínce že $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ existuje). Potom podle věty o konečné hodnotě Laplaceovy transformace dostáváme:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s(F(s)U(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} F(s) \cdot \lim_{s \rightarrow 0} (sU(s)) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} F(s) \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} u(t)\end{aligned}$$

za předpokladu, že $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ existuje.

Uvažujeme-li $u(t) = \eta(t)$, z tvaru (11) pak ihned dostáváme:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} F(s) = K.$$

Tento případ odpovídá situaci, kdy soustava je statická (při konečné ustálené hodnotě řízení u_∞ má konečný ustálený výstup y_∞). Konstanta K pak má význam statického zesílení.

Pokud $k > 0$, limita $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ neexistuje. k bývá pak označováno jako *řád astatismu*.

Soustava pak má integrační charakter (člen $\frac{1}{s^k}$ provádí k -krát integraci).

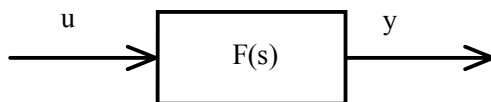
Pokud $k < 0$, soustava má derivační charakter – ustálená hodnota je nulová.

Pozn.: Pokud platí $k \leq 0$, ještě to neznamená, že hodnota výstupu se ustálí pro $t \rightarrow \infty$ (je třeba, aby všechny kořeny jmenovatele byly všechny v levé polorovině).

Algebra přenosu a bloková schémata

Složitý systém lze často rozložit na propojení jednodušších systémů, které jsou popsány přenosy. Přenos celého systému lze získat pomocí pravidel pro manipulaci s přenosy (tzv. bloková algebra).

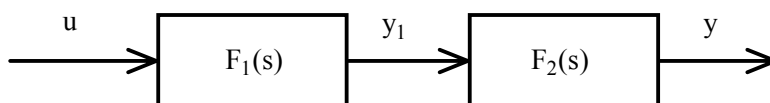
Soustavu lze schematicky znázornit pomocí bloku:



Vstupující a vystupující šipky odpovídají působení vstupních a výstupních veličin.

Přenos složených soustav lze snadno určit pomocí následujících pravidel:

1. Pokud výstup jednoho systému (bloku) je vstupem jiného systému (sériové zapojení):



Pro celkový výstup platí:

$$Y(s) = F_2(s)Y_1(s) = F_2(s)F_1(s)U(s) = (F_1(s)F_2(s))U(s)$$

protože $F_1(s)F_2(s) = F_2(s)F_1(s)$.

Tedy celkový přenos je roven součinu dílčích přenosů:

$$F(s) = F_1(s)F_2(s).$$

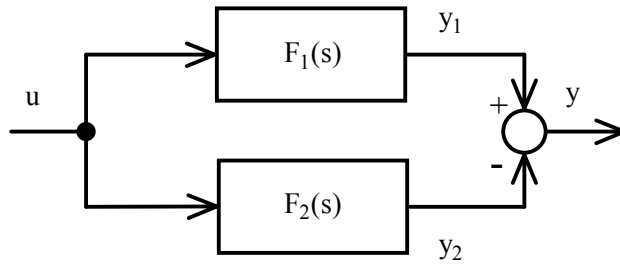
2. Jestliže dva systémy mají stejný vstup a jejich výstup se sčítá (paralelní zapojení), platí:

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = F_1(s)U(s) + F_2(s)U(s) = (F_1(s) + F_2(s))U(s).$$

Tedy $F(s) = F_1(s) + F_2(s)$.

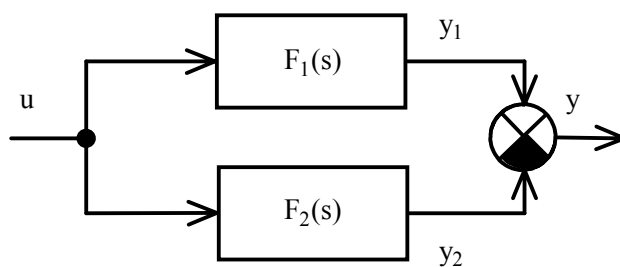
Stejně tak pro rozdíl platí: $F(s) = F_1(s) - F_2(s)$.

Součet signálů je zpravidla označen kroužkem. V případě rozdílu je kladná, resp. záporná větev označena znaménkem +, resp. -.

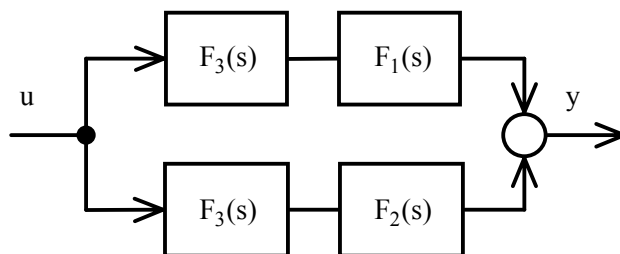


Ve starší literatuře se používá spíše značení, kde pro součet se používá symbol \otimes .

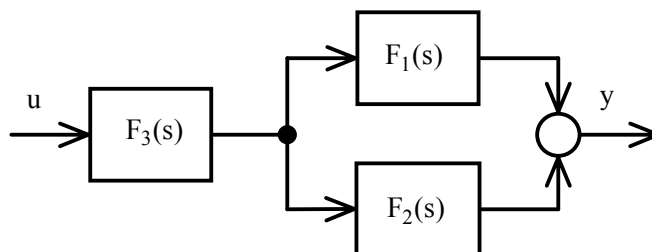
Vyplněné pole odpovídá odčítání signálu:



3. Jelikož platí $F_3(s)F_1(s) + F_3(s)F_2(s) = F_3(s)(F_1(s) + F_2(s))$, je možné předřadit blok, který je společný pro více paralelních větví (obdoba vytknutí při úpravě aritmetických výrazů):



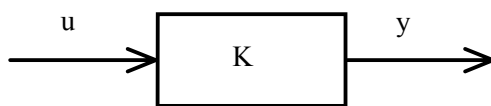
je totéž jako



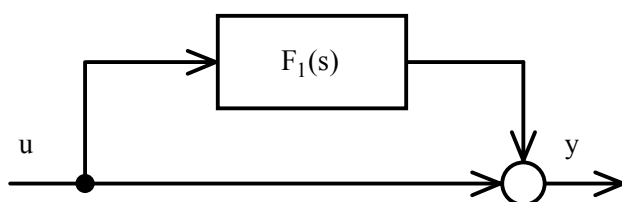
Poznámky:

a) Na pořadí bloků v jedné větvi nezáleží (neboť $F_1(s)F_2(s) = F_2(s)F_1(s)$)

b) Násobení signálu konstantou K má stejný efekt jako předřazený blok s přenosem K :

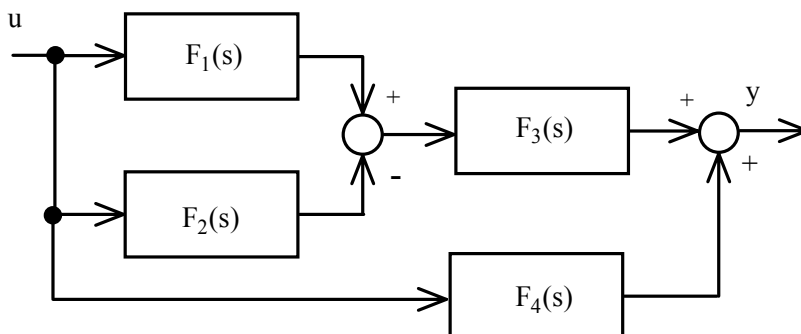


c) Přenos prázdné větve je roven jedné, takže



má přenos $F(s) = 1 + F_1(s)$.

Např.: pro systém



je výsledný přenos:

$$F(s) = (F_1(s) - F_2(s))F_3(s) + F_4(s).$$

V případě systému s více vstupy a více výstupy se přenos mezi konkrétním vstupem u_j a konkrétním výstupem y_i určí tak, že ostatní vstupy se položí rovné nule, čímž se v podstatě odstraní ze schématu. Ostatní výstupy se ignorují, pokud neovlivňují výstup y_i .

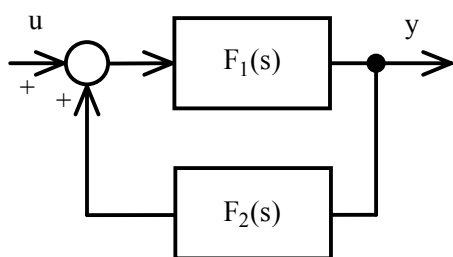
Zpětná vazba

Komplikovanější situace nastane, pokud výstup systému (případně některé jeho části) může ovlivňovat jeho vstup. Vzniká tzv. zpětná vazba (označovaná také jako antiparalelní zapojení).

Rozlišuje se zpětná vazba:

- Kladná
 - se zvětšující se hodnotou výstupu se zvětšuje působení vstupní veličiny ve smyslu dalšího nárůstu výstupu
 - u technických systémů má často destruktivní účinek
- Záporná
 - se zvětšující se hodnotou výstupu se zvětšuje působení vstupní veličiny proti dalšímu nárůstu výstupu
 - má naopak stabilizující účinek
 - řada technických aplikací – zejména zpětnovazební řízení

Přenos zpětné vazby:



Musí platit:

$$Y(s) = F_1(s)(U(s) + F_2(s)Y(s))$$

Po roznásobení a úpravě:

$$Y(s)(1 - F_1(s)F_2(s)) = F_1(s)U(s)$$

tj.:

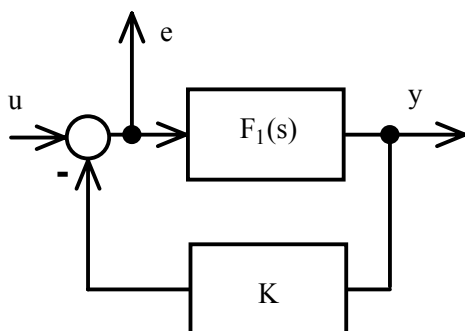
$$Y(s) = \frac{F_1(s)U(s)}{1 - F_1(s)F_2(s)}$$

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 - F_1(s)F_2(s)}.$$

Čitatel $F_1(s)$ je roven přenosu přímé větve mezi y a u . Jmenovatel je roven

$1 -$ (přenos otevřené zpětné vazby).

Tento princip lze využít i pokud chceme určit přenos mezi jinými body uzavřené smyčky. Např. v následujícím schématu je K zesílení zpětné vazby, která je záporná (odečítá se od vstupu):



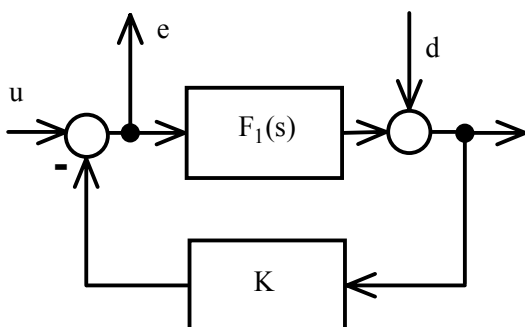
Pro určení přenosu $F_{eu} = \frac{E(s)}{U(s)}$ je přenos přímé větve mezi e a u roven 1 (mezi e a u není žádný blok) a přenos otevřené zpětné vazby mezi e a u je roven $-K \cdot F_1(s)$ (záporné znaménko je proto, že zpětnovazební signál se u vstupu do soustavy odčítá).

Je tedy

$$F_{eu} = \frac{1}{1 + K \cdot F_1(s)}$$

Přenos $F_{yu} = \frac{Y(s)}{U(s)}$ je roven $F_{yu} = \frac{F_1(s)}{1 + K \cdot F_1(s)}$.

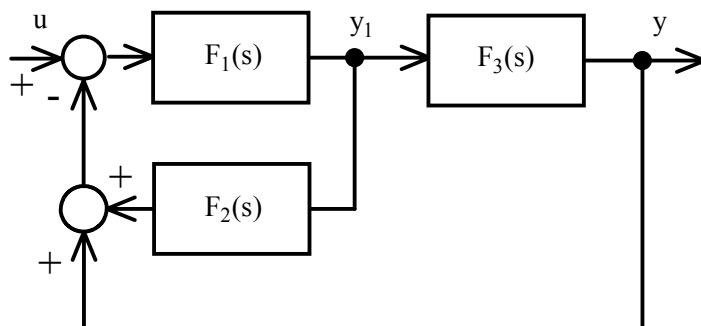
V případě, že na soustavu působí ještě další vstupní signál d , je možné okamžitě určit přenos např. mezi e a d :



Přenos přímé větve je $-K$. Přenos otevřené smyčky je stejný jako v předchozích případech. Tedy

$$F_{ed} = \frac{-K}{1 + K \cdot F_1(s)}$$

Složitější příklad:



Platí $Y(s) = F_3(s)Y_1(s)$, kde

$$Y_1(s) = F_1(s)(U(s) - F_2(s)Y_1(s) - Y(s)) = F_1(s)(U(s) - F_2(s)Y_1(s) - F_3(s)Y_1(s)).$$

Tedy

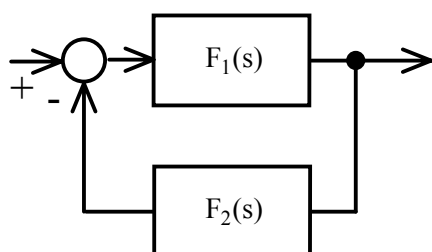
$$Y_1(s)(1 + F_1(s)F_2(s) + F_1(s)F_3(s)) = F_1(s)U(s)$$

$$Y_1(s) = \frac{F_1(s)U(s)}{1 + F_1(s)F_2(s) + F_1(s)F_3(s)}$$

$$F(s) = \frac{F_3(s)Y_1(s)}{U(s)} = \frac{F_1(s)F_3(s)}{1 + F_1(s)F_2(s) + F_1(s)F_3(s)}.$$

V tomto případě je ve jmenovateli zřejmě $1 -$ (součet přenosů otevřených smyček), v čitateli zůstává přenos přímé větve.

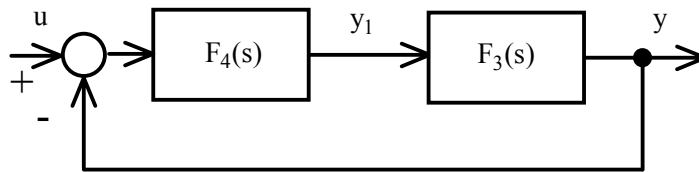
Stejný výsledek lze rovněž (možná snadněji) získat opakovanou aplikací pravidla o přenosu zpětné vazby uvedeného výše. Definujme pomocný podsystém F_4 složený z F_1 a F_2 :



Přenos F_4 lze vyjádřit okamžitě:

$$F_4(s) = \frac{F_1(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)}$$

Celé schéma pak lze upravit do podoby (součtové místo, kde se přičítá vnější zpětná vazba bylo přesunuto před blok F_4):



Celkový přenos pak lze vyjádřit jako

$$F(s) = \frac{F_4(s)F_3(s)}{1 + F_4(s)F_3(s)} = \frac{\frac{F_1(s)F_3(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)}}{1 + \frac{F_1(s)F_3(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)}} = \frac{F_1(s)F_3(s)}{1 + F_1(s)F_2(s) + F_1(s)F_3(s)}.$$

9. Frekvenční přenos

Uvažujme lineární systém

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u$$

kde na vstup je přiveden harmonický signál v komplexním tvaru $u(t) = Be^{i\omega t}$.

Předpokládejme, že výstup je rovněž ve tvaru $y(t) = Ae^{i\omega t}$. Po dosazení:

$$\begin{aligned} A(i\omega)^n e^{i\omega t} + a_{n-1}A(i\omega)^{n-1} e^{i\omega t} + \dots + a_1A(i\omega)e^{i\omega t} + a_0Ae^{i\omega t} &= \\ = b_m B(i\omega)^m e^{i\omega t} + \dots + b_1B(i\omega)e^{i\omega t} + b_0Be^{i\omega t} \end{aligned}$$

Zřejmě lze vykrátit $e^{i\omega t}$ a jestliže platí:

$$\frac{A}{B} = \frac{b_m (i\omega)^m + \dots + b_1(i\omega) + b_0}{(i\omega)^n + a_{n-1}(i\omega)^{n-1} + \dots + a_1(i\omega) + a_0}$$

je rovnice splněna. To znamená, že harmonická složka je jedním z řešení, a rovnice výše definuje poměr faktorů A a B .

Za předpokladu, že pro $t \rightarrow \infty$ vymizí přechodové složky (to nebude platit pokud systém bude mít kořeny jmenovatele v kladné polorovině), bude pro dostatečně velké t na výstupu harmonický signál.

$\frac{A}{B} = F(\omega)$ je komplexní číslo. Jestliže napíšeme

$$F(\omega) = |F(\omega)|e^{i\varphi(\omega)}$$

má modul $|F(\omega)|$ význam zesílení amplitudy a úhel $\varphi(\omega)$ odpovídá fázovému posuvu způsobenému průchodem soustavou. Tedy výstupní signál $y(t)$ je rovněž harmonický se stejnou úhlovou frekvencí ω jako vstupní signál. Jeho amplituda a fázové posunutí jsou však závislé na ω .

Faktor $F(\omega)$ má zřejmě stejný tvar jako podíl Fourierových obrazů výstupu a vstupu při průchodu signálu lineární soustavou:

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)}$$

a je nazýván *Frekvenční přenos*.

Z obrazového přenosu získáme frekvenční přenos dosazením $s = i\omega$.

Frekvenční přenos obsahuje informaci o tom, které frekvence systém propouští a které tlumí. Současně obsahuje informaci o posuvu fáze v závislosti na vstupující frekvenci.

Frekvenční charakteristika

Dosazením za konkrétní hodnotu do $F(\omega)$ dostáváme bod tzv. *frekvenční charakteristiky*. Frekvenční charakteristika lze znázornit jako křivka v komplexní rovině.

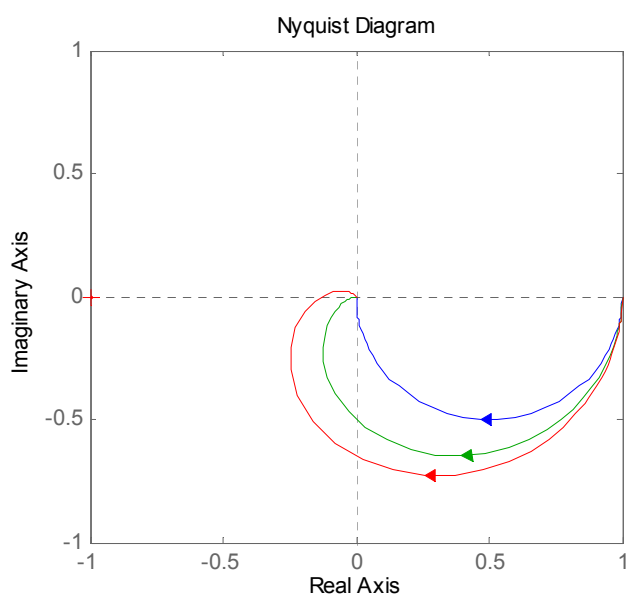
Např. pro systém s přenosem $F(s) = \frac{1}{s+3}$ máme $F(\omega) = \frac{1}{3+i\omega}$, což lze dále upravit vynásobením čitatele i jmenovatele komplexně sdruženým číslem $3-i\omega$:

$$F(\omega) = \frac{1}{9+\omega^2}(3-i\omega) = \frac{3}{9+\omega^2} - \frac{\omega}{9+\omega^2}i.$$

Souřadnice bodů frekvenční charakteristiky v komplexní rovině jsou tedy

$$\left[\frac{3}{9+\omega^2}, -\frac{\omega}{9+\omega^2} \right].$$

Bod frekvenční charakteristiky lze také získat měřením. Po přivedení harmonického signálu na vstup systému změříme (po ustálení přechodových složek) amplitudu a fázový posun výstupního signálu. V případě, že systém má póly uvnitř pravé poloroviny, však nedojde k odeznění přechodových složek a měření nelze provést. Pak je možné s frekvenční charakteristikou pracovat pouze matematickými prostředky.



Na obr. výše jsou znázorněny frekvenční charakteristiky v komplexní rovině soustav

s přenosem $F(s) = \frac{1}{(s+1)^k}$ pro $k = 1, 2, 3$.

Je možné snadno ukázat, že pokud $n > m$, bude $F(\omega) \rightarrow 0$. Směr tečny pro $\omega \rightarrow \infty$ je

$$\frac{\pi}{2}(m-n).$$

Amplitudová a fázová charakteristika

Vyjádříme-li přenos $F(\omega)$ v exponenciálním tvaru:

$$F(\omega) = |F(\omega)|e^{i\varphi(\omega)} \quad (12)$$

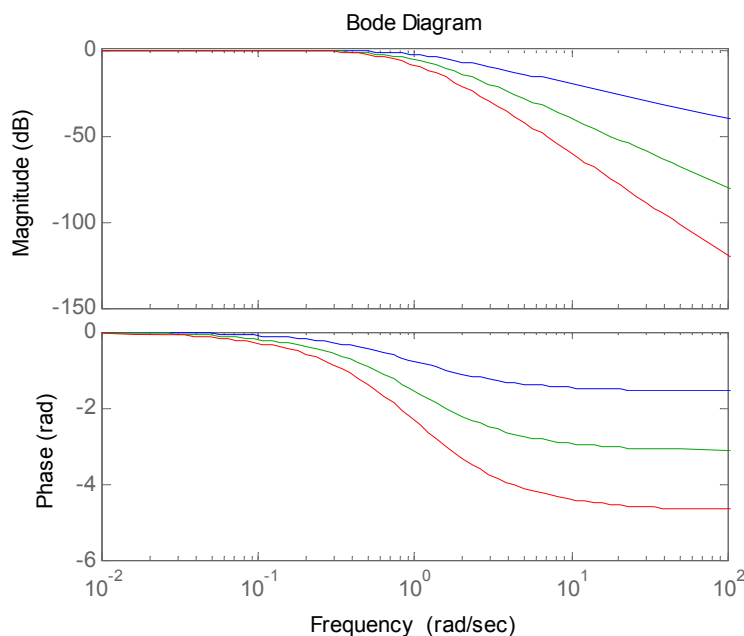
má modul $|F(\omega)|$ význam zesílení složky s frekvencí ω a argument $\varphi(\omega)$ má význam časového posunu příslušné složky po průchodu soustavou.

Samostatným grafickým zobrazením hodnot $A(\omega) = |F(\omega)|$ a $\varphi(\omega)$ získáme tzv. *amplitudovou* a *fázovou* charakteristiku.

Osa ω v obou grafech má zpravidla logaritmické měřítko. Místo hodnoty $A(\omega)$ se většinou v amplitudové charakteristice vynáší veličina $20 \log A(\omega)$ v jednotkách [dB].

Na obr. níže jsou znázorněny logaritmické frekvenční charakteristiky soustav

s přenosem $F(s) = \frac{1}{(s+1)^k}$ pro $k = 1, 2, 3$.



U soustavy 1. řádu s frekvenčním přenosem $F(\omega) = \frac{1}{1+iT\omega}$ platí:

- Pro $\omega \rightarrow 0$ je $F(\omega) \approx 1$, tj.: $20 \log |F(\omega)| = 0$, $\arg F(\omega) = 0$.

- Pro $\omega \rightarrow \infty$ je $F(\omega) \approx -i \cdot \frac{1}{T\omega}$, tedy:

$$20 \log |F(\omega)| = 20(\log 1 - \log T\omega) = -20(\log \omega) + 20 \log \frac{1}{T},$$

$$\arg F(\omega) = -\frac{\pi}{2}.$$

První asymptotou logaritmické amplitudové charakteristiky je tedy osa x. Existuje však i asymptota pro $\omega \rightarrow \infty$. Při zvýšení $\log \omega$ o 1 (tj. zvýšení frekvence 10x) dojde k poklesu $20 \log |F(\omega)|$ o 20 dB, (tj. $|F(\omega)|$ klesne 10x). Průsečík obou asymptot je dán rovnicí

$$-20(\log \omega_z) + 20 \log \frac{1}{T} = 0 \Rightarrow \omega_z = \frac{1}{T}$$

Od frekvence ω_z současně dochází k zpoždění fáze o $\frac{\pi}{2}$.

Systém se tedy chová tak, že vstupní frekvence $\omega < \omega_z$ propouští, zatímco frekvence $\omega > \omega_z$ tlumí.

Pozn.: V oblasti zpracování signálu se takto chovající soustava označuje jako *filtr typu dolní propust*.

Obdobně je možné vyšetřit, že člen s přenosem $F(\omega) = 1 + iT\omega$ bude naopak pro $\omega > \omega_z$ zesilovat amplitudu o 20dB na dekádu a posouvat fázi dopředu o $\frac{\pi}{2}$.

U soustavy $F(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$ platí:

$$F(\omega) = |F(\omega)| \cdot e^{i\varphi(\omega)} = |F_1(\omega)| |F_2(\omega)| \cdot e^{i(\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega))}$$

kde $F_1(s) = \frac{1}{(T_1s+1)}$, $F_2(s) = \frac{1}{(T_2s+1)}$. Potom

$$20 \log |F(\omega)| = 20 \log |F_1(\omega)| + 20 \log |F_2(\omega)|$$

a pro fázi platí:

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega).$$

Výsledná logaritmická amplitudová i fázová charakteristika je tedy součtem dílčích charakteristik jednotlivých součinitelů. To lze snadno zobecnit i pro libovolný počet členů.

Na základě předchozího výsledku je možné získat představu o charakteristikách soustav vyšších řádů rozložením na jednoduché členy, určením jejich asymptot a sečtením.

10. Přehled nejčastějších typů lineárních soustav

Soustava prvního řádu

Statická soustava prvního řádu (člen se setrvačností 1. řádu)

Rovnice: $\dot{y} + a_0 y = b_0 u$ ($a_0 > 0$)

Přenos: $F(s) = \frac{b_0}{s + a_0} = \frac{b_0}{a_0} \frac{1}{Ts + 1} = \frac{K}{Ts + 1}$,

kde:

$T = \frac{1}{a_0}$... časová konstanta

$K = \frac{b_0}{a_0}$... zesílení

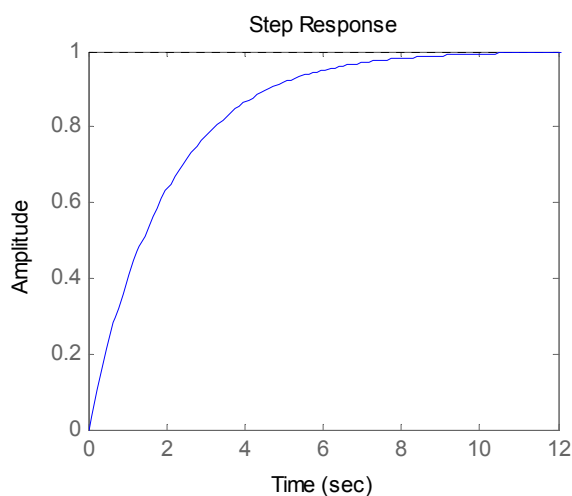
Přechodová funkce: $h(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}})$. Tečna v počátku má směrnici $\frac{K}{T}$. V čase

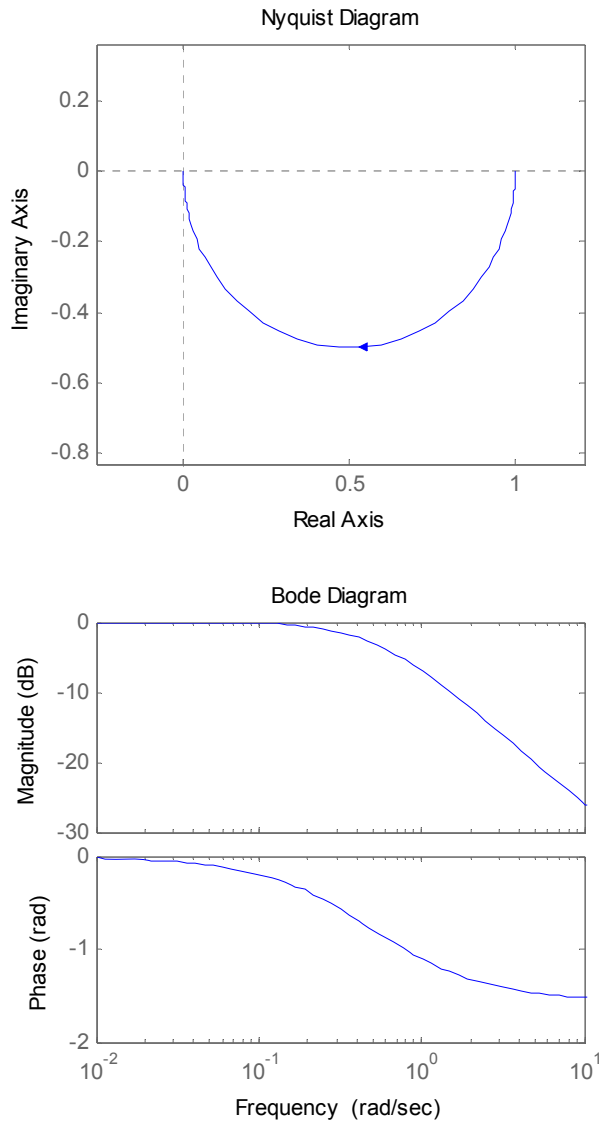
$t = T$ má přechodová funkce hodnotu $h(t) = K(1 - e) \approx 0.63 K$ (tj. nabývá zhruba 63% své ustálené hodnoty).

Pokud $a_0 < 0$, systém je nestabilní ($h(t)$ narůstá nade všechny meze).

Příklady: Ohřev kapaliny s tepelnými ztrátami do okolí, elektrický RC člen, ventil s dynamikou.

Uvažujme systém s přenosem 1. řádu $\frac{1}{2s + 1}$. Na obrázcích níže je přechodová funkce, frekvenční charakteristika v komplexní rovině, amplitudová a fázová charakteristika.





Astatická soustava prvního řádu (integrační člen)

Rovnice: $\dot{y} = b_0 u$

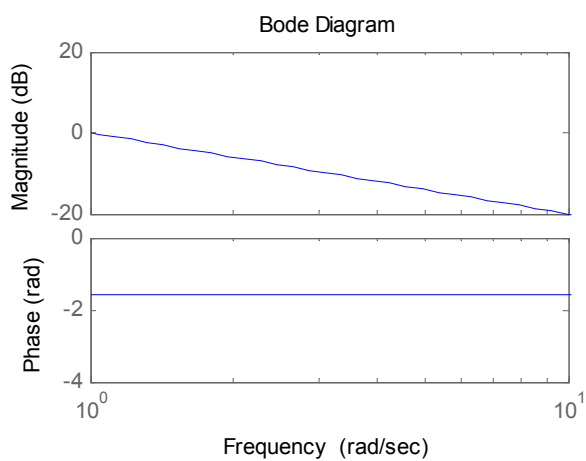
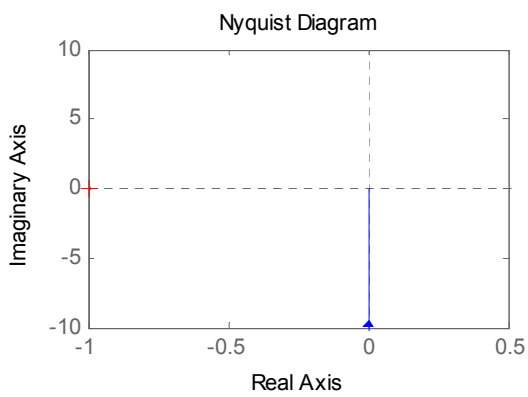
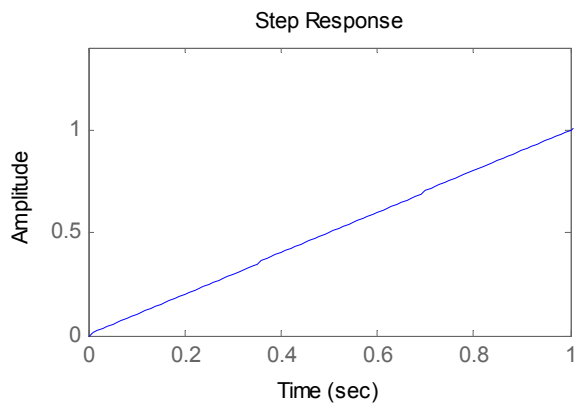
Přenos: $F(s) = \frac{b_0}{s} = \frac{1}{Ts}$,

kde $T = \frac{1}{a_0}$... tzv. integrační časová konstanta

Přechodová funkce: $h(t) = \frac{t}{T}$.

Příklady: Elektrický kondenzátor, závislost polohy hřídele na otáčkách pohonu, výška hladiny v nádrži s napouštěním a vypouštěním pomocí čerpadla (tedy rychlost výtoku nezávisí na výšce hladiny, ale na řídicí veličině), ohřev kapaliny bez tepelných ztrát do okolí.

Uvažujme systém s přenosem $\frac{1}{s}$. Na obrázcích níže je přechodová funkce, frekvenční charakteristika v komplexní rovině, amplitudová a fázová charakteristika.



Soustava druhého řádu

Rovnice: $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = b_0u$

$$\text{Přenos: } F(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1s + a_0} = K \frac{1}{\alpha_2s^2 + \alpha_1s + 1}$$

kde $K = \frac{b_0}{a_0}$ je statické zesílení.

Existují tři varianty přenosu podle toho, jestli dvojiteln $\alpha_2s^2 + \alpha_1s + \alpha_0$ má reálné nebo komplexní kořeny:

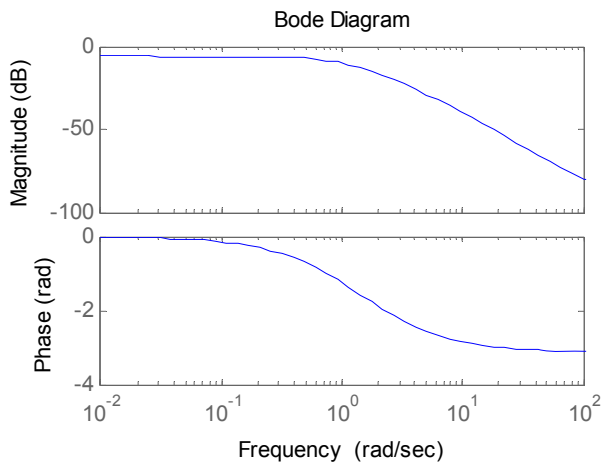
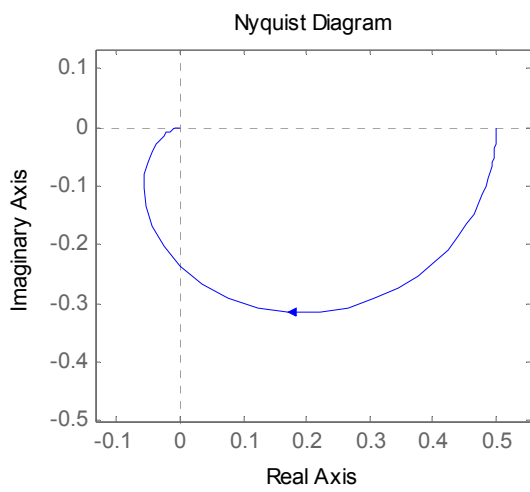
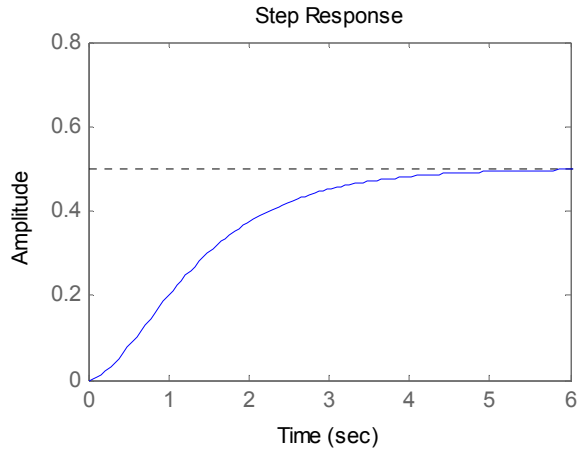
A) Dva reálné kořeny (aperiodický děj)

$$F(s) = K \frac{1}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

$$h(t) = K \left(1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$$

Vyskytuje se např. u tepelných soustav – výměníků.

Uvažujme systém s přenosem $\frac{1}{(s+1)(s+2)}$. Na obrázcích níže je přechodová funkce, frekvenční charakteristika v komplexní rovině, amplitudová a fázová charakteristika.



B) Jeden dvojitý reálný kořen (mezní aperiodický děj)

$$F(s) = K \frac{1}{(Ts + 1)^2}$$

$$h(t) = K \left(1 + e^{-\frac{t}{T}} + \frac{t}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

Ve srovnání s případem A má mezní aperiodický děj rychlejší náběh (budeme-li srovnávat děje pro stejný součet časových konstant $T_1 + T_2$).

Např. systém s přenosem $\frac{1}{(s+1)^2}$. Na obrázcích níže je přechodová funkce, frekvenční charakteristika v komplexní rovině, amplitudová a fázová charakteristika.

C) Obecný případ

Přenos lze upravit do tvaru $F(s) = K \frac{1}{T^2 s^2 + \xi 2Ts + 1}$

kde $\xi \geq 0$ je tzv. *součinitel poměrného tlumení* a T časová konstanta.

Pro $\xi = 0$ dostáváme netlumený děj s úhlovou frekvencí $\omega_0 = \frac{1}{T}$, zatímco pro $\xi = 1$ dostáváme mezní aperiodický děj (případ B). Úhlová frekvence ω_0 je označovaná jako *vlastní frekvence* soustavy. Pro $\xi > 1$ je průběh aperiodický (případ A). Součinitel ξ představuje určité vyjádření míry kmitavosti děje.

Jestliže $\xi < 0$, je děj nestabilní (amplituda s časem narůstá).

Přechodová funkce:

$$h(t) = K \left[1 - e^{-\alpha t} \left(\cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right) \right]$$

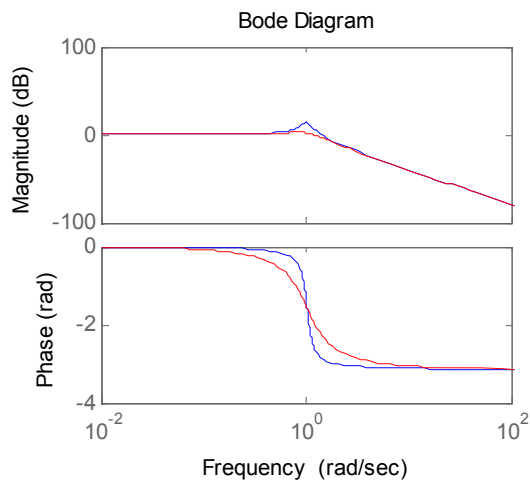
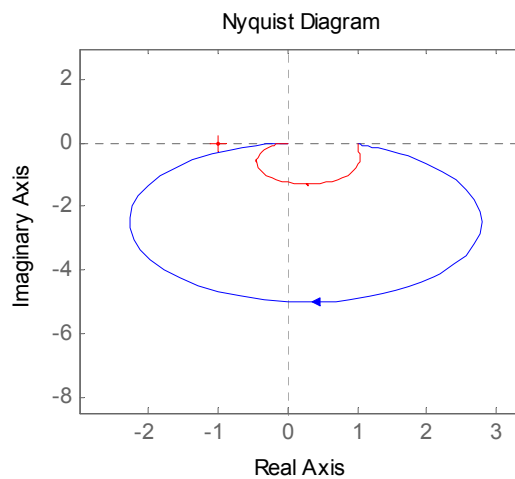
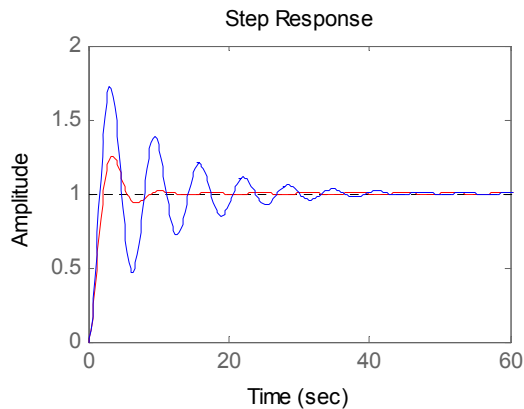
kde $\omega = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$, $\alpha = \frac{\xi}{T}$.

Pro $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ má amplitudová charakteristika maximum v bodě $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1-2\xi^2}$ (tzv. *rezonační frekvence*). Pro $\xi = 0$ je $A(\omega_r) \rightarrow \infty$.

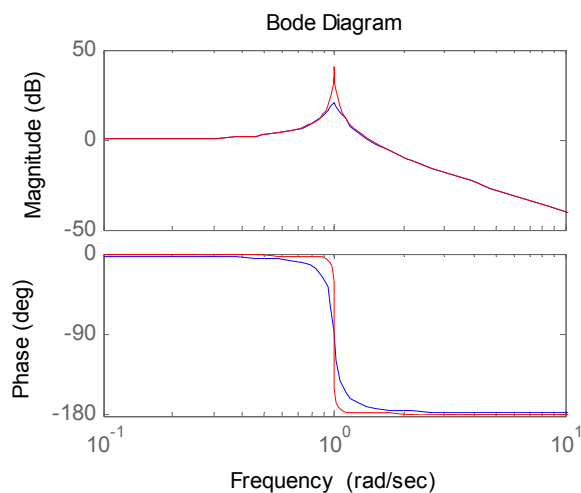
To znamená, že jestliže budíme systém harmonickými kmity s frekvencí blízkou ω_r , i velmi malá amplituda vstupní veličiny může po určité době působení vyvolat velkou amplitudu na výstupu – proto je nutné navrhovat soustavy (zejména např. mechanické) tak, aby jejich rezonanční frekvence byla dostatečně vzdálená od předpokládaných významných frekvenčních složek působících veličin.

Jiný příklad: elektrická soustava RLC. Obecně se jedná o systémy, kde dochází k výměně mezi dvěma druhy energie. S komplexními kořeny se rovněž setkáváme u složených soustav při zavedení zpětné vazby (viz příklad níže).

Uvažujme soustavu $F(s) = \frac{1}{s^2 + \xi 2s + 1}$ pro $\xi = 0.2$, $\xi = 0.8$. Na obrázcích níže jsou přechodové funkce, frekvenční charakteristiky v komplexní rovině a logaritmické frekvenční charakteristiky.

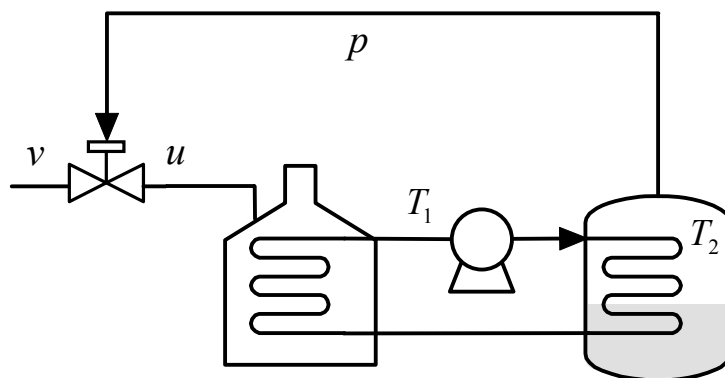


Na obrázcích jsou ještě pro srovnání samotné logaritmické frekvenční charakteristiky pro $\xi = 0.1$, a $\xi = 0.01$. Pro



Příklad složené soustavy druhého řádu

Uvažujme následující příklad technologického subsystému.



Kotel ohřívá cirkulující kapalně médium, které se dále využívá k udržování obsahu reaktoru na žádané hodnotě. V reaktoru je plynná složka o tlaku, který je závislý na teplotě. Soustava je řízena přívodem paliva do kotle u . Pro omezení nárůstu teploty a tlaku je zavedena zpětná vazba tak, že rostoucí tlak v reaktoru přiškrcuje ventil pro přívod paliva. Předpokládáme, že přívod paliva do kotle je tedy popsán vztahem

$$u = v - K_p \cdot p$$

kde K_p je nějaká konstanta a p je přetlak (předpokládá se, že je vždy $K_p \cdot p \leq v$).

Uvažujme, že ohřev média i ohřev reaktoru jsou popsány lineárními diferenciálními rovnicemi 1. řádu (zanedbává se tepelná kapacita potrubí a stěn a předpokládá se, že médium proudí dostatečně rychle). Abychom zjednodušili popis dynamiky soustav, budeme všechny veličiny uvažovat relativně vzhledem k absolutní teplotě a tlaku okolí (T_0, p_0) , tj. $\mathcal{G} = T - T_0$, $p = p_{abs} - p_0$.

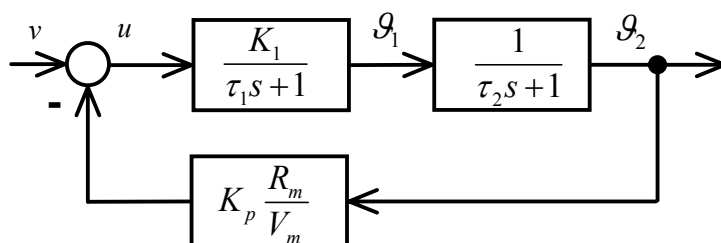
První dynamická soustava, která odpovídá vývoji teploty média v závislosti na vstupu u s tepelnými ztrátami do okolí, je popsána přenosem $F_1(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1}$, kde τ_1 je nějaká časová konstanta a K_1 zesílení.

Druhá soustava reprezentuje ohřev obsahu reaktoru a je popsána přenosem

$F_2(s) = \frac{1}{\tau_2 s + 1}$ (zde je zesílení rovno 1, protože ustálená hodnota teploty v reaktoru je rovna teplotě média – předpokládáme nulové ztráty do okolí).

Přetlak v reaktoru je dán stavovou rovnicí, kdy místo absolutních veličin dosadíme odchylky: $p = \frac{R_m}{V_m} \mathcal{G}_2$, kde R_m je molární plynová konstanta a V_m molární objem plynu v nádobě.

Blokové schéma soustavy je obrázku níže.



Přenos složené soustavy je

$$F_{\mathcal{G}_2, v} = \frac{\frac{K_1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}}{1 + K_p \frac{R_m}{V_m} \frac{K_1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}} = \frac{K_1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) + K_1 K_p \frac{R_m}{V_m}}$$

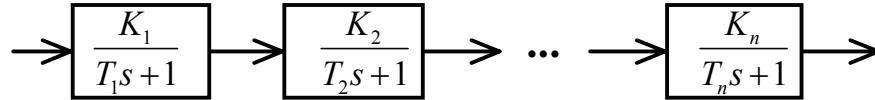
Výsledný systém je druhého řádu. Záleží na členu $K_1 K_p \frac{nR}{V}$, jestli jsou kořeny jmenovatele reálné nebo komplexní.

V případě, že není zavedena zpětná vazba, takže $u = v$, jedná se rovněž o soustavu druhého řádu, ale pouze s reálnými kořeny:

$$F_{\mathcal{G}_2, v} = \frac{K_1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}.$$

Soustavy vyššího řádu

Soustavu vyššího řádu získáme jakýmkoliv spojením dynamických soustav nižších řádů. Nejjednodušší případ nastane sériovým spojením, kdy výstup jedné elementární soustavy je vstupem jiné. Např. sériovým spojením statických soustav prvního řádu dostáváme statickou soustavu:



$$F(s) = \frac{K_1 K_2 \dots K_N}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_n s + 1)} = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}.$$

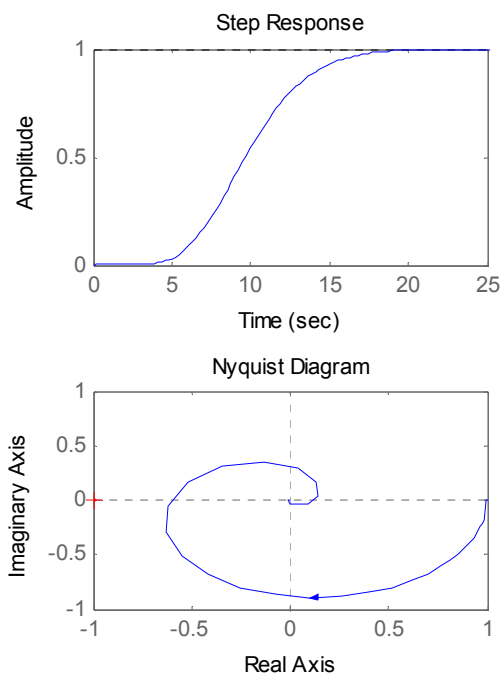
Přechodová funkce je (v případě různých reálných kořenů)

$$h(t) = \frac{b_0}{a_0} + \sum_{i=1}^n A_i e^{-s_i t}$$

kde s_i jsou kořeny charakteristického polynomu a A_i nějaké koeficienty.

Vysoký řád soustavy se projeví opožděnou reakcí na skokovou změnu vstupu.

Na obrázcích níže je přechodová funkce a frekvenční charakteristika soustavy s přenosem $\frac{1}{(s+1)^{10}}$. Chování této soustavy již připomíná systém s dopravním zpožděním.



Soustava s dopravním zpožděním

U některých technických systémů z důvodu délky přenosové cesty působí akční veličina na soustavu s určitým zpožděním. Pak se jedná o tzv. systém s *dopravním zpožděním*. Např. pro lineární soustavu

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = b_0u(t - \tau)$$

je $\tau \geq 0$ dopravní zpoždění.

Vyskytuje se často u hydraulických a tepelných systémů, kde dochází k vedení media potrubím. Jestliže vzdálenost regulačního členu (ventilu) od vstupu do soustavy je d , pak při rychlosti proudění v vzniká dopravní zpoždění $\tau = d / v$.

$$\text{Přenos: } F(s) = \frac{b_0 e^{-\tau s}}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} .$$

Odpovídající přechodová funkce je (v případě různých reálných kořenů)

$$h(t) = \frac{b_0}{a_0} + \sum_{i=1}^n A_i e^{-s_i(t-\tau)} \quad \text{pro } t \geq \tau$$

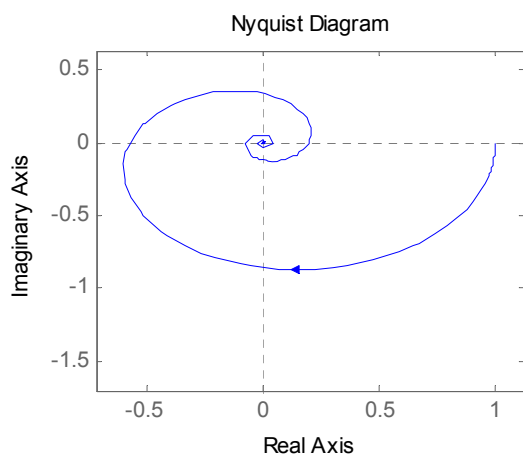
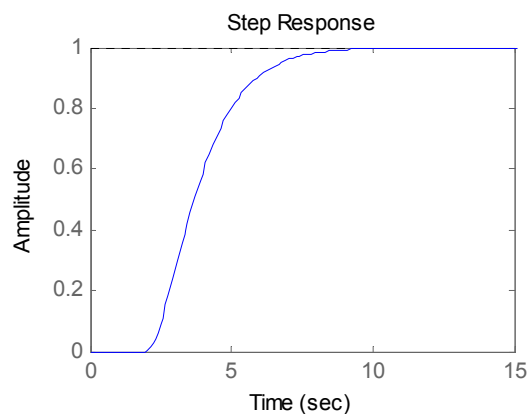
kde s_i jsou kořeny charakteristického polynomu a A_i nějaké koeficienty.

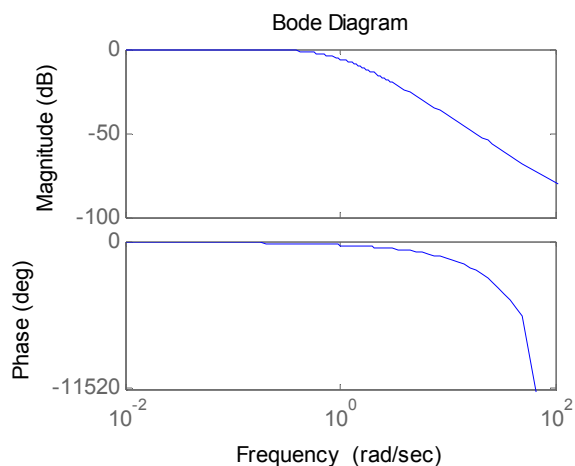
Samotné dopravní zpoždění má frekvenční přenos $e^{-i\omega\tau}$ a má tedy ten efekt, že způsobí pootočení bodu frekvenční charakteristiky soustavy bez zpoždění o úhel $\tau \cdot \omega$

ve záporném směru. Frekvenční charakteristika samotného dopravního zpoždění je kružnice o poloměru 1 se středem v 0. Amplituda členu $e^{-i\omega\tau}$ je konstantní a fázový posun se blíží $-\infty$ pro $\omega \rightarrow \infty$.

V řadě praktických případů model obsahuje více členů se zpožděním. Zpoždění se mohou vyskytovat i u členů na levé straně diferenciální rovnice.

Např. uvažujme systém s přenosem $\frac{e^{-2s}}{(s+1)^2}$. Na obrázcích níže je přechodová funkce, frekvenční charakteristika v komplexní rovině, amplitudová a fázová charakteristika.



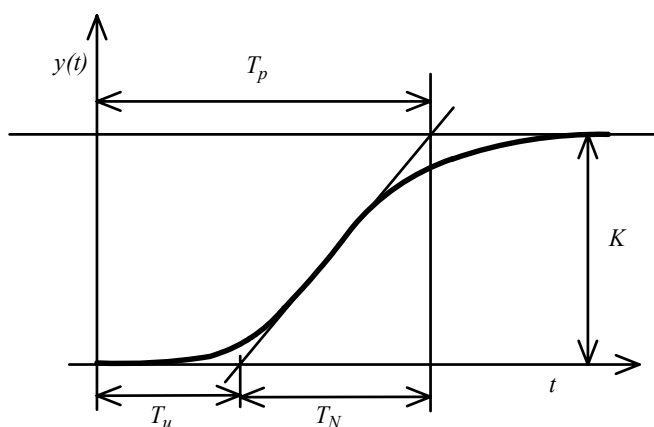


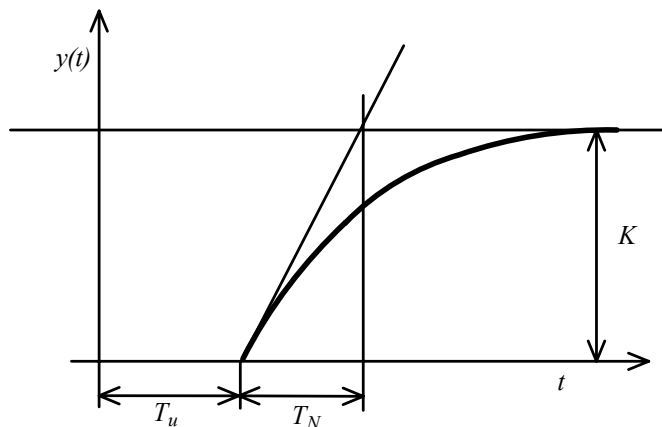
Náhrada soustavy vyššího řádu soustavou s dopravním zpožděním

Dopravní zpoždění se naopak často uměle zavádí pro nahrazení statické soustavy vyššího řádu s reálnými kořeny soustavou 1. řádu. Tento model se využívá např. pro nastavení parametrů regulátoru.

Pro nahrazení modelu soustavy je třeba na přechodové charakteristice vymezit následující časové úseky:

- T_u ... tzv. doba průtahu
- T_N ... tzv. doba náběhu
- T_p ... tzv. doba přechodu





Přímka, která úseky definuje, se volí jako tečna v inflexním bodě přechodové funkce.

Potom platí:

$$F(s) = \frac{K}{(T_1s + 1) \dots (T_ns + 1)} \approx K \frac{e^{-T_us}}{T_Ns + 1}.$$

Ukazuje se však, že u soustav vyšších řádů je při stejném T_N doba ustálení zpravidla podstatně menší, než by odpovídalo soustavě prvního řádu (průběh je v okolí inflexního bodu plošší).

Proto lepší aproximace je možné např. dosáhnout, pokud časovou konstantu T zvolíme tak, že v čase $T - T_u$ soustava dosáhne 63% své ustálené hodnoty (63% ustálené hodnoty odpovídá časové konstantě soustavy prvního řádu).

11. Automatická regulace

Problém udržování parametrů procesu na požadovaných hodnotách (konstantních nebo měnících v čase definovaným způsobem).

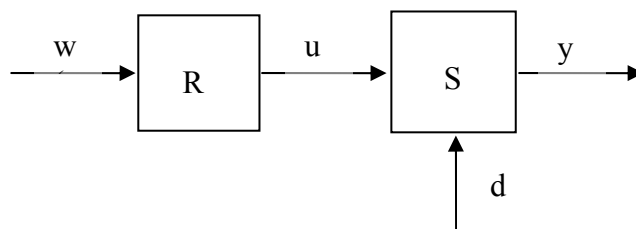
Obvody řízení:

- Otevřené
 - k řízení je využita pouze apriorní informace o procesu a nekontroluje se skutečný stav řízeného systému
= tzv. ovládání
- Uzavřené
 - využívá rovněž aktuální informaci o procesu
= zpětnovazební řízení

Otevřené řízení

Lze použít pouze pokud vnější vlivy jsou konstantní nebo se mění podle známého průběhu.

Např. je předem známo, že aby bylo dosaženo požadované teploty T v nádobě, je třeba na ohřívač připojit určité konstantní napětí u_T .

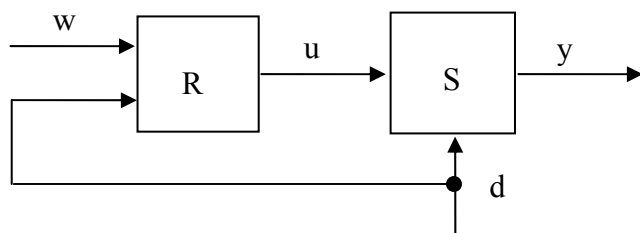


- R ... řídicí systém
- S ... řízený systém
- w ... požadovaný průběh výstupu
- u ... řídicí veličina, výstup řídicího systému
- y ... výstupní veličina, výsledek činnosti
- d ... vnější vlivy (poruchová veličina)

Šipky ve schematu odpovídají působícím vstupním, poruchovým a výstupním veličinám. Jelikož vzájemné působení lze chápat rovněž jako přenos informace (zejména pokud dochází k převodu veličin), jsou tyto vazby často označovány jako *signály*.

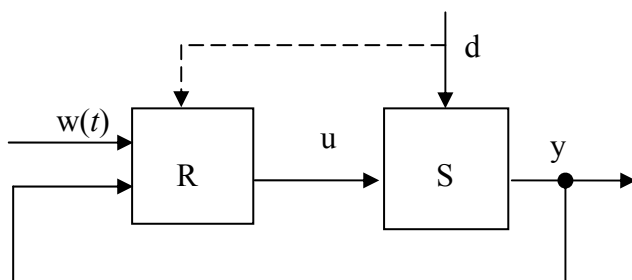
V případě významných poruch lze schéma rozšířit o měření poruch

- Pro dosažení žádané hodnoty výstupu je ale třeba přesná znalost kompenzace poruchy, což v praxi většinou není k dispozici



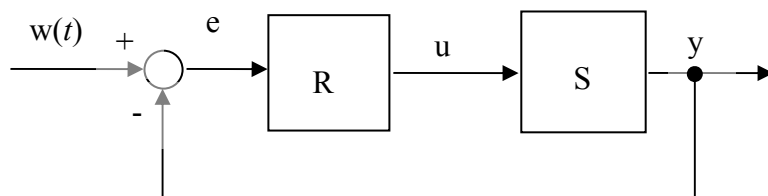
Zpětnovazební řízení

- Využívá aktuální informaci o procesu
- Umožňuje dosáhnout požadovaného průběhu výstupní veličiny i bez přesné znalosti poruchy a parametrů systému
- Lze rovněž vylepšit měřením poruchy a její částečnou kompenzací



$w(t)$ zde představuje požadovaný průběh výstupní veličiny.

Místo hodnoty výstupu y často do řídicího systému R vstupuje rozdíl požadované a skutečné hodnoty výstupu e , tzv. *regulační odchylka* $e=w-y$



V praxi nejčastější je úloha udržování výstupu procesu na stanovené hodnotě bez ohledu na vnější vlivy (poruchy), tj. $w(t)=\text{konst.}$

Řídicí systém pro udržování hodnoty výstupní veličiny systému = *regulátor*.

Technická realizace regulačních obvodů

Rozdělení regulačních obvodů:

- Bez převodu veličin
 - regulátor pracuje přímo se stejnou veličinou jako systém
 - např. mechanické regulační obvody (Wattův regulátor otáček parního stroje)
 - dnes už výjimečně
- S převodem veličin
 - dnes nejčastěji – typicky elektronické regulátory

Pro realizaci regulačních obvodů je možné použít různé prostředky:

- Mechanické
 - např. Wattův regulátor otáček nebo bimetalový termostat
- Hydraulické a pneumatické
 - stále se využívají - např. ve výbušném prostředí, popř. tam, kde vychází levněji
 - hydraulické pohony mají nejlepší poměr cena/výkon
- Elektronické
 - dnes nejběžnější

Elektronické řídicí systémy

- Analogové
 - hlavně jako analogové regulátory
- Číslicové
 - kompaktní číslicové regulátory
 - specializované počítače
 - v současné době nahrazují analogové regulátory
- Průmyslové počítače
 - pro složitější systémy, pro víceúrovňové řízení

Analogový elektronický regulační obvod

- Pracuje s veličinami v elektronické podobě
- Vyžaduje převod veličin na straně výstupu a na straně vstupu do systému:

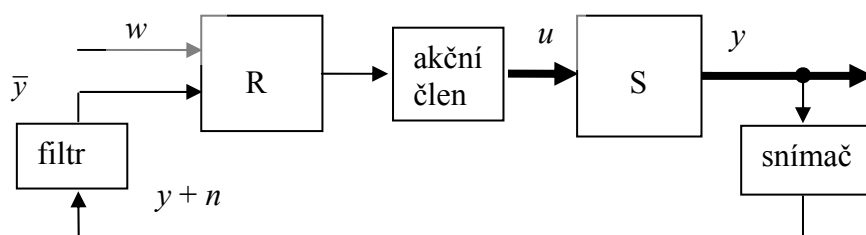
- na straně výstupu systému = snímač (např. teploty, otáček) – dává informaci o aktuální hodnotě v podobě napěťového, popř. proudového signálu
 - proudové signály jsou v praxi výhodnější, protože jsou odolné proti rušení.
- na straně vstupu = akční člen (např. pohon, regulační ventil)
 - provádí převod elektronického signálu na příslušnou akční veličinu (např. napětí – otáčky, napětí – průtok ventilem)

Při přenosu veličiny y k řídicímu systému dochází ke zkreslení způsobenému rušivými vlivy. To může mít velký vliv na činnost regulátoru.

Většinou se uvažuje aditivní šum – náhodná veličina n s nulovou střední hodnotou, která se přičítá k y . Proto před vstupem y do regulátoru R je většinou filtr, který potlačí náhodnou složku n . Jako filtr může složit lineární dynamický systém s vhodně nastavenými časovými konstantami, který tlumí vysoké frekvence, popř. určité známé pásmo frekvencí, ve kterém se uplatňují rušivé složky.

V současné době se analogové regulátory využívají většinou jen ve dvou případech:

- velmi jednoduché aplikace, kdy vychází jako cenově výhodnější
- řízení velmi rychlých procesů (např. u mechanických systémů)



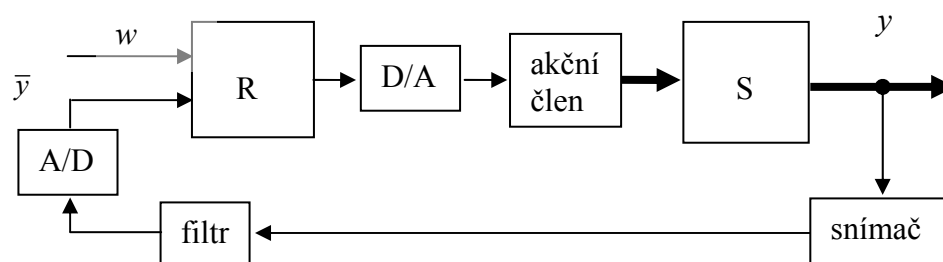
Nevýhodou analogových regulátorů je určitá odlišnost reálného chování od teoretického a omezená variabilita parametrů.

Číslicový regulační obvod

Řídicí počítač (číslicový regulátor) v pravidelných intervalech vzorkuje (tj. snímá hodnoty) výstupní veličiny, určuje akční zásah a výsledek přivádí na vstup systému. Regulátor tedy pracuje s posloupností hodnot.

Jelikož komunikace regulátoru s okolím probíhá přes celočíselné rozhraní, je třeba provádět převod vstupních a výstupních veličin na spojité hodnoty. Ten je realizován pomocí elektronických obvodů - tzv. A/D a D/A převodníků (analogově-číslicový a číslicově-analogový).

Převod probíhá s omezenou přesností. Hodnoty veličin jsou zkreslené tzv. kvantizační chybou (nepřímě úměrná počtu bitů pro vyjádření hodnot veličin).

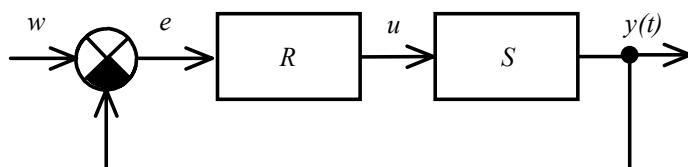


Návrh parametrů číslicového regulátoru může při dostatečně malé vzorkovací periodě vzhledem k časovým konstantám systému vycházet z analogového případu, což lze chápat jako aproximace. Skutečné vlastnosti takového regulátoru pak ale mohou být horší než u teoreticky určeného.

12. Části regulačního obvodu

Nejběžnější typy regulátorů jsou následující:

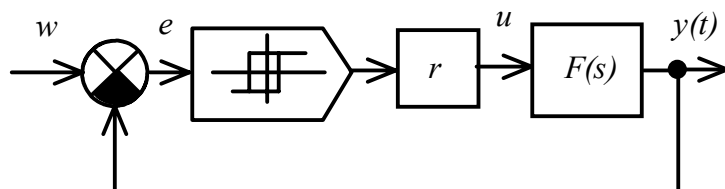
- Spojité
 - PID regulátor a jeho zjednodušené varianty:
 - P, I, PI, PD



- Nespojité
 - dvoupolohové
 - třípolohové

Nespojitě regulátory

Využívají se pro realizaci nejjednodušších a nejlevnějších regulačních obvodů.



Praktická realizace vyžaduje komparační obvod a spínací prvek (např. relé nebo výkonový tranzistor)

Dvoupolohový regulátor

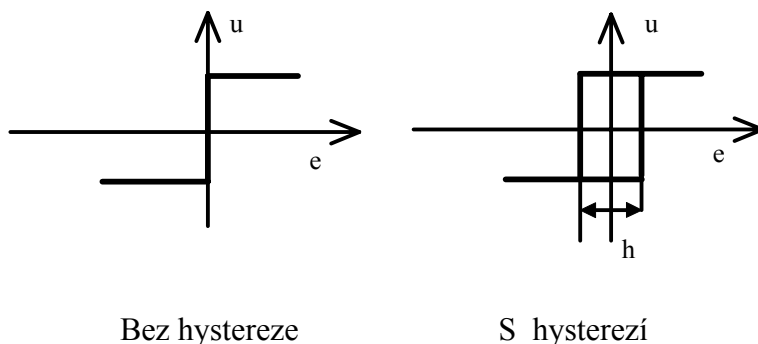
Na základě porovnání s žádanou hodnotou relé spíná kladnou nebo zápornou hodnotu akční veličiny (např. příkon topného tělesa).

Často se používá i v případech, kdy akční veličina může mít pouze kladnou hodnotu

- to je ale možné pouze u statických soustav (jinak by nebylo možné způsobit zápornou změnu hodnoty výstupu).

Typické využití je pro jednoduchou regulaci teploty při ohřevu nebo pro regulaci výšky hladiny.

Jelikož relé pracuje zpravidla s velmi malým zpožděním, docházelo by u soustav prvního řádu velmi rychle ke spínání zdroje a opotřebení relé (u moderních výkonových tranzistorů tento problém odpadá). Proto se často zavádí umělá hystereze, která zabraňuje rychlému spínání:

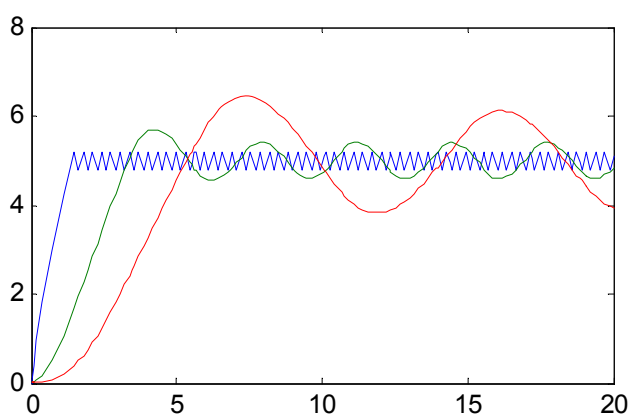


Platí, že čím větší hystereze h , tím větší rozkmit regulované veličiny a tím menší frekvence spínání, tj. hystereze zvyšuje nepřesnost

- většinou se hystereze nastavuje v řádu několika procent rozsahu regulované veličiny.

U soustav vyšších řádů, případně s dopravním zpožděním, však může být rozkmit výstupní veličiny mnohem větší než by odpovídalo hysterezi, protože soustava reaguje na přepínání hodnoty řízení se setrvačností.

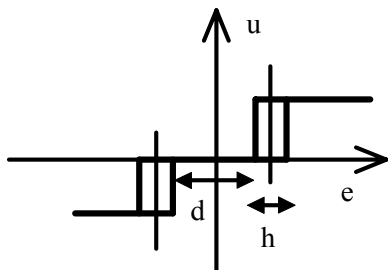
Na obr. níže jsou průběhy regulace pomocí dvoupolohového regulátoru s hysterezí $h = 0.4$ a zesílením $r = 10$ pro soustavy $\frac{1}{(2s+1)^k}$, kde $k = 1$ (modrá), $k = 2$ (zelená) a $k = 3$ (červená). Žádaná hodnota je $w = 5$.



Třípolohový regulátor

Na rozdíl od předchozího se využívá tam, kde je možné spínat kladnou i zápornou hodnotu akční veličiny (např. ohřev + chlazení)

- Lze využít i u astatických soustav (např. řízení polohy stroje, kde řídicí veličinou jsou otáčky pohonu)



Charakteristika třípolohového regulátoru s hysterezí

V rozsahu $|e| < d$ je hodnota výstupu u nulová

- d je tzv. *pásmo necitlivosti*

PID regulátor

Ačkoliv se nejedná o jedinou možnost, v praxi se nejčastěji využívá variant PID regulátoru, který akční zásah vyhodnocuje na základě regulační odchylky $e = w - y$ a jejího integrálu, případně i derivace. Výhodou jsou:

- jednoduchost
- univerzálnost
- snadná realizovatelnost elektronickými obvody

Tento přístup se osvědčil i pro regulaci složitých nelineárních systémů, třebaže v tomto případě kvalita výsledných regulačních průběhů není zaručena.

Obecný tvar PID regulátoru:

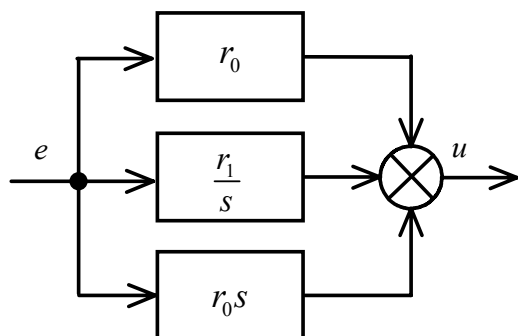
$$u(t) = r_0 e(t) + r_1 \int_0^t e(t) dt + r_2 \dot{e}(t)$$

kde r_i jsou parametry, tj. regulátor obsahuje 3 složky:

- proporcionální (P)
- integrační (I)
- derivační (D)

Přenos regulátoru:

$$R(s) = r_0 + r_1 \frac{1}{s} + r_2 s$$



Speciální případy:

$r_1 = r_2 = 0$... P-regulátor (pouze zesílená záporná zpětná vazba)

$r_1 = 0$... PD-regulátor (přidaná derivační složka)

$r_2 = 0$... PI-regulátor (přidaná integrační složka)

$r_0 = r_2 = 0$... I-regulátor (samotná integrační složka)

Případ $r_0 = r_1 = 0$ se nevyužívá (nerealizuje zpětnou vazbu)

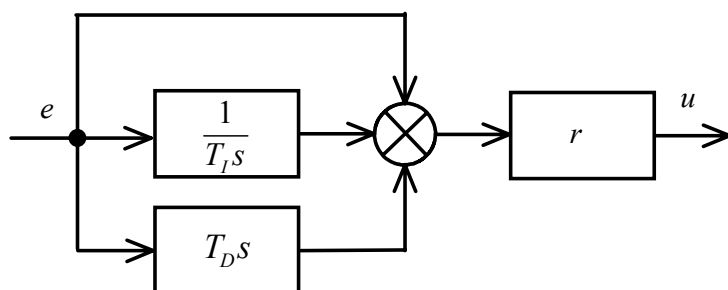
V praxi se většinou pracuje s tvarem:

$$u(t) = r \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt + T_D \dot{e}(t) \right]$$

který je jednodušší pro praktickou realizaci. T_I a T_D jsou integrační a derivační časová konstanta.

Přenos regulátoru je v tomto případě:

$$R(s) = r \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (13)$$



Pozn.: Např. P-regulátor v tomto případě získáme položením $T_D = 0$ a $T_I \rightarrow \infty$.

Místo zesílení r se používá též pojem *Pásmo proporcionality* $\delta = \frac{1}{r} \cdot 100$ [%], které má význam poměru rozsahu hodnoty regulační odchylky a výstupu.

Význam složek PID regulátoru

P-složka

Zesílení záporné zpětné vazby. Čím větší zesílení, tím je rychlejší regulační děj, ale pro příliš vysoké hodnoty je kmitavý a může být nestabilní (rozkmit výstupní hodnoty narůstá do nekonečna).

U statických soustav samotná P-složka vazba nezaručí dosažení žádané hodnoty, neboť pro nenulovou hodnotu výstupní veličiny je nutný nenulový výstup regulátoru, tedy nenulová regulační odchylka. Odchylka je tím menší, čím je větší zesílení r_0 .

I-složka

Umožňuje dosáhnout nulové regulační odchylky i pro statické soustavy. Integrovační složka ale zvyšuje řád a prodlužuje regulační děj.

Jestliže je přítomna integrační složka, regulátor obsahuje nulový pól, tj. je ve tvaru:

$$R(s) = \frac{P(s)}{s}.$$

Ustálená hodnota regulační odchylky pak je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} F_{ev}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{P(s)}{s} S(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s + P(s)S(s)} = 0.$$

U soustav s astatismem může být zřejmě integrační složka vynechána, protože nulový pól obsahuje už samotná soustava.

D-složka

Urychluje regulační pochod, zvláště u soustav vyšších řádů, popř. soustav s dopravním zpožděním, a pokud je přítomna i I-složka. Umožňuje zpětné vazbě reagovat s určitým předstihem. Např. jestliže $R(s) = s$, u soustavy 1. řádu jednotkový skok žádané hodnoty velikosti způsobí skokovou změnu výstupu:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{R(s)F(s)}{1 + R(s)F(s)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\frac{s}{Ts+1}}{1 + \frac{s}{Ts+1}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{(Ts+1) + s} = \frac{1}{T+1}$$

Derivační člen je ale idealizovaný a nejde přímo prakticky realizovat, protože jeho amplitudová charakteristika $A(\omega) \rightarrow \infty$ pro $\omega \rightarrow \infty$, a proto u praktické implementace nutně musí dojít ke zkreslení (na rozdíl od integrační složky, která naopak vyšší frekvence tlumí).

Nejběžnější praktická implementace derivační složky je založena na členu se setrvačností prvního řádu ve tvaru

$$\frac{T_D s}{\alpha T_D s + 1}$$

kde doporučovaná hodnota α je cca v rozsahu 0,05 – 0,2. Setrvačný člen je spíše výhodou, protože potlačuje vysoké frekvence, které často odpovídají rušivým složkám v signálu.

Číslicový PID regulátor

Při řízení počítačem se využívá tvaru regulátoru, který pracuje s posloupností hodnot.

Počítač v pravidelných intervalech vzorkuje (tj. snímá hodnoty) výstupní veličiny, určuje akční zásah a výsledek zapisuje do D/A převodníku, který převádí číslicovou informaci na analogovou hodnotu, která je přivedena na vstup systému.

Obvykle se předpokládá konstantní perioda vzorkování T a že doba zpracování výstupní veličiny i doba převodu na hodnotu akční veličiny jsou zanedbatelně malé.

Operátory derivace a integrace je možné přibližně nahradit diferencí a sumací.

Pro PID regulátor

$$u(t) = r \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt + T_D \dot{e}(t) \right]$$

náhradou času t za diskrétní krok $k = 0, 1, 2, \dots$ dostáváme

$$u(k) = r \left[e(k) + \frac{T}{T_I} \sum_{j=0}^{k-1} e(j) + T_D \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \right].$$

Pro přesnější náhradu integrace je možné použít např. lichoběžníkovou metodu:

$$u(k) = r \left[e(k) + \frac{T}{2T_I} \sum_{j=0}^k (e(j-1) + e(j)) + T_D \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \right].$$

Často se pracuje s řízením v tzv. odchylkovém tvaru:

$$\begin{aligned}\Delta u(k) &= u(k) - u(k-1) = \\ &= r \left[\Delta e(k) + \frac{T}{T_I} e(k-1) + \frac{T_D}{T} (e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)) \right] = \\ &= r \left[\left(\frac{T_D}{T} + 1 \right) e(k) + \left(\frac{T}{T_I} - 2 \frac{T_D}{T} - 1 \right) e(k-1) + \frac{T_D}{T} e(k-2) \right]\end{aligned}$$

který neobsahuje sumaci. $\Delta u(k)$ a $\Delta e(k)$ vyjadřují přírůstky řízení a regulační odchylky od předchozího kroku. Nevýhoda odchylkového tvaru spočívá v tom, že dojde-li k ustálení regulační odchylky, tj. $e(k) = e(k-1) = e(k-2) = 0$, pak změna r se nijak neprojeví (výraz uvnitř závorky je nulový). Lepší je proto pracovat s původním tvarem, kdy se pro integrační složku zavede samostatná proměnná, ke které se přičítá v každém kroku $e(k)$, případně (u lichoběžníkové metody) $\frac{e(k) + e(k+1)}{2}$.

Akční členy a snímače

Regulační ventily

Pro průtok regulačním ventilem s lineární charakteristikou platí (v případě turbulentního proudění) vztah

$$Q = A_v \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}, \quad A_v = A_{v100} \cdot z$$

kde Δp je rozdíl tlaků před a za ventilem, $z \in \langle 0,1 \rangle$ je míra otevření ventilu, A_v je průtokový součinitel a A_{v100} je průtokový součinitel pro 100% otevření ventilu.

Zesílení akčního členu a snímače

Akční člen v ideálním případě provádí pouze lineární převod výstupní veličiny regulátoru na vstupní veličinu soustavy. Pak je možné definovat zesílení akčního prvku jako

$$K = \frac{\Delta u}{\Delta v} \tag{14}$$

kde Δv je změna hodnoty výstupu regulátoru, popř. D/A převodníku, a Δu je odpovídající změna hodnoty vstupu soustavy.

Někdy má však akční člen nelineární závislost u na v . Pak vztah (14) se uvažuje v limitě pro $\Delta \rightarrow 0$ a má význam linearizovaného zesílení v pracovním bodě.

Např. jestliže změně výstupu regulátoru o +1 V odpovídá změna míry otevření o +5%, pak změna průtoku ventilem je (viz výše)

$$\Delta Q = 5\% \cdot A_{v100} \cdot \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}.$$

Zesílení ventilu je tedy

$$K_v = \frac{\Delta Q}{\Delta p} = 0.05 A_{v100} \cdot \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}} \quad [m^3 \cdot s^{-1} \cdot V^{-1}].$$

V obou těchto případech se však předpokládá, že rozdíl tlaků Δp před a za ventilem je konstantní a nezávisí na průtoku Q , což není vždy splněno (připojené potrubí má např. svůj hydraulický odpor, který zpětně ovlivňuje průtok ventilem).

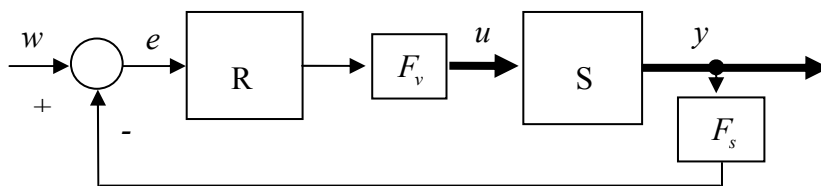
Dynamika akčního členu a snímače

V řadě praktických případů má akční člen svoji vlastní dynamiku. Např. pneumatický regulační ventil se často nahrazuje lineární soustavou prvního řádu se přenosem

$$F_v(s) = \frac{K_v}{\tau_v s + 1}.$$

Většinou je časová konstanta τ_v alespoň o 2 řády menší než jsou časové konstanty řízeného systému. Pak je možné dynamiku ventilu zanedbat a pracovat pouze se statickým zesílením K_v .

Obdobně jako u akčních členů se pracuje se zesílením u snímačů. Při návrhu regulačního obvodu se zesílení, popř. přenos akčního členu a snímače zahrne do přenosu řízené soustavy.



Např. celkový přenos regulačního obvodu na obrázku výše je

$$F_{yw}(s) = \frac{R(s)F_v(s)S(s)}{1 + F_s(s)R(s)F_v(s)S(s)}$$

13. Stabilita dynamických systémů

Stabilita je jedním z nejdůležitějších pojmů v oblasti automatického řízení.

Systém se (zhruba řečeno) označuje jako stabilní, pokud pro omezenou velikost vstupní veličiny a \mathbf{x}_0 (stavu v čase $t = 0$) má omezenou velikost i vektor stavových veličin $\mathbf{x}(t)$ pro všechna $t > 0$.

Stabilita lineárních systémů

Chování autonomního lineárního systému (bez explicitního vstupu) je popsáno homogenní rovnicí

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = 0.$$

Rovnovážný stav je dán rovností $y^{(n-1)} = y^{(n-2)} = \dots = \dot{y} = 0$. Působící porucha způsobí změnu stavu, což odpovídá nenulové počáteční podmínce $y^{(n-1)}(0) = y_{n-1,0}, \dots, \dot{y}(0) = y_{1,0}$. Řešení rovnice má tvar

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}$$

kde λ_i jsou kořeny charakteristického mnohočlenu. Pro násobné kořeny je

v součtu výše $\sum_{j=1}^{n_i} C_{ij} t^j e^{\lambda_i t}$ místo každého členu pro násobný kořen.

Z tvaru řešení $y(t)$ přímo vyplývá:

- Pokud $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ pro všechna i , y_0 klesá k 0 z libovolného výchozího stavu \Rightarrow systém je stabilní.
 - pozn.: u komplexních kořenů závisí na reálné složce, která odpovídá průběhu amplitudy
 - v případě násobných kořenů pro libovolné $k > 0$ a $\operatorname{Re} \lambda < 0$ lze dokázat, že platí $\lim_{t \rightarrow \infty} t^k e^{\lambda t} = 0$, takže faktor t^k na stabilitu nemá vliv.
- Pokud $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ pro některé i , y_0 z některého výchozího stavu narůstá nade všechny meze (popř. amplituda y_0) \Rightarrow systém je nestabilní.
- Pokud pro některá i je $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ a pro ostatní je $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, je regulační pochod stabilní v případě, že kořeny nejsou vícenásobné.
 - nulový kořen odpovídá konstantě a čistě imaginární kořeny odpovídají periodickým průběhům $A \cos \omega t + B \sin \omega t$

- v případě vícenásobných kořenů takových, že $\text{Re } \lambda_i = 0$ však amplituda výstupu narůstá a systém je tedy nestabilní

Uvažujeme-li systém se vstupem, řešení se skládá ze složek stejných jako v případě autonomního systému a složek odpovídajících vstupní veličině. Odtud vyplývá, že neautonomní systém je stabilní, jestliže všechny kořeny charakteristického mnohočlenu leží uvnitř levé části komplexní roviny. Charakteristický mnohočlen je roven jmenovateli přenosu.

Pozn.: Obdobně jako u autonomního systému může v případě některých kořenů takových, že $\text{Re } \lambda_i = 0$, nastat situace, kdy hodnota výstupu bude pro určitý omezený průběh vstupní veličiny narůstat do nekonečna (pokud jmenovatel obrazu řešení má násobné kořeny) – avšak zde to může nastat i v případě, kdy kořeny jmenovatele přenosu nejsou násobné, protože násobný pól může vzniknout vlivem vstupní funkce.

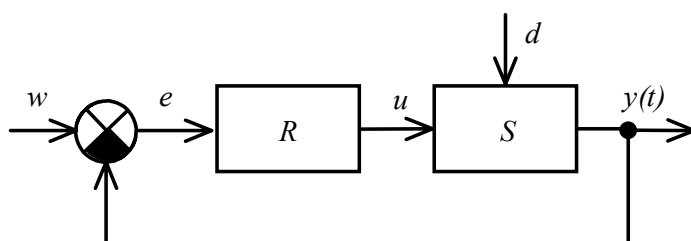
Předchozí výsledky lze shrnout do následujícího tvrzení:

Neautonomní lineární systém je stabilní právě tehdy, když všechny kořeny jeho charakteristického mnohočlenu leží uvnitř levé poloviny Gaussovy roviny, tj. v množině takových s , že $\text{Re } s < 0$.

Stabilita uzavřeného regulačního obvodu

V případě lineárního systému a lineárního regulátoru je uzavřený regulační obvod sám lineárním systémem, jehož vstupem jsou působící poruchy a řídicí veličina w .

Je možné se omezit na situaci, kdy $w = 0$, protože $w \neq 0$ lze převést na předchozí případ zavedením nové výstupní proměnné $z = y - w$. Díky principu superpozice je možné účinek jednotlivých vstupů posuzovat odděleně.



Při automatickém řízení může nastat situace, kdy systém je sám o sobě stabilní, ale po uzavření zpětné vazby se celý systém stává nestabilním a naopak.

Předpokládejme, že na systém působí např. skoková porucha d , která způsobí vychýlení z rovnovážného stavu. V principu jsou tři možné případy:

- Stabilní regulační pochod
 - po určité době dojde k ustálení výstupu
 - žádoucí chování

- Nestabilní regulační pochod
 - nedojde k ustálení a hodnoty výstupní veličiny narůstají nade všechny meze
 - nežádoucí chování
 - Pro reálné systémy ve skutečnosti i u nestabilního děje vždy dojde k omezení hodnoty výstupu vlivem fyzikálních mezí nebo nelinearit, které se více uplatňují pro větší hodnoty y . Takovéto průběhy jsou ale většinou rovněž nežádoucí
- Regulační pochod na mezi stability
 - hodnoty výstupní veličiny oscilují, ale amplituda kmitů se nezvětšuje ani nezmenšuje
 - pro lineární systémy ve skutečnosti přesně nikdy nenastává. U reálných systémů může vlivem nelinearit dojít k tomuto chování pro určitý rozsah parametrů zpětné vazby

Smyslem automatické regulace je v naprosté většině případů dosažení stabilního regulačního pochodu pro předpokládané typy poruch.

Pozn.: Ustálený výstup systému teoreticky ještě neznamená, že systém je stabilní, protože výstup nemusí zahrnovat všechny složky stavu (případ tzv. vnitřní nestability). Tato situace u reálných systémů ale většinou nenastává a není zde diskutována.

Pro vyšetření stability uzavřeného obvodu pracujeme s jeho charakteristickým polynomem (jmenovatelem přenosu). Přenos uzavřeného obvodu je (např. mezi regulační odchylkou a poruchou, která působí na výstupu):

$$F_{ed}(s) = \frac{-1}{1 + R(s)S(s)}$$

Charakteristický polynom je však stejný pro všechny uvažované typy vstupů (žádaná hodnota, porucha na vstupu nebo výstupu soustavy) – tyto případy se liší čitatelem přenosu, který na stabilitu nemá vliv.

Aby byl uzavřený obvod stabilní, musí tedy ležet všechny kořeny jmenovatele $F(s)$ uvnitř levé části Gaussovy roviny.

Algebraická kritéria vyšetření stability

Nevýhodou přímé metody vyšetření stability, založené na určení kořenů charakteristické rovnice, je nutnost řešení algebraické rovnice vyššího řádu, což je možné exaktně pouze pro řád $n \leq 4$ (pro vyšší n nutno numericky).

Naštěstí existuje řada metod, které umožňují rozhodnout o stabilitě bez nutnosti řešit charakteristickou rovnici. Význam těchto metod v současné době poněkud klesá,

protože pomocí moderních softwarových nástrojů není problém určit kořeny mnohočlenů libovolného řádu. Přesto jsou však důležité např. pro návrh regulátorů.

Hurwitzovo kritérium stability

Aby všechny kořeny charakteristického polynomu měly zápornou reálnou část, musí současně platit:

- Všechny koeficienty charakteristické rovnice musí být kladné a žádný z koeficientů a_n až a_0 nesmí být roven nule (pokud jsou všechny záporné, předpokládá se vynásobení -1).
- Všechny subdeterminanty příslušné prvkům na hlavní diagonále Hurwitzovy matice sestavené koeficientů charakteristické rovnice musí být kladné.

Pozn.: První podmínka okamžitě vyplývá z roznásobení výrazu $(s + s_1) \dots (s + s_n)$.

Hurwitzovu matici sestavíme tak, že koeficienty charakteristické rovnice rozdělíme na sudé a liché a píšeme posunutě do řádků pod sebou podle schématu:

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & a_2 & a_0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & a_3 & a_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & \dots & a_4 & a_2 & a_0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & a_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & \dots & & a_0 & \dots & \\ 0 & & \dots & & & & & \dots & \\ 0 & & \dots & & & & \dots & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

Poslední sloupec má všechny prvky nulové kromě posledního prvku a_0 .

Podmínky pro stabilitu jsou pak:

1. $a_i > 0, i = 1 \dots n$

2. $\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} > 0, \dots$ atd. až do subdeterminantu řádu $n-1$

Např. Hurwitzova matice pro autonomní systém $y^{(3)} + 3\ddot{y} + \dot{y} + 2y = 0$ má tvar:

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Všechna znaménka koeficientů jsou kladná a platí $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$, takže systém je stabilní.

Kritérium není vhodné pro vyšší řád rovnice ($n > 5$).

Pozn.: v případě $n = 2$ pro stabilitu zřejmě stačí, aby znaménka všech koeficientů byla kladná.

Oblast stability

Uvažujeme-li uzavřený regulační obvod, umožňuje Hurwitzovo kritérium sestavit snadno tzv. oblast stability pro parametry regulátoru, což patří k hlavním přednostem této metody.

Předpokládejme, že soustavu popsanou rovnicí $y^{(3)} + 3\ddot{y} + \dot{y} + 2y = u$ chceme regulovat PD-regulátorem $u = r_0 e + r_1 \dot{e}$. Máme určit oblast v rovině parametrů (r_0, r_1) , kdy je uzavřený obvod stabilní.

Přenos uzavřené soustavy vzhledem k poruše na výstupu je

$$F(s) = \frac{1}{1 + R(s)S(s)} = \frac{1}{1 + \frac{r_0 + r_1 s}{s^3 + 3s^2 + s + 2}} = \frac{s^3 + 3s^2 + s + 2}{s^3 + 3s^2 + (1 + r_1)s + (2 + r_0)}$$

Charakteristický polynom je $Q(s) = s^3 + 3s^2 + (1 + r_1)s + (2 + r_0)$.

Pozn.: Je rovněž možné postupovat tak, že v původní diferenciální rovnici dosadíme $u = -(r_0 y + r_1 \dot{y})$ (uvažujeme $w = 0$), což okamžitě dává odpovídající autonomní systém

$$y^{(3)} + 3\ddot{y} + (1 + r_1)\dot{y} + (2 + r_0)y = 0$$

se stejnou charakteristickou rovnicí.

Hurwitzova matice má tvar:

$$\begin{pmatrix} 3 & (2 + r_0) & 0 \\ 1 & (1 + r_1) & 0 \\ 0 & 3 & (2 + r_0) \end{pmatrix}$$

Pro stabilní průběh musí platit tyto podmínky:

$$2 + r_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad r_0 > -2$$

$$1 + r_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 > -1$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 + r_0 \\ 1 & 1 + r_1 \end{vmatrix} = 3(1 + r_1) - (2 + r_0) = 1 + 3r_1 - r_0 > 0, \quad \text{tj. } r_1 > \frac{r_0 - 1}{3}.$$

Tyto 3 nerovnosti definují v rovině parametrů (r_0, r_1) oblast, ve které je uzavřený obvod stabilní.

Frekvenční kritéria vyšetření stability

Umožňují vyšetřit stabilitu uzavřeného obvodu na základě frekvenční charakteristiky otevřené smyčky. Mohou být aplikována i pro systémy s dopravním zpožděním.

Označme přenos otevřené smyčky $F(s) = R(s)S(s)$.

Zjednodušené Nyquistovo kritérium

Předpokládejme, že přenos $F(s) = R(s)S(s)$ neobsahuje žádné póly v pravé polorovině (tj. řízený systém je stabilní).

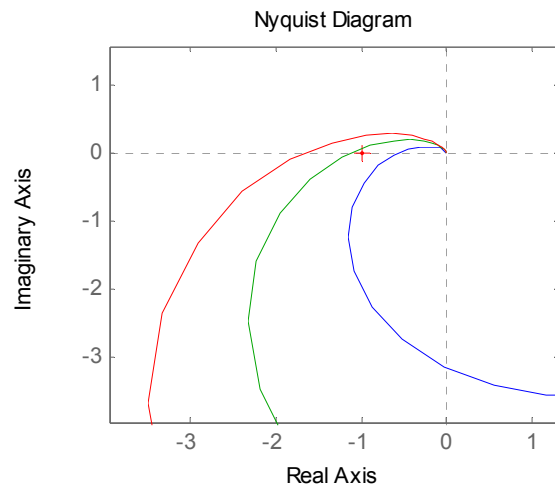
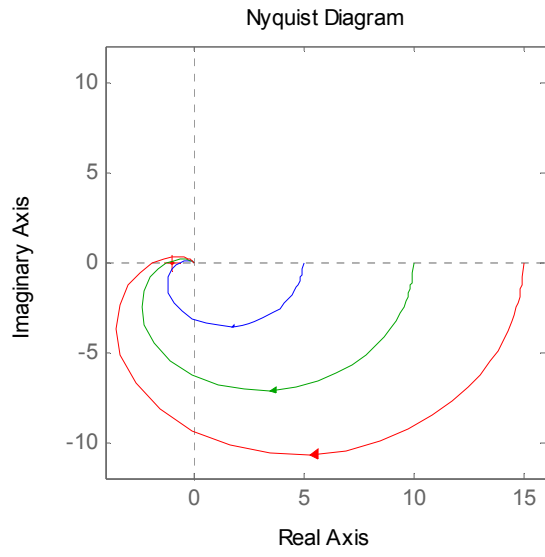
Uzavřený obvod je stabilní, jestliže průsečík frekvenční charakteristiky se zápornou reálnou poloosou leží vpravo od bodu $[-1, 0]$.

Zdůvodnění: Pro zvyšující se ω dochází k posuvu fáze. Označme ω_k takovou frekvenci, pro kterou je fázový posun -180° . Pokud při této frekvenci je zesílení otevřené smyčky větší než 1, dojde při každém průchodu harmonické složky s touto frekvencí smyčkou k jejímu zesílení a uzavřený obvod bude nestabilní.

Bod $[-1, 0]$ je označován jako kritický bod a ω_k jako kritická frekvence.

Např.: Pro přenos otevřené smyčky $r \frac{1}{(s+2)(s+1)^2}$ a hodnoty $r = 10$ (modrá křivka),

$r = 20$ a $r = 30$ jsou frekvenční charakteristiky na obr. níže v plné velikosti a v detailu. Uzavřený obvod je stabilní pouze pro $r = 10$, třebaže řízený systém je sám o sobě stabilní.



14. Nastavení parametrů PID regulátorů

Nastavení parametrů PID regulátoru je možno provést čistě empiricky např. na základě odezvy soustavy na jednotkový skok. Regulační pochod má mít většinou kmitavý, ale dosti tlumený průběh. Zcela aperiodický děj často není vhodný, protože se výstup ustálí na žádané hodnotě příliš pomalu.

Při empirickém nastavení parametrů zpravidla nejprve vyřadíme z činnosti integrační a derivační člen nastavením $T_I \rightarrow \infty$, $T_D = 0$ a hledáme optimální hodnotu proporcionální složky. Jako druhý se většinou nastavuje integrační člen (při změně integrační složky je třeba zpravidla zpětně korigovat i proporcionální člen).

K nejpoužívanějším postupům, které návrh regulátoru usnadňují, patří metoda Zieglera a Nicholse publikovaná již v roce 1942, popř. z ní odvozená metoda nastavení regulátoru na základě přechodové charakteristiky. Praktickou výhodou těchto metod je, že nevyžadují znalost přenosu.

Pokud je přenos soustavy znám, jsou k dispozici postupy, pomocí kterých je možné dosáhnout kvalitnějších regulačních průběhů. Tyto metody jsou však většinou rovněž komplikovanější, a proto se v praxi málo využívají. V současné době nabývá na praktickém významu např. metoda návrhu využívající geometrické rozložení pólů přenosu, protože jsou k dispozici grafické softwarové nástroje, které návrh tímto způsobem výrazně usnadňují.

Dále uvedené metody jsou použitelné pouze pro návrh PID regulátorů pro lineární systémy. Ačkoliv mnoho nelineárních systémů může být rovněž řízeno PID regulátory, není v tomto případě zaručeno, že existuje takové nastavení parametrů, které garantuje stabilizaci systému. Existují dva možné přístupy:

- Definovat několik pracovních bodů, ve kterých se systém považuje za lineární, a kterým odpovídá různé nastavení parametrů regulátoru (tzv. *gain scheduling*). Tuto funkci nabízí i některé PID regulátory, které jsou k dispozici na trhu.
- Empiricky nebo analyticky hledat takové nastavení regulátoru, které zaručuje stabilní chování v dostatečně širokém rozsahu možných pracovních stavů.

Kritéria nastavení parametrů regulačního obvodu

Správně navržený regulační obvod musí současně vyhovovat několika typům kritérií:

- přesnost regulace
- dostatečná rezerva ve stabilitě
- účinnost regulace
- robustnost

Přesnost regulace

V případě PID regulátoru je velikost trvalé regulační odchylky obecně dána zesílením regulátoru, počtem nulových pólů otevřeného obvodu a tvarem trajektorie $w(t)$.

Pro statické soustavy je integrační složka schopna zaručit nulovou regulační odchylku při regulaci na konstantní hodnotu $w = konst$.

U nespojitých regulátorů je regulační odchylka dána hysterezí a dynamikou soustavy (výstup osciluje okolo žádané hodnoty).

Dostatečná rezerva ve stabilitě

Parametry regulátoru musí být nastaveny tak, aby nemohlo dojít k nestabilitě. Možná kritéria jsou:

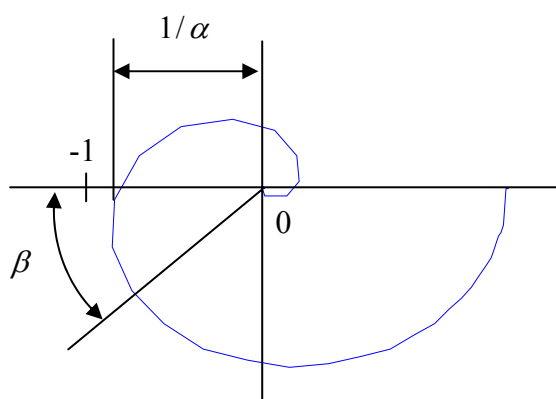
- póly uzavřeného regulačního obvodu jsou vlevo a dostatečně daleko od imaginární osy, tj. platí:

$$\operatorname{Re} \lambda_i < -\gamma, \quad \gamma > 0$$

- frekvenční charakteristika otevřeného obvodu prochází dostatečně daleko od kritického bodu $[-1, 0]$ (viz Nyquistovo kritérium stability)

Jestliže je třeba zesílení zvýšit α -krát, aby byl systém právě na mezi stability, pak α je tzv. amplitudová bezpečnost (doporučeno $\alpha > 2$).

Jestliže frekvenční charakteristika pro amplitudu 1 měla fázi $180^\circ - \beta$, pak β je tzv. fázová bezpečnost (doporučuje se $\beta > 60^\circ$).

Účinnost regulace

Posuzuje se schopnost:

- účinně kompenzovat působící poruchy

- rychle reagovat na změnu žádané hodnoty

Oběma těmito kritériím často nelze vyhovět současně. Regulační obvod nastavený pro rychlé vyrovnání poruch působících na výstupu často reaguje podstatně hůře při skokových změnách žádané hodnoty a naopak.

Existuje řada možností, jak posoudit účinnost regulace:

A) Podle tvaru odezvy, zpravidla přechodové funkce

Zde je možné posuzovat:

- rychlost náběhu (doba, kdy je poprvé dosaženo ustálené hodnoty)
- velikost překmitu (v % ustálené hodnoty – např. max. 5%)

B) Podle rozmístění kořenů v Gaussově rovině

Kromě rezervy ve stabilitě můžeme např. požadovat dostatečně vysoký součinitel relativního tlumení ξ kmitavých složek.

C) Podle integrálních kritérií v časové oblasti

Je možné hledat nastavení regulátoru, které při skokové změně minimalizuje vhodné integrální kritérium, např.

$$J = \int_0^{\infty} |y(t) - y_{\infty}| dt = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \rightarrow \min$$

kde $e(t)$ je regulační odchylka, nebo

$$J = \int_0^{\infty} |y(t) - y_{\infty}|^2 dt \rightarrow \min .$$

D) Podle tvaru frekvenční charakteristiky otevřeného obvodu

Kromě amplitudové a fázové bezpečnosti je možné požadovat např. co nejvyšší tlumení vysokých frekvencí a vysoké zesílení pro nízké frekvence (to odpovídá schopnosti regulátoru rychle reagovat).

E) Podle tvaru frekvenční charakteristiky uzavřeného obvodu

Z tvaru frekvenční charakteristiky uzavřeného obvodu je možné zjistit rozsah frekvencí poruch, které je regulátor schopen účinně tlumit.

Vrcholky frekvenční charakteristiky uzavřeného obvodu odpovídají frekvenčním složkám, které regulátor není schopen dobře kompenzovat. Proto je vhodné, aby frekvenční charakteristika uzavřeného obvodu byla co nejplošší.

Robustnost

Často je třeba brát v úvahu odchylky chování regulačního obvodu způsobené změnami nebo neznalostí některých parametrů.

Správně navržený regulační obvod by měl být dostatečně robustní vůči těmto změnám, tj. měl by zaručovat dostatečnou rezervu ve stabilitě a účinnosti regulace i při těchto neurčitostech.

Metody nevyžadující znalost přenosu

Metody nastavení parametrů PID regulátoru nevyžadující znalost přenosu soustavy jsou v praxi výhodné, protože přenos často není znám. Předností je rovněž jejich jednoduchost. Na druhé straně, získané výsledky nemusí být vždy kvalitní.

Metoda kritického zesílení (Ziegler-Nicholsova metoda)

Položíme integrační a derivační složku rovnou 0 a hledáme takové proporcionální zesílení r , že uzavřený obvod kmitá s ustálenou amplitudou. Příslušné zesílení se označuje jako r_k - kritické zesílení (frekvenční charakteristika prochází právě

kritickým bodem $[-1, 0]$). Označme periodu ustálených kmitů $T_k = \frac{2\pi}{\omega_k}$.

Z hodnot r_k a T_k jsou určeny doporučené hodnoty parametrů regulátoru:

Regulátor	r	T_I	T_D
P	$0,5 r_k$	-	-
PI	$0,45 r_k$	$0,85 T_k$	-
PD	$0,4 r_k$	-	$0,05 T_k$
PID	$0,6 r_k$	$0,5 T_k$	$0,125 T_k$

Konstanty byly určeny experimentálně z podmínky, aby amplituda regulační odchylky se v každé další periodě zredukovala na $\frac{1}{4}$. Toto pravidlo se v praxi ukázalo jako přibližně optimální pro účinné vyrovnaní poruchy. Na druhé straně však nemusí být vyhovující pro vyrovnaní skokové změny žádané hodnoty (v první půlperiodě dojde k 50% překmitu přes ustálenou hodnotu). Proto je v tomto případě zpravidla nutné zvolit poněkud menší r .

Pozn.: Metoda je určena především pro soustavy řádu $n \geq 3$. V případě soustavy 2. řádu lze určit pouze kritické zesílení (aplikací analytického postupu popsaného níže vyjde kritická frekvence nulová) a lze tedy určit pouze P-regulátor. Pro stabilní soustavu 1. řádu dokonce vyjde kritické zesílení záporné – zápornou zpětnou vazbou nelze tento systém destabilizovat.

Pokud je znám přenos soustavy, je možné tuto metodu využít k nastavení parametrů i bez experimentu - hodnoty r_k a T_k je možné určit analyticky.

Např. hledíme nastavení PID regulátoru pro soustavu

$$y^{(3)} + 3\ddot{y} + \dot{y} + 2y = u .$$

Uzavřením záporné zpětné vazby se zesílením r (tj. $u = -r \cdot y$) dostáváme autonomní systém popsaný rovnicí

$$y^{(3)} + 3\ddot{y} + \dot{y} + (2+r)y = 0 .$$

Úhlovou frekvenci kmitů na mezi stability určíme dosazením $y(t) = e^{i\omega t}$ do diferenciální rovnice, což je totéž jako dosazení $s = i\omega$ do charakteristické rovnice:

$$(i\omega)^3 + 3(i\omega)^2 + (i\omega) + (2+r) = 0$$

tj.

$$-i\omega^3 - 3\omega^2 + i\omega + (2+r) = 0 .$$

Oddělením reálné a imaginární části dostáváme 2 rovnice, které obě musí být splněny:

$$-3\omega^2 + (2+r) = 0$$

$$-\omega^3 + \omega = 0 .$$

Jediným kladným řešením druhé rovnice je $\omega_k = 1$. Kritická perioda je $T_k = 2\pi$.

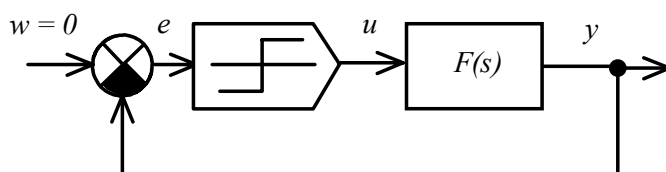
Z první rovnice dopočítáme $r = 1$.

Dosazením do tabulky získáme nastavení:

$$r_0 = 0.6, T_I = 3.14, T_D = 0.785 .$$

Praktické určení kritické frekvence a zesílení

Hledání kritické frekvence zkouškou změnou zesílení zpětné vazby často není v praxi pohodlné. Existuje však jednodušší přibližná metoda s využitím relé ve zpětné vazbě (dvupolohový regulátor bez hystereze).



Relé na základě znaménka regulační odchylky přepíná hodnoty $u = \pm M$. Takto zapojený obvod bude kmitat okolo žádané hodnoty $w = 0$ s amplitudou A . Na výstupu relé jsou periodické obdélníkové impulsy. Kritická frekvence je přibližně rovna frekvenci kmitů.

Je možné odvodit vztah pro přibližnou hodnotu kritického zesílení:

$$r_k = \frac{4M}{\pi A}.$$

Seřízení na základě přechodové charakteristiky regulované soustavy

Experimentální určení zesílení r_k může být u řady reálných systémů obtížně realizovatelné (v blízkosti kritického zesílení hrozí např. poškození systému).

Z Ziegler-Nicholsovy metody lze snadno odvodit přibližnou metodu pro učení parametrů regulátoru pomocí přechodové charakteristiky.

Definujme $\Theta = \frac{T_u}{T_n}$ je tzv. normalizované dopravní zpoždění.

Dosadíme-li $r_k = \frac{2}{K\Theta}$ do předchozí tabulky, dostáváme doporučené vztahy:

Regulátor	r	T_I	T_D
P	$1/(K\Theta)$	-	-
PI	$0,9/(K\Theta)$	$3T_u$	-
PID	$1,2/(K\Theta)$	$2T_u$	$0,5T_u$

Tato metoda je doporučena pro hodnoty normalizovaného zpoždění Θ zhruba v rozsahu 0.1–0.5.

Návrh na základě frekvenční charakteristiky

Základním požadavkem je dostatečná vzdálenost frekvenční charakteristiky otevřené smyčky od kritického bodu $[-1, 0]$ (tj. amplitudová a fázová bezpečnost). Většinou se však pracuje s amplitudovou a fázovou charakteristikou v logaritmických souřadnicích. Rozhodující je pak průsečík amplitudové charakteristiky s osou $20 \log A = 0$ a jemu odpovídající fázový posun.

Regulátor představuje kompenzační člen, který modifikuje charakteristiku soustavy tak, aby byly splněny požadavky na stabilitu a účinnost. Výhodou logaritmických souřadnic je, že amplitudové charakteristiky soustavy a regulátoru se sčítají, takže pomocí parametrů regulátoru lze výslednou charakteristiku snadno tvarovat.

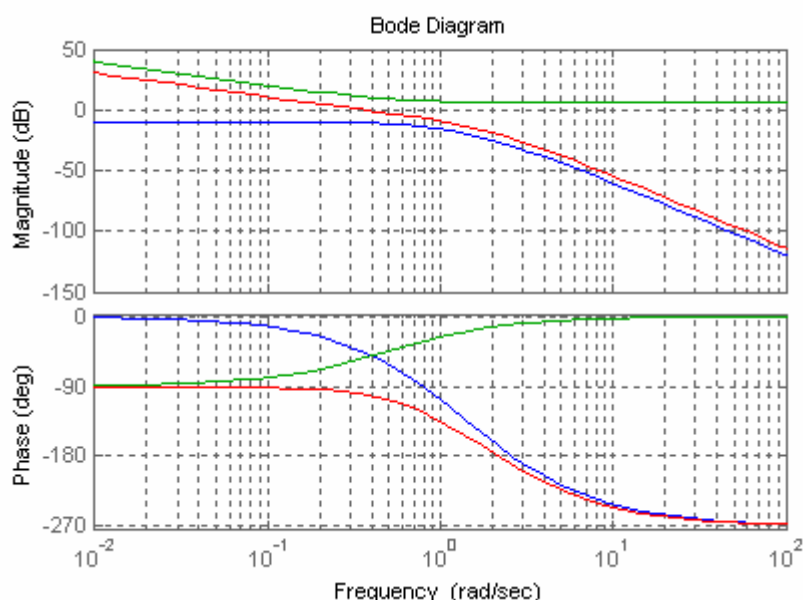
Kromě dostatečné amplitudové a fázové bezpečnosti se uvažují ještě dodatečné požadavky – např. aby bylo dostatečné tlumení vysokých frekvencí (potlačení šumu – alespoň 40dB/dek.) a aby amplitudová charakteristika v okolí průsečíku s osou $\log \omega$ - tj. okolo zesílení 1 - klesala pod úhlem cca 20dB na dekádu (oblast středních frekvencí). Nízké frekvence regulátor má naopak zesilovat – ty odpovídají schopnosti rychle reagovat na změnu žádané hodnoty.

Předností tohoto přístupu je, že ho lze použít i pro systémy s dopravním zpožděním.

Příklad: Na obrázku níže jsou frekvenční charakteristiky systému s přenosem

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+3)} \quad (\text{modrá křivka}) \quad \text{a PI-regulátoru s přenosem } R(s) = 2 \left(1 + \frac{1}{2s} \right)$$

(zelená křivka). Součet obou křivek (červená křivka) je frekvenční charakteristikou otevřeného regulačního obvodu.



Fázová bezpečnost je cca 80° a amplitudová bezpečnost cca 20 dB, tj. $\alpha \approx 10$. Pro zvýšení kvality regulace je možné zvolit vyšší hodnotu r .

Metody využívající znalost přenosu soustavy

Pokud je znám přenos soustavy (který lze získat např. identifikací), je možné provést návrh parametrů analyticky. Teoreticky je takto možné dosáhnout lepších výsledků než v předchozím případě, ale zpravidla velmi záleží na kvalitě modelu.

Podle minimálního absolutního tlumení regulačního pochodu

- Zvolíme určitou konstantu $\alpha > 0$ a požadujeme, aby pro kořen λ_m s největší reálnou částí platilo $\text{Re } \lambda_m = -\alpha$.
- Tím je zaručena stabilita a současně dostatečně tlumený regulační děj

- Pro návrh parametrů je možné použít algebraická kritéria stability tak, že dosadíme do charakteristické rovnice $s = q - \alpha$. Tím dostaneme novou rovnici pro q , která musí odpovídat právě mezi stability.
- Pokud takové parametry regulátoru nelze nalézt (např. některý z koeficientů získané rovnice vyjde záporný), je třeba zvolit menší α .

Je také možné také vycházet z tzv. rozšířené frekvenční charakteristiky, která vznikne dosazením $s = -\alpha + i\omega$, $\omega \in [0, \infty)$. Parametry regulátoru se určí tak, aby rozšířená frekvenční charakteristika procházela bodem $[-1, 0]$.

Např. hledejme nastavení P-regulátoru pro soustavu

$$y^{(3)} + \ddot{y} + \dot{y} + 2y = u$$

tak, aby minimální absolutní tlumení bylo $\alpha = 1$.

Uzavřením záporné zpětné vazby se zesílením r (tj. $u = -r \cdot y$) dostáváme autonomní systém popsany rovnicí

$$y^{(3)} + \ddot{y} + \dot{y} + (2+r)y = 0$$

Charakteristický mnohočlen po dosazení $q = s + 1$ je

$$(1+q)^3 + (1+q)^2 + (1+q) + (2+r)$$

Po roznásobení:

$$(q^3 + 3q^2 + 3q + 1) + (q^2 + 2q + 1) + q + r + 3 = q^3 + 4q^2 + 6q + (4+r)$$

Hurwitzova matice má tvar:

$$\begin{pmatrix} 4 & (4+r) & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & (4+r) \end{pmatrix}$$

Pro stabilitu musí platit tyto podmínky:

$$4+r > 0 \quad \Rightarrow r > -4$$

$$\begin{vmatrix} 4 & (4+r) \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 24 - (4+r) > 0 \quad \Rightarrow r < 20$$

Odtud vyplývá, že všechny podmínky stability jsou splněny pro $r \in (-4, 20)$. Kritický stav transformované rovnice při záporné zpětné vazbě nastane pro $r = 20$, což je hledané nastavení regulátoru.

Podle minima lineární regulační plochy

$$J = \int_0^{\infty} (y(t) - y_{\infty}) dt = \int_0^{\infty} e(t) dt \rightarrow \min$$

kde $e(t)$ je regulační odchylka.

Podle věty o konečné hodnotě Laplaceovy transformace (za předpokladu, že limita existuje, tj. musí být splněno $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$):

$$J = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{b_0}{a_0}$$

Pro minimalizaci J je třeba maximalizovat člen a_0 charakteristické rovnice regulační odchylky uzavřeného obvodu.

Kritérium má však význam pouze pro aperiodický průběh (pro kmitavý průběh se kladné a záporné odchylky od y_{∞} vyruší). Proto se přidává dodatečné omezení, že průběh je aperiodický.

- To je ekvivalentní požadavku, aby kořeny charakteristické rovnice byly všechny reálné
- Aperiodicita je v některých případech výhodná, ale vede na pomalejší regulační průběh

Mnohem lepší výsledky poskytuje kritérium $J = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \rightarrow \min$, které zahrnuje i kmitavé děje. Řešení je však nutné provést numericky.

Podle minima kvadratické regulační plochy

$$J = \int_0^{\infty} |y(t) - y_{\infty}|^2 dt \rightarrow \min .$$

Regulační průběh je sice většinou mírně kmitavý, ale rychle se ustálí na žádané hodnotě.

Abý průběh nebyl příliš kmitavý, je možné do integrandu zahrnout derivaci y :

$$J = \int_0^{\infty} \left[(y(t) - y_{\infty})^2 + k \cdot \dot{y}^2(t) \right] dt \rightarrow \min .$$

Pro konkrétní typy regulátorů je možné získat vztahy pro určení parametrů. Přitom je nutno testovat stabilitu.

Podle optimálního modulu frekvenčního přenosu uzavřeného obvodu

Požaduje se, aby amplitudová charakteristika uzavřeného obvodu byla v počátku co nejplošší a monotónně klesala.

Regulátor se pak chová jako filtr potlačující vyšší frekvence, které odpovídají vstupujícím poruchám (pokud amplitudová charakteristika uzavřeného obvodu není monotónní, pak má obvod zřejmě sklon zesilovat frekvenční složky blízké argumentu maxima amplitudové charakteristiky a netlumí dobře některé typy poruch).

Vyjádříme kvadrát modulu přenosu uzavřeného obvodu:

$$G(q) = F(i\omega)F(-i\omega) = \frac{B_m q^m + \dots + B_1 q + B_0}{A_n q^n + \dots + A_1 q + A_0}, \quad \text{kde } q = \omega^2.$$

Hledáme parametry A_i, B_i takové, aby platilo:

$$\frac{d^k G(q)}{dq^k} = 0, \quad k = 1, \dots, s, \quad \text{kde } s \text{ je co nejvyšší.}$$

Toto kritérium dává většinou kvalitní výsledky, které jsou určitým kompromisem mezi metodou lineární a kvadratické regulační plochy.

Označme $E(s) = \frac{1}{1 + R(s)S(s)}$ přenos regulační odchylky uzavřeného regulačního obvodu (tzv. *citlivostní funkce*).

Jelikož amplitudová charakteristika otevřeného obvodu je klesající, platí $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |E(i\omega)| = 1$. Regulační odchylka je pro nízké vstupující frekvence malá, platí proto $\lim_{\omega \rightarrow 0} |E(i\omega)| \approx 0$.

Modul citlivostní funkce však může mít uvnitř intervalu $(0, \infty)$ maximum s hodnotou větší než 1. V tom případě v určitém frekvenčním pásmu regulační obvod poruchy dokonce zesiluje. Proto je přirozené hledat parametry takové, aby

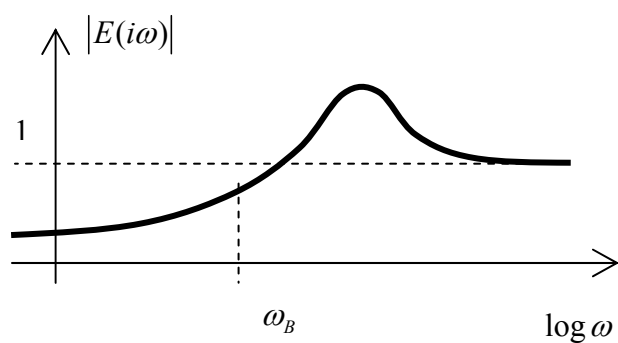
$$\max_{\omega} |E(i\omega)| \rightarrow \min$$

nebo alespoň aby $\max_{\omega} |E(i\omega)|$ bylo dostatečně malé. Zpravidla se požaduje

$\max_{\omega} |E(i\omega)| < 2$, což odpovídá amplitudové bezpečnosti větší než 2, neboť modul citlivostní funkce je převrácená hodnota vzdálenosti frekvenční charakteristiky od kritického bodu $[-1, 0]$.

Jedná se o moderní přístup k návrhu regulačního obvodu. Pro návrh podle tohoto kritéria je ale většinou nutno použít softwarové nástroje.

Frekvence ω_B , pro kterou platí $|E(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, se nazývá *šířka pásma* a odpovídá horní frekvenci poruch, které je regulátor schopen účinně tlumit.



15. Logické řízení

Úlohy logického řízení představují nejčastější okruh problémů, které se řeší při automatizaci výrobních procesů. Logické řízení často rovněž představuje vyšší vrstvu řídicího systému, která je hierarchicky nadřazena regulaci spojitých veličin.

Úkolem logického řízení je např. spouštění dílčích procesů v definovaném pořadí, ošetření havarijních stavů, vytvoření rozhraní pro korektní obsluhu technologie z pozice operátora.

U logických systémů hodnoty veličin nejsou číselné, ale jedná se o symboly. Čas může být uvažován jako diskrétní nebo spojitý. Nejčastěji veličiny nabývají pouze dvou hodnot označených „0“ a „1“ (tzv. dvouhodnotová logika).

Stejně jako u fyzikálních systémů je možné u logických systémů definovat vstupní, výstupní a stavové veličiny. Počet možných stavů je v tomto případě vždy konečný. Stav označuje např. i určitou probíhající činnost.

Úkolem logického řízení je zaručit, aby systém přecházel mezi stavy požadovaným způsobem v závislosti na vstupních informacích.

Chování logického systému je možné formálně popsat pomocí aparátu matematické logiky. „1“ označuje aktivní hodnotu - např. platnost nějakého tvrzení, dosažení určitého stavu, zapnutí akčního členu. Naopak „0“ je neaktivní hodnota a má význam neplatnosti, vypnutí.

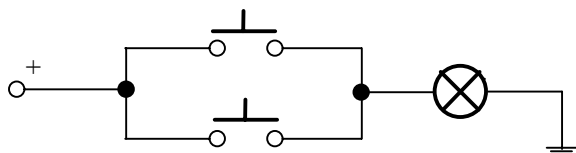
Logické funkce

Pomocí souboru logických proměnných je možné rozlišit jednotlivé stavy systému. Požadované chování řídicího systému je pak možné popsat pomocí tzv. logických funkcí, kterým je možné přiřadit např. zapnutí nebo vypnutí akčních prvků, signalizaci havarijních situací, apod.

Logické funkce lze definovat pomocí tzv. *pravdivostní tabulky*, kdy pro všechny kombinace hodnot argumentů přiřadíme výslednou hodnotu. Např. funkce $Y = f(X_1, X_2)$ může být zadána následovně:

X_1	X_2	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Proměnné X_1, X_2 mohou reprezentovat stav 2 vstupních tlačítek (logická 1 pro stisknuto) a výstup y rozsvěcí žárovku pomocí spínacího prvku (např. relé nebo výkonový tranzistor)



Jinou možností je zadat logickou funkci algebraickým zápisem pomocí elementárních funkcí (funktorů, resp. operátorů) jako jsou:

- Logický součet (disjunkce), anglicky „OR“
 - značení $A + B$, případně $A \vee B$
 - má hodnotu 1 pokud alespoň jeden z argumentů A a B má hodnotu 1 (alespoň jeden z výroků A a B je pravdivý)
- Logický součin (konjunkce), anglicky „AND“
 - značení $A.B$ případně $A \wedge B$,
 - má hodnotu 1 pokud oba argumenty A a B mají hodnotu 1
- Logická negace, anglicky „NOT“
 - značení \bar{V} , případně $\neg V$
 - negace výrazu V (má opačné ohodnocení než V)

Jsou definovány priority operátorů obdobně jako u běžné algebry – logický součin má přednost má před součtem. Negace má nejvyšší prioritu. Priority lze upravit pomocí závorek, např.:

$$A + B.C = A + (B.C)$$

$$(A + B).C$$

Pomocí těchto elementárních operací (případně rozšířených pro více argumentů) je možné vyjádřit libovolnou logickou funkci. Např. funkci z tabulky výše je možné okamžitě vyjádřit jako

$$Y = \bar{X}_1.X_2 + X_1.\bar{X}_2 + X_1.X_2$$

(tzv. úplná normální disjunktivní forma funkce – disjunkce členů, které jsou konjunkcí všech proměnných a jejich negací). Toto vyjádření vyplývá ze skutečnosti, že y má pravdivostní hodnotu 1 pokud má ohodnocení 1 alespoň jeden z řádků 2 - 4 tabulky.

Rovněž ale platí:

$$\bar{Y} = \bar{X}_1.\bar{X}_2$$

protože \bar{Y} nastává právě když je platný první řádek. (Druhý postup může být výhodnější, jestliže má tabulka méně nulových hodnot Y).

Vyjádření logických funkcí pomocí výrazů zřejmě není jednoznačné.

Logické funkce $(X_1 + X_2)$ a $(X_1 \cdot X_2)$ a (\bar{X}_1) mají následující pravdivostní tabulku:

X_1	X_2	$X_1 + X_2$	$X_1 \cdot X_2$	\bar{X}_1
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	0

Pozn.: Soubor elementárních funkcí není jediný. Např. pomocí každé z tzv. univerzálních funkcí $\overline{X_1 \cdot X_2}$ a $\overline{X_1 + X_2}$ lze vyjádřit libovolnou logickou funkci.

Např.: Uvažujme jednoduchý systém řízení hladiny v reaktoru, který využívá dvě čidla pro detekci požadované výšky hladiny h . První čidlo indikuje, že $h \geq h_1$ a druhé že $h \geq h_2$, kde $h_2 > h_1$ jsou známé hodnoty. Do nádrže přitékají 2 látky přes vstupní ventily V_1 a V_2 a z nádrže vytéká směs přes ventil V_o . Požadujeme, aby v nádrži byla při míchání udržována hladina v rozmezí $h \in \langle h_1, h_2 \rangle$ a látka V_2 byla přiváděna pouze pokud je hladina ve správném rozmezí. Výtokový ventil má být rovněž otevřen, jestliže obsluha stiskne tlačítko T_1 .

Logickými veličinami X_1, X_2 označme výstup prvního a druhého čidla, veličinami Y_1, Y_2, Y_o řídicí vstupy regulačních ventilů. Chování jednotlivých ventilů lze popsat pomocí následujících složených výrazů (logických funkcí):

$$Y_1 = \text{"není aktivní } X_2 \text{"}$$

$$Y_2 = \text{"je aktivní } X_1 \text{ a současně není aktivní } X_2 \text{"}$$

$$Y_o = \text{"je aktivní } X_1 \text{ nebo } T_1 \text{ (nebo oba)"} \text{"}$$

Pomocí logických operátorů lze totéž formálně zapsat následovně:

$$Y_1 = \overline{X_2}$$

$$Y_2 = X_1 \cdot \overline{X_2}$$

$$Y_o = X_1 + T_1$$

Takto zapsané výrazy jsou základ pro praktickou realizaci pomocí logických obvodů, popř. pomocí programovatelných logických automatů.

Booleova algebra

Booleova algebra je soubor pravidel pro manipulaci s logickými výrazy definovanými pomocí funktorů konjunkce, disjunkce a negace. Pomocí těchto pravidel je možné složité výrazy, získané např. z pravdivostní tabulky, zjednodušit. Cílem úprav je většinou nalezení minimálního tvaru funkce (tvar, který obsahuje nejmenší počet operací). Platnost pravidel je možné snadno ověřit např. pomocí pravdivostní tabulky.

Platí základní vztahy:

$$\overline{\overline{X}} = X$$

$$X + 0 = X \quad X + 1 = 1$$

$$X \cdot 1 = X \quad X \cdot 0 = 0$$

$$X + \overline{X} = 1 \quad X \cdot \overline{X} = 0$$

$$X + X = X \quad X \cdot X = X$$

Komutativnost (nezávislost na změně pořadí argumentů):

$$X + Y = Y + X$$

$$X \cdot Y = Y \cdot X$$

Asociativnost (nezávislost na pořadí vyhodnocování)

$$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$$

$$X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$$

Distributivnost

$$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$$

$$(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$$

De Morganovy věty (převedení konjunkce na disjunkci a naopak):

$$\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$$

$$\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$$

Např.: Výraz $Y = \overline{X}_1 \cdot X_2 + X_1 \cdot \overline{X}_2 + X_1 \cdot X_2$ získaný z pravdivostní tabulky v předchozí kapitole lze s využitím pravidel výše upravit následovně:

$$\overline{X}_1 \cdot X_2 + X_1 \cdot \overline{X}_2 + X_1 \cdot X_2 = \overline{X}_1 \cdot X_2 + X_1 \cdot (\overline{X}_2 + X_2) = \overline{X}_1 \cdot X_2 + X_1 \cdot 1 = \overline{X}_1 \cdot X_2 + X_1$$

Tento výsledek lze dále upravit vynásobením pravého argumentu výrazem $(X_2 + 1)$, který je jednotkový:

$$\begin{aligned}\bar{X}_1 \cdot X_2 + X_1 &= \bar{X}_1 \cdot X_2 + X_1 \cdot (X_2 + 1) = \bar{X}_1 \cdot X_2 + X_1 \cdot X_2 + X_1 = \\ &= (\bar{X}_1 + X_1) \cdot X_2 + X_1 = X_2 + X_1\end{aligned}$$

Jinou možností je k původnímu výrazu (ještě jednou) přičíst $X_1 \cdot X_2$:

$$\begin{aligned}\bar{X}_1 \cdot X_2 + X_1 \cdot \bar{X}_2 + X_1 \cdot X_2 &= (\bar{X}_1 \cdot X_2 + X_1 \cdot X_2) + (X_1 \cdot \bar{X}_2 + X_1 \cdot X_2) = \\ &= (\bar{X}_1 + X_1) X_2 + (X_1 + X_2) X_1 = X_2 + X_1\end{aligned}$$

Stejný výsledek lze okamžitě získat i z druhého získaného tvaru aplikací De Morganových vět:

$$\overline{\bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2} = X_1 + X_2$$

Správnost výsledku je patrná i z porovnání pravdivostních tabulek funkcí $f(X_1, X_2)$ a $X_1 + X_2$.

Sekvenční logické obvody

Dosud bylo uvažováno, že výstupní logické proměnné jsou závislé pouze na hodnotách logických vstupů. Takovéto chování mají tzv. *kombinační logické obvody*.

V řadě situací však nový stav logického systému závisí nejen na aktuálních hodnotách vstupů, ale i na stavu v předchozím kroku, obdobně jako u dynamických systémů. Takové obvody se nazývají *sekvenční*.

Jednotlivé kroky (tj. vlastně diskrétní čas) jsou dány okamžiky, kdy dochází ke zpracování vstupních hodnot, případně kdy dochází ke změnám vstupů.

Chování sekvenčního obvodu je možné popsat obdobně jako u kombinačního obvodu (tabulkou, výrazem), pouze přibývají další vstupy, které odpovídají stavu v předchozím kroku.

Elementárním příkladem je systém, který při každém stisknutí tlačítka na vstupu obrací hodnotu výstupu. Systém lze popsat následující tabulkou:

X	Y_k	Y_{k+1}
1	0	1
0	0	0
1	1	0
0	1	1

kde $X = X_k$ je aktuální hodnota vstupu, Y_k hodnota výstupu nastavená v předchozím kroku a Y_{k+1} nová hodnota výstupu.

Tabulce odpovídá následující výraz:

$$Y_{k+1} = X \cdot \bar{Y}_k + \bar{X} \cdot Y_k$$

Příklad: Máme řídit hladinu vody v nádrži v rozmezí $h \in \langle h_1, h_2 \rangle$, kde na úrovních h_1 a h_2 jsou umístěna čidla X_1 a X_2 . Logický výstup y řídí přítok do nádrže. Ventil se má otevřít, když $h < h_1$ a zavřít když $h > h_2$. Takto je zavedena hystereze, aby nedocházelo rychle k otevírání a zavírání ventilu (jedná se vlastně o realizaci dvoupolohového regulátoru s hysterezí). Chování soustavy je možné popsat tabulkou:

X_2	X_1	Y_k	Y_{k+1}
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	-
1	0	1	-
1	1	0	0
1	1	1	0

Situace odpovídající výstupu „-“ nemůže nastat (nemůže být aktivní X_2 bez X_1) a proto je možné zvolit hodnotu libovolnou – např. 0, popř. signalizovat poruchu zařízení. 3. a 4. řádek naznačují, že se jedná o sekvenční obvod (výstup není určen pouze vstupy X_1, X_2).

Odpovídající algebraický zápis logické funkce je:

$$Y_{k+1} = \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2 \cdot \bar{Y}_k + \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2 \cdot Y_k + X_1 \cdot \bar{X}_2 \cdot Y_k = \bar{X}_2 \cdot (\bar{X}_1 + X_1 \cdot Y_k)$$

Použitá literatura

- Hanuš, B., Balda, M. a kol., Základy technické kybernetiky I, Skriptum VŠST v Liberci, 1989.
- Hanuš, B., Balda, M. a kol., Základy technické kybernetiky II, Skriptum VUT v Brně, 1989.
- Komůrka, J., Gemza, E., Hutla, E., Koropecová, H., Technická kybernetika I, Skriptum VŠCHT v Pardubicích, 1979
- Komůrka, J., Gemza, E., Matematické modelování procesů chemické technologie – deterministické modelování, Skriptum VŠCHT v Pardubicích, 1976.
- Hanuš, B., Zikeš, F., Balátě J., Švarc, I., Teorie automatického řízení I, Skriptum VŠST v Liberci, 1982.
- Noskievič, P., Modelování a identifikace systémů, Montanex, Ostrava, 1999.
- Hlava, J., Prostředky automatického řízení, Skriptum ČVUT v Praze, 2000.
- Pírko, Z., Veit, J., Laplaceova transformace, SNTL, Praha, 1970.
- Rektorys, K. a kol., Přehled užití matematiky, Prometheus, Praha, 2000
- Ajzerman, M.A. a kol., Logika, automaty a algoritmy. Praha, Academia, 1971.
- Coughanowr, D. R., Process Systems Analysis and Control. McGraw-Hill, 1991
- Smith, A. C., Principles and Practice of Automatic Process Control. 3rd Edition. John Wiley & Sons, 2006
- Kotek, Z., Vysoký, P., Zdráhal, Z., Kybernetika. SNTL, Praha 1990
- Skokesdat, S., Poslethwaite, I., Multivariable Feedback Control (2nd edition). Wiley, 2005