

# Kapitola 4

## Linearizace

Reálné fyzikální systémy lze matematicky popsat diferenciálními rovnicemi. Diferenciální rovnice, které definují vztahy na reálném systému, mohou být obecně nelineární. Tento nelineární popis charakterizuje dynamiku systému v širokém rozsahu pracovních podmínek. Regulované systémy však často pracují v okolí definovaného pracovního bodu, kde je obvykle můžeme nahradit modelem lineárním. Lineární model je ovšem použitelný pouze v takovém okolí pracovního bodu, pro které splňuje požadavky na přesnost. Proces nahrazení nelineárního modelu v daném pracovním bodě modelem lineárním je založen na Taylorově polynomu prvního stupně (viz příloha A) a nazýváme jej linearizací.

### 4.1 Teoretický úvod

Dynamické systémy s neproměnnými parametry se nazývají *stacionární (t-invariantní)* a lze je popsat soustavou nelineárních rovnic

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)),\end{aligned}\tag{4.1}$$

kde první diferenciální rovnice se nazývá *stavovou rovnicí* a druhá algebraická rovnice *výstupní rovnicí*. Vektor  $\mathbf{u}(t)$  je *vektor r vstupů*,  $\mathbf{x}(t)$  je *vektor n vnitřních stavů* a  $\mathbf{y}(t)$  je *vektor m výstupů*. Vektory lze vyjádřit jako

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) &= [u_1(t) \quad u_2(t) \quad \dots \quad u_r(t)]^T, \\ \mathbf{x}(t) &= [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_n(t)]^T, \\ \mathbf{y}(t) &= [y_1(t) \quad y_2(t) \quad \dots \quad y_m(t)]^T.\end{aligned}$$

O linearitě či nelinearitě systému rozhoduje jen charakter vektorových funkcí  $\mathbf{f}$  a  $\mathbf{g}$ . Pokud je alespoň jedna z těchto funkcí nelineární, jedná se o nelineární systém. Jde-li o nelineární systém a chceme-li použít lineární teorii, aproximujeme nelineární funkci funkcí lineární (viz příloha A). Linearizaci (aproximaci) provádíme vždy v pracovním bodě, pro který platí, že všechny derivace vnitřních stavů jsou rovny nule. Pracovní bod charakterizují vektory  $\mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{u}_0$ , jenž lze zapsat jako

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_0 &= [u_{10} \quad u_{20} \quad \dots \quad u_{r0}]^T, \\ \mathbf{x}_0 &= [x_{10} \quad x_{20} \quad \dots \quad x_{n0}]^T.\end{aligned}$$

Výstupní vektor  $\mathbf{y}_0$ ,

$$\mathbf{y}_0 = [y_{10} \quad y_{20} \quad \dots \quad y_{m0}]^T,$$

je určen vektory  $\mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{u}_0$ , viz rovnice (4.1).

Lineární funkci lze získat pomocí Taylorova rozvoje prvního řádu. Z definice A.1 vyplývá, že se v podstatě jedná o tečnu nelineární funkce v daném pracovním bodě. Vektorové funkce  $\mathbf{f}$  a  $\mathbf{g}$  můžeme rozepsat podle následujícího schématu

$$f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \approx f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} (x_k - x_{k0}) + \sum_{k=1}^r \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} (u_k - u_{k0}), \quad (4.2)$$

$$g_j(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \approx g_j(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial g_j}{\partial x_k} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} (x_k - x_{k0}) + \sum_{k=1}^r \left. \frac{\partial g_j}{\partial u_k} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} (u_k - u_{k0}), \quad (4.3)$$

kde  $i = 1, 2, \dots, n$  a  $j = 1, 2, \dots, m$ . Linearizovaný model je modelem odchylkovým, vztaženým vždy k pracovnímu bodu, pro který byl odvozen. Odchylkový model linearizovaného nelineárního systému můžeme zapsat podobně jako stavový model lineárního systému ve tvaru

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(t), \\ \Delta\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\Delta\mathbf{u}(t),\end{aligned} \quad (4.4)$$

kde vektory odchylek jsou

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{u}(t) &= [u_1(t) - u_{10} \quad u_2(t) - u_{20} \quad \dots \quad u_r(t) - u_{r0}]^T, \\ \Delta\mathbf{x}(t) &= [x_1(t) - x_{10} \quad x_2(t) - x_{20} \quad \dots \quad x_n(t) - x_{n0}]^T, \\ \Delta\mathbf{y}(t) &= [y_1(t) - y_{10} \quad y_2(t) - y_{20} \quad \dots \quad y_m(t) - y_{m0}]^T.\end{aligned}$$

Matice v rovnicích (4.4) představují

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_r} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial u_r} \end{bmatrix},$$

kde  $\mathbf{A}$  je *matice systému* rozměru  $(n \times n)$ ,  $\mathbf{B}$  je *matice řízení* rozměru  $(n \times r)$ ,  $\mathbf{C}$  a  $\mathbf{D}$  jsou *výstupní matice* rozměru  $(m \times n)$  a  $(m \times r)$ .

## 4.2 Příklady

**Příklad 4.1:** Vodní nádrž (NOSKIEVIČ, P., 1999, strana 62) s jedním přítokem a jedním výtokem je popsána rovnicí

$$\frac{dh(t)}{dt} = -\frac{S_2}{S_1} \sqrt{2g} \sqrt{h(t)} + \frac{q(t)}{S_1}, \quad (4.5)$$

kde  $h(t)$  [m] je výška hladiny v nádrži,  $q(t)$  [ $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ ] je objemový přítok,  $S_1 = 0,03 \text{ m}^2$  je průřez nádrže,  $S_2 = 0,0008 \text{ m}^2$  je průřez výtokové trubice a  $g$  [ $\text{m s}^{-2}$ ] je tíhové zrychlení.

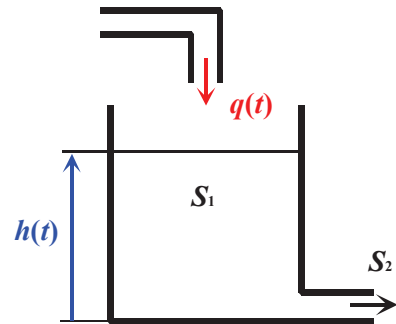
Linearizujte systém pro výšku hladiny 10 m a porovnejte linearizovaný a nelineární model. Za výstup považujte výšku hladiny  $h(t)$  v nádrži.

*Řešení:* Nejprve zavedeme substituci

$$\frac{S_2}{S_1} \sqrt{2g} = a, \quad \frac{1}{S_1} = b.$$

Dále zavedeme substituci pro vstupní, stavové a výstupní veličiny

$$u = q, \quad x = h, \quad y = h = x.$$



Obrázek 4.1: Vodní nádrž

Pracovní bod je charakterizován hodnotami  $u_0$  a  $x_0$ . Hodnota  $x_0$  představuje ustálenou hladinu v nádrži (ze zadání 10 m) a  $u_0$  konstantní přítok potřebný pro udržení hladiny  $x_0$ . Přítok  $u_0$  dopočítáme z rovnice (4.5). Pro ustálený stav platí

$$\frac{dh(t)}{dt} = \dot{x}(t) = 0,$$

odkud dostaneme

$$u_0 = \sqrt{2 S_2^2 g x_0}.$$

Po dosazení dostaneme pracovní bod

$$x_0 = 10 \text{ m}, \quad u_0 \doteq 0,0112 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Stavovou rovnici (4.5) a výstupní rovnici  $y(t) = x(t)$  linearizujeme podle rovnic (4.2) a (4.3) na tvar

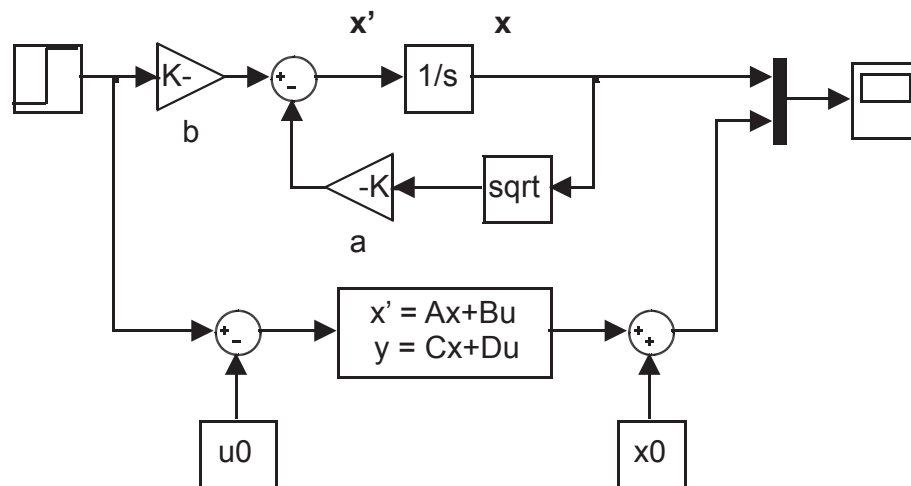
$$\dot{x}(t) = -a\sqrt{x_0} + b u_0 - \left. \frac{a}{2\sqrt{x(t)}} \right|_{x_0, u_0} (x(t) - x_0) + b(u(t) - u_0), \quad (4.6)$$

$$y(t) = x_0 + 1(x(t) - x_0). \quad (4.7)$$

Je zřejmé, že součet prvních dvou členů na pravé straně rovnice (4.6) je z definice pracovního bodu nutně roven nule. Rovnice (4.6) a (4.7) využijeme pro sestavení matic stavového popisu. Pro obecný pracovní bod mají matice tvar

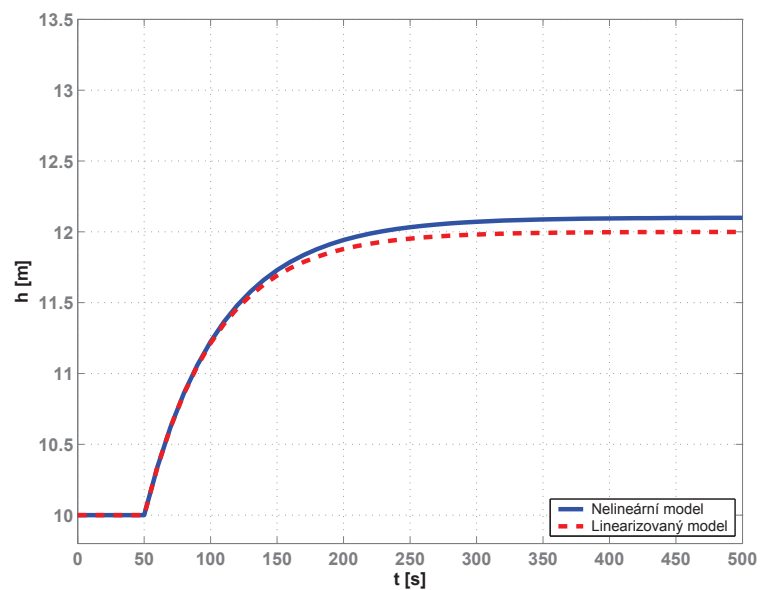
$$\mathbf{A} = \left[ -\frac{a}{2\sqrt{x_0}} \right], \quad \mathbf{B} = \left[ b \right], \quad \mathbf{C} = \left[ 1 \right], \quad \mathbf{D} = \left[ 0 \right].$$

Simulinkové schéma nelineárního a linearizovaného modelu je znázorněno na obrázku 4.2. Nelineární model systému je nutné nastavit do pracovního bodu. To obnáší nastavení všech počátečních podmínek v souladu s pracovním bodem. V tomto případě je  $u_0$  počáteční podmínkou vstupního bloku a  $x_0$  je počáteční podmínkou integrátoru. Porovnávat nelineární model s linearizovaným je možné pouze v okolí pracovního bodu. Z tohoto důvodu na vstup linearizovaného modelu přivádíme signál  $\Delta u$  a výstup nelineárního modelu porovnááme se signálem  $\Delta y + y_0$ . Toto je důsledkem skutečnosti, že linearizovaný model je modelem odchylkovým, vztaženým vždy k jednomu zvolenému pracovnímu bodu.

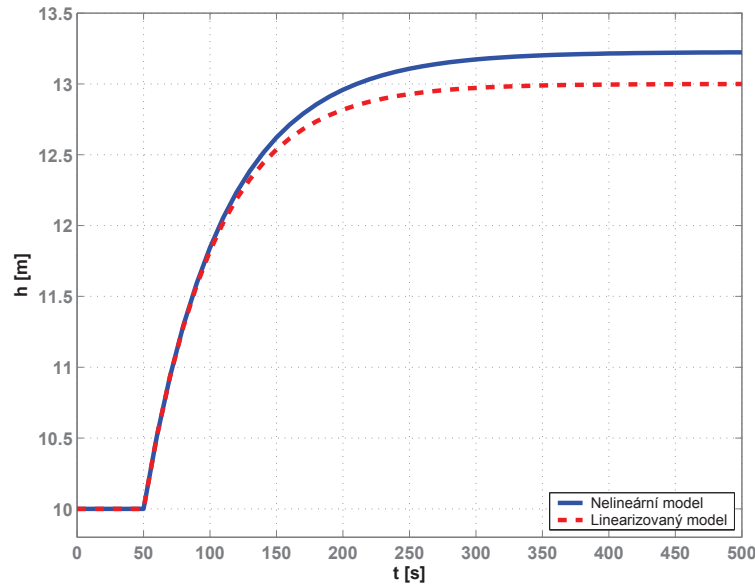


Obrázek 4.2: Simulinkové schéma nelineárního a linearizovaného modelu nádrže

Následující obrázky porovnávají odezvy nelineárního a linearizovaného modelu na skoky o různé velikosti přivedené na vstup v čase 50 s. Chyba odezvy linearizovaného modelu je způsobena odchýlením od pracovního bodu. Z grafů vyplývá, že při použití většího vstupního skoku dochází k větší chybě, tj. linearizovaný model se více odchyluje od pracovního bodu.



Obrázek 4.3: Odezvy nelineárního a linearizovaného modelu nádrže na skok o velikosti  $1,1 u_0$



Obrázek 4.4: Odezvy nelineárního a linearizovaného modelu nádrže na skok o velikosti  $1,15 u_0$

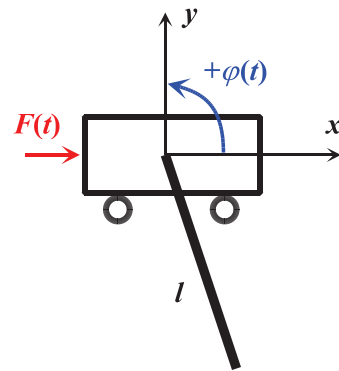
✓

**Příklad 4.2:** Kyvadlo s volným závěsem upevněné na pohyblivém vozíku (ROUBAL, J., 2002), jenž je tvrdým zdrojem polohy (kyvadlo zpětně neovlivňuje pohyb vozíku), popisuje rovnice

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = -2\delta \frac{d\varphi(t)}{dt} - \omega_0^2 \cos \varphi(t) + \frac{2}{3l} a(t) \sin \varphi(t), \quad (4.8)$$

kde  $\varphi(t)$  [rad] je úhel vychýlení kyvadla od osy závěsu,  $\delta = 0,1 \text{ s}^{-1}$  je koeficient útlumu,  $\omega_0 = 2,5 \text{ rad s}^{-1}$  je úhlová frekvence vlastních kmitů,  $l = 1 \text{ m}$  je délka kyvadla a  $a(t)$  [ $\text{m s}^{-2}$ ] je zrychlení dodávané systému vnější silou.

Linearizujte model systému pro kyvadlo v horní poloze  $\mathbf{x}_0 = [\pi/2, 0]^T$  a porovnejte linearizovaný a nelineární model. Za výstup považujte úhel vychýlení kyvadla.



Obrázek 4.5: Kyvadlo na vozíku

*Řešení:* Nejprve zavedeme substituci

$$2\delta = b, \quad \omega_0^2 = c, \quad \frac{2}{3l} = d.$$

Dále zavedeme substituci pro vstupní, stavové a výstupní veličiny

$$u = a, \quad x_1 = \varphi, \quad x_2 = \dot{\varphi}, \quad y = x_1.$$

Pomocí substituce přepíšeme diferenciální rovnici druhého řádu (4.8) na následující dvě diferenciální rovnice prvního řádu

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad (4.9)$$

$$\dot{x}_2(t) = -bx_2(t) - c \cos x_1(t) + du(t) \sin x_1(t). \quad (4.10)$$

Pracovní bod je dán hodnotou  $u_0$  a vektorem  $\mathbf{x}_0$  ve tvaru

$$\mathbf{x}_0 = [x_{10} \quad x_{20}]^T,$$

kde  $x_{10}$  je úhel vychýlení kyvadla a  $x_{20}$  je úhlová rychlost v poloze dané  $x_{10}$ . Vektor  $\mathbf{x}_0$  je znám ze zadání. Pro výpočet  $u_0$  vyjdeme z rovnice (4.10). Pro ustálený stav platí

$$\dot{x}_1(t) = 0 \quad \text{a} \quad \dot{x}_2(t) = 0,$$

odkud dostaneme pracovní bod

$$u_0 = 0 \text{ m s}^{-2}, \quad \mathbf{x}_0 = [\pi/2 \text{ rad} \quad 0 \text{ rad s}^{-1}]^T.$$

Rovnice (4.9), (4.10) a výstupní rovnici  $y(t) = x_1(t)$  linearizujeme podle rovnic (4.2) a (4.3) na tvar

$$\dot{x}_1(t) = x_{20} + 1(x_2(t) - x_{20}),$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) = & -bx_{20} - c \cos x_{10} - du_0 \sin x_{10} - b(x_2(t) - x_{20}) + c \sin x_1(t)|_{\mathbf{x}_0, u_0} (x_1(t) - x_{10}) + \\ & + du(t) \cos x_1(t)|_{\mathbf{x}_0, u_0} (x_1(t) - x_{10}) + d \sin x_1(t)|_{\mathbf{x}_0, u_0} (u(t) - u_0), \end{aligned}$$

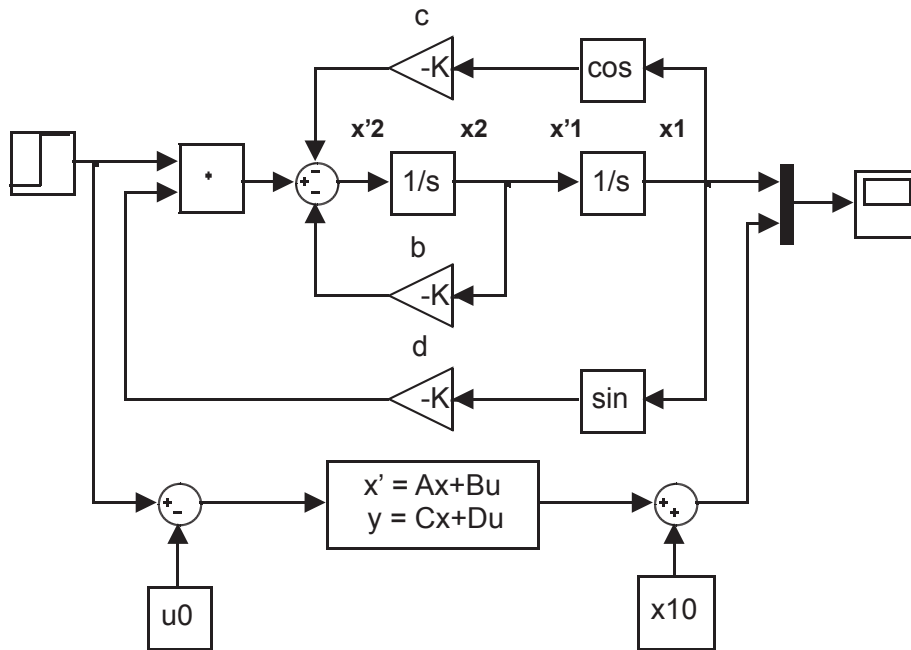
$$y(t) = x_{10} + 1(x_1(t) - x_{10}).$$

Tyto rovnice využijeme pro sestavení matic stavového popisu. Pro obecný pracovní bod mají matice tvar

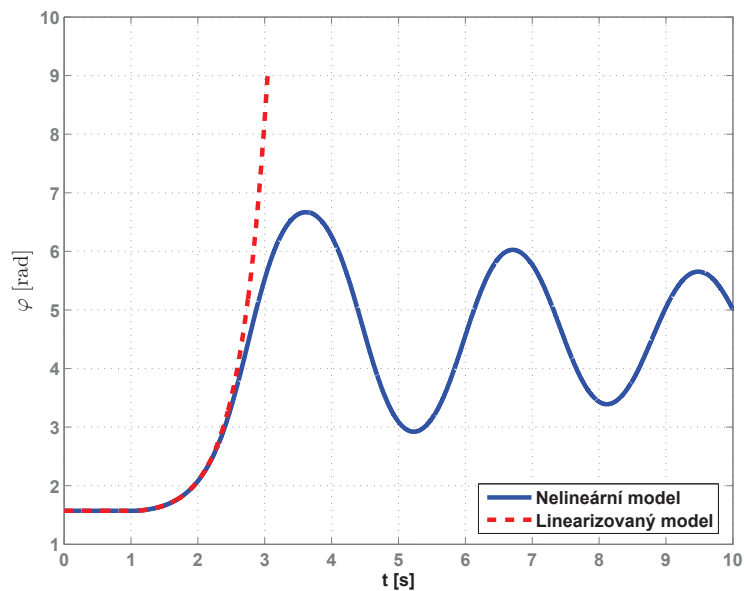
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c \sin x_{10} + du_0 \cos x_{10} & -b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ d \sin x_{10} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Simulinkové schéma nelineárního a linearizovaného modelu je znázorněno na obrázku 4.6. Nelineární model je opět nutné nastavit do pracovního bodu. Hodnota  $u_0$  je počáteční podmínkou vstupního bloku,  $x_{10}$  je počáteční podmínkou integrátoru stavu  $x_1$  a  $x_{20}$  je počáteční podmínkou integrátoru stavu  $x_2$ .



Obrázek 4.6: Simulinkové schéma nelineárního a linearizovaného modelu kyvadla



Obrázek 4.7: Odezva nelineárního a linearizovaného modelu kyvadla na skok o velikosti 1

Obrázek 4.7 zobrazuje odezvu nelineárního a linearizovaného modelu na jednotkový skok přivedeného na vstup v čase 1 s. Zamyslete se nad důsledkem použití linearizovaného modelu. ✓