

Filtrácia a frekvenčná analýza signálov získaných z riadeného simulačného modelu (Model: Guľôčka na tyči)

Úlohy:

1. Zostavte matematický model systému guľôčka na tyči
2. Navrhните riadenie na model guľôčka na tyči a simulačne overte navrhnuté riadenie
 - a. Vytvorte lineárnu náhradu matematického modelu
 - b. Navrhните spojitý PID regulátor s využitím klasickej metódy syntézy
 - c. Navrhnutý spojitý PID regulátor prevedte na diskretný PSD regulátor
 - d. Vytvorte simulačný model systému guľôčka na tyči v uzavretom regulačnom obvode s navrhnutým PSD regulátorom
3. Vykonajte frekvenčnú analýzu signálov získaných zo simulačných modelov v riadiacej štruktúre a porovnajte amplitúdové spektrá
 - a. Vytvorte simulačný model systému guľôčka na tyči v uzavretom regulačnom obvode s navrhnutým PSD regulátorom, ktorý bude mať chybu na servomotore
 - b. Navrhните číslicový filter pre filtráciu šumu z nameraného diskretného signálu
 - c. Zmerajte otáčanie servomotorov oboch simulačných modelov
 - i. Z nameraných diskretných signálov odfiltrujte šum pomocou navrhnutého filtra
 - ii. Namerané diskretné signály prevedte z časovej do frekvenčnej oblasti použitím rýchlej Fourierovej transformácie a porovnajte amplitúdové spektrá.

1. Zostavte matematický model systému guľôčka na tyči

Odvodenie matematického modelu guľôčka na tyči, variant: servomotor je v strede s využitím postupu analytickej identifikácie sa nachádza na stránke predmetu *Simulačné systémy* v časti *Simulačné modely*.

http://matlab.fei.tuke.sk/ss/pdfModely/M2_gulocka_na_tyci.pdf

2. Navrhните riadenie na model guľôčka na tyči a simulačne overte navrhnuté riadenie

a. Vytvorte lineárnu náhradu matematického modelu

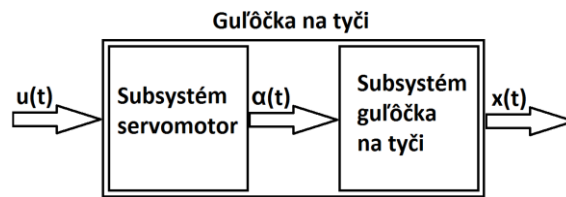
Systém guľôčka na tyči je opísaný diferenciálnou rovnicou:

$$\ddot{x}(t) = \frac{5}{7}g \sin \alpha(t) \quad (2.1)$$

Tento systém je poháňaný servomotorom (Obr. 1), ktorého matematický model je aproximovaná prenosová funkcia prvého rádu vyjadrená v tvare:

$$F_{servo} = \frac{A(s)}{U(s)} = \frac{K_s}{T_s s + 1} \quad (2.2)$$

kde K_s je zosilnenie motora, $K_s = 0.1878$ a T_s je časová konštanta motora, $T_s = 0.1878$.



Obr. 1 Rozdelenie systému guľôčka na tyči na subsystemy

Výstup podsystému servomotor je vstup do systému guľôčka na tyči. Môžeme teda prehlásiť, že podsystémy sú zapojené sériovo a ich substitučný kanonický tvar je:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x, u, t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x, u, t) = \frac{5}{7}g \sin(x_3(t)) \\ \dot{x}_3(t) &= f_3(x, u, t) = u - \frac{x_3(t)}{T} \end{aligned} \quad (2.3)$$

kde $x_1(t)$ je poloha guľôčky, $x_2(t)$ je rýchlosť guľôčky a $x_3(t)$ je otočenie servomotoru, teda $\alpha(t)$.

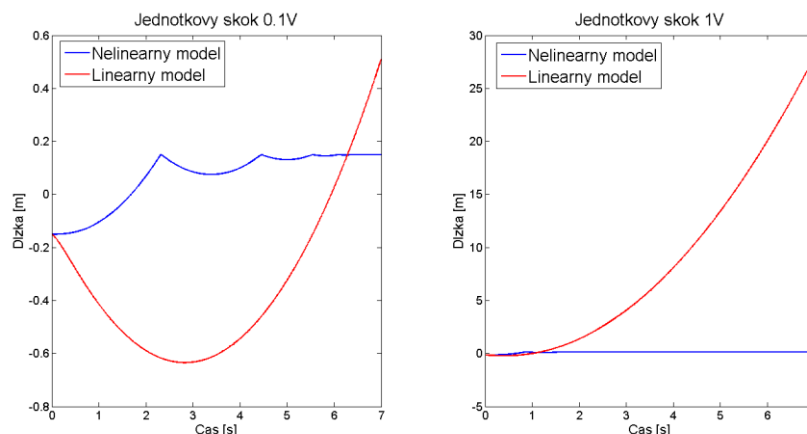
Systém zlinearizujeme pre pracovný bod $x_{PB} = [x_{1PB}, x_{2PB}, x_{3PB}]^T = [0, 0, 0]^T$ a získame Jacobiho matice:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}_{|PB=[0,0,0]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{7}g \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \end{pmatrix}_{|PB=[0,0,0]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Pre doplnenie stavového opisu matica C vyzerá:

$$C = (1 \quad 0 \quad 0) \quad (2.5)$$

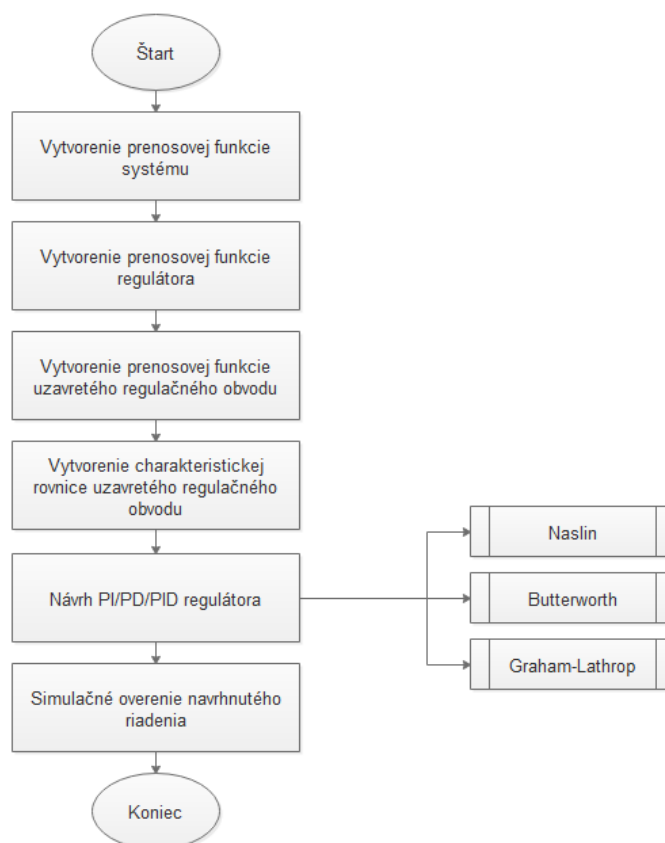
Na Obr. 2 sú zobrazené odozvy nelineárneho a zlinearizovaného neriadeného systému na jednotkový skok 1V



Obr. 2 Odozva lineárneho a nelineárneho systému guľôčka na tyči na jednotkový skok 1V

Vidíme, že lineárny a nelineárny systém sa správajú podobne len v okolí pracovného bodu, v ktorom sme systém linearizovali, teda v okolí bodu $PB = [0, 0, 0]$.

b. Navrhnete spojitý PID regulátor s využitím klasickej metódy syntézy



Obr. 3 Algoritmus pre návrh riadenia klasickými metódami syntézy

Pri návrhu spojitého PID regulátora budeme postupovať podľa algoritmu na Obr. 3. Vytvoríme si prenosovú funkciu zlinearizovaného systému podľa vzorca:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B \quad (2.6)$$

Prenosová funkcia systému guľôčka na tyči vyzerať:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{5}{7}K_s g}{T_s s^3 + s^2} \quad (2.7)$$

kde K_s je zesilnenie servomotora, $K_s = 0.1878$, T_s je časová konštanta servomotora, $T_s = 0.1878s$ a g je tiažové zrýchlenie, $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$. V druhom kroku si vytvoríme prenosovú funkciu PID regulátora:

$$F_{PID}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = r_1 s + \frac{r_{-1}}{s} + r_0 \quad (2.8)$$

Prenosovú funkciu uzavretého regulačného obvodu vytvoríme podľa vzorca:

$$F_{URO}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{F(s)F_{reg}(s)}{1 + F(s)F_{reg}(s)} \quad (2.9)$$

Charakteristickú rovnicu uzavretého regulačného obvodu vytvoríme podľa vzorca:

$$1 + F(s)F_{PID}(s) = 0 \quad (2.10)$$

a dostaneme rovnicu:

$$c_4 s^4 + c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0 = 0 \quad (2.11)$$

c_0	$5 \cdot K_s \cdot g \cdot r_{-1} / 7$
c_1	$5 \cdot K_s \cdot g \cdot r_0 / 7$
c_2	$5 \cdot K_s \cdot g \cdot r_1 / 7$
c_3	1
c_4	T_s

Tab. 1 Hodnoty konštánt v charakteristickej rovnici uzavretého regulačného obvodu

Teraz aplikujeme jednu z metód syntézy. Popis jednotlivých metód syntézy spojitého regulátora sa nachádza na stránke predmetu *Základy automatického riadenia* v časti *Prednášky*:

<http://matlab.fei.tuke.sk/zar/subory/prednasky/Prednaska9.pdf>

c. Navrhnutý spojitý PID regulátor prevedť na diskretný PSD regulátor

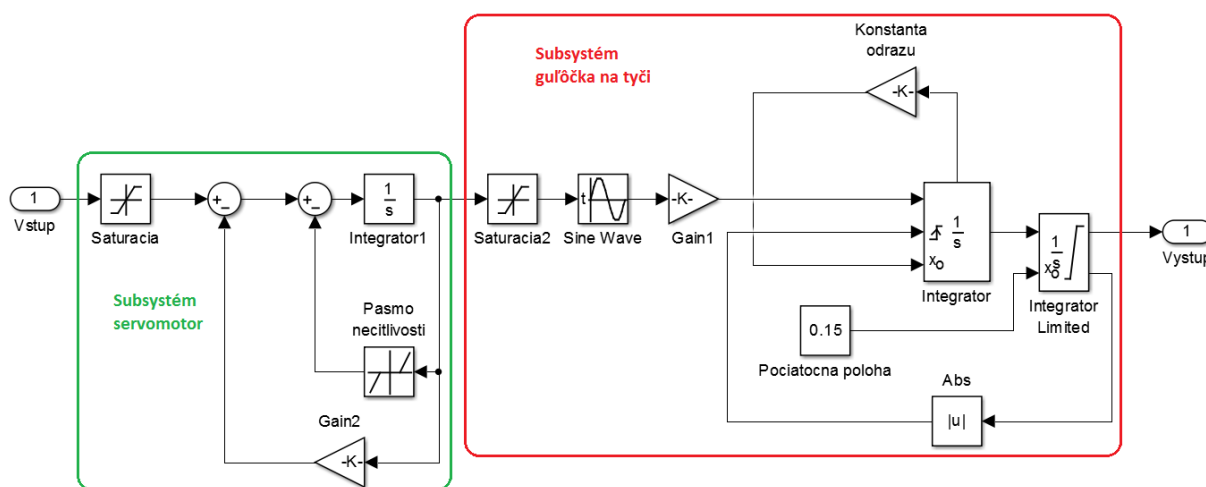
Popis prevodu spojitého regulátora na diskretný PSD regulátor sa nachádza na stránke predmetu *Základy automatického riadenia* v časti *Prednášky*:

<http://matlab.fei.tuke.sk/zar/subory/prednasky/Prednaska10.pdf>

V simulácii nastavte fixný iteračný krok (periódu vzorkovania) na takú hodnotu, podľa ktorej ste navrhovali PSD regulátor (navrhujeme $T = 0.01s$).

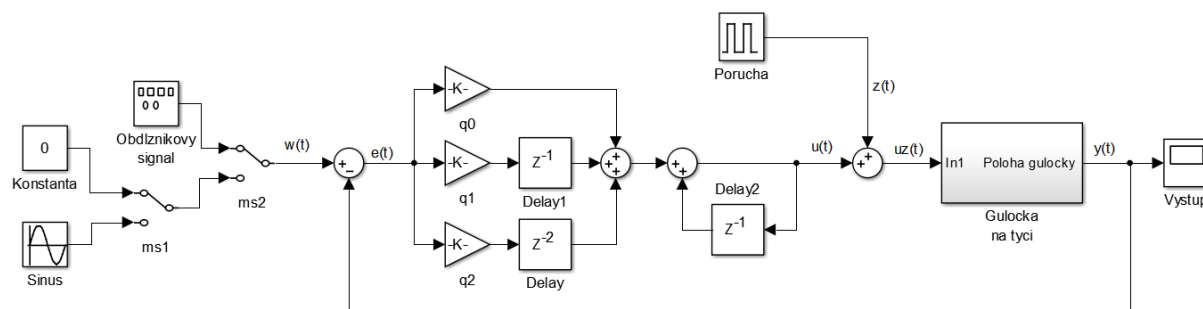
d. Vytvorte simulačný model systému guľôčka na tyči v uzavretom regulačnom obvode s navrhnutým PSD regulátorom

Na Obr. 4 je znázornený simulačný model systému guľôčka na tyči



Obr. 4 Simulačný model systému guľôčka na tyči

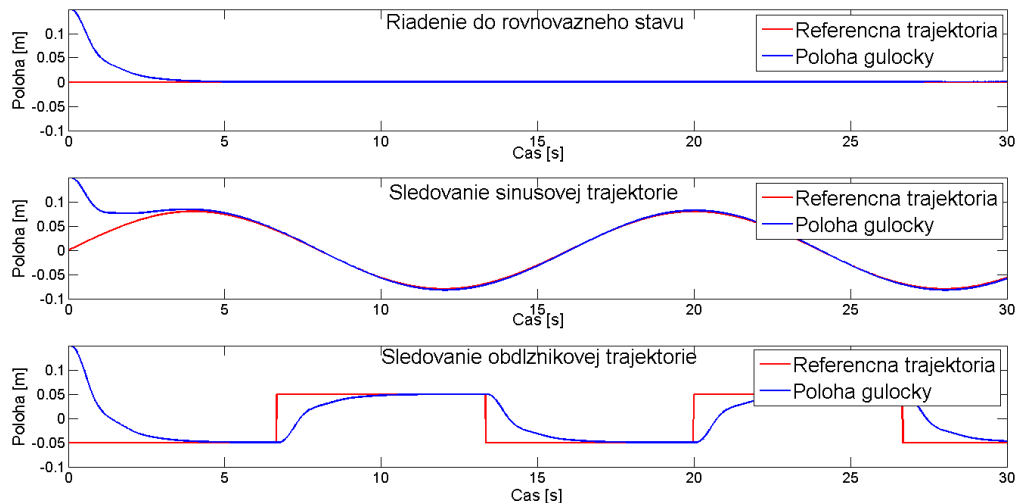
Na Obr. 5 je znázornený simulačný model systému guľôčka na tyči (Obr. 4) zapojený v uzavretom regulačnom obvode spolu s navrhnutým PSD regulátorom



Obr. 5 Uzavretý regulačný obvod

$w(t)$ je referenčná trajektória, $e(t)$ je regulačná odchýlka, $u(t)$ je akčný zásah, $z(t)$ je porucha, $u_z(t)$ je akčný zásah ovplyvnený poruchou a $y(t)$ je regulovaná veličina (v našom prípade je to poloha guľôčky).

Na Obr. 6 sú zobrazené výstupy zo systému (poloha guľôčky) guľôčka na tyči riadeného navrhnutým PSD regulátorom pri rôznych cieľoch riadenia: a) riadenie do rovnovážneho stavu, b) sledovanie sínusovej trajektórie a c) sledovanie obdĺžnikovej trajektórie.



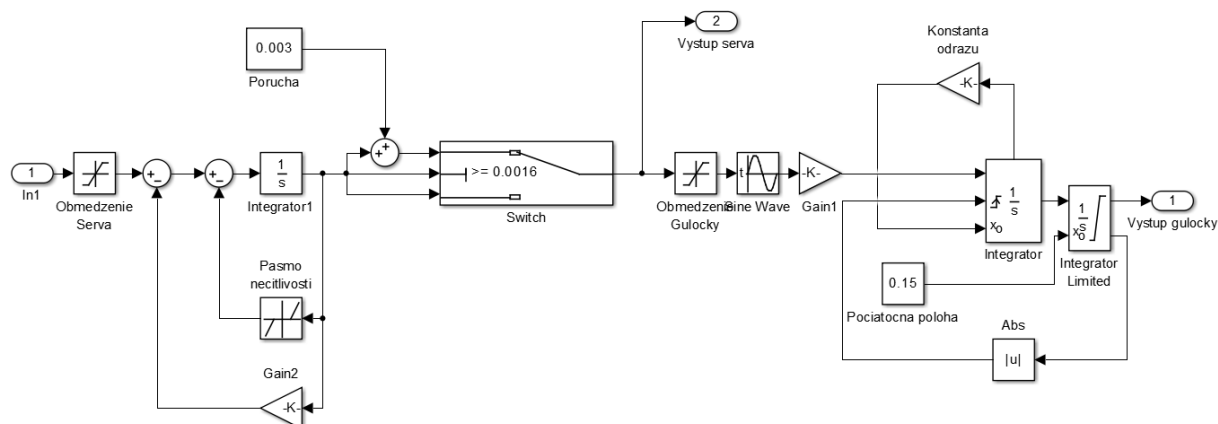
Obr. 6 Výstupy zo systému guľôčka na tyči riadeného PSD regulátorom

3. Vykonaťte frekvenčnú analýzu signálov získaných zo simulačných modelov v riadiacej štruktúre a porovnajte amplitúdové spektrá

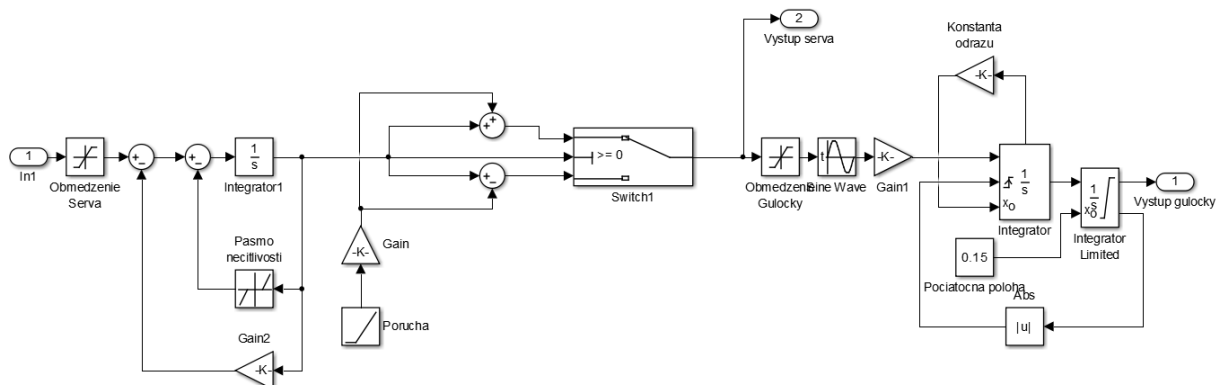
a. Vytvorte simulačný model systému guľôčka na tyči v uzavretom regulačnom obvode s navrhnutým PSD regulátorom, ktorý bude mať chybu na servomotore.

Na servomotore môžu nastať rôzne chyby. Na Obr. 7 až 9 sú zobrazené tri možné chyby:

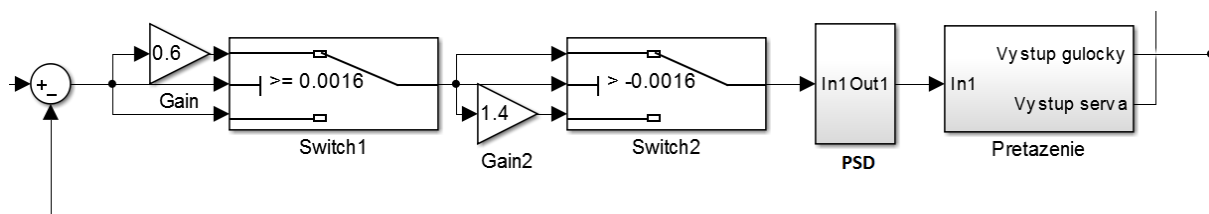
- servomotor má poškodené ozubené koleso (má vylomených niekoľko zubov)
- v servomotore sa akumuluje nepresnosť (v opačnom smere sa akumuluje s opačnou hodnotou)
- servomotor je preťažovaný (v krajných polohách zoslabne)



Obr. 7 Implementácia chyby poškodeného ozubeného kola na systém guľôčka na tyči



Obr. 8 Implementácia chyby akumulácie nepresnosti na systém guľôčka na tyči



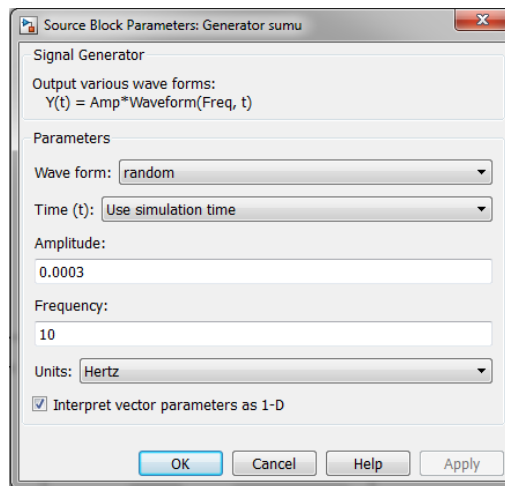
Obr. 9 Implementácia chyby preťaženia na systém guľôčka na tyči

Model s poškodeným servomotorom zapojte do uzavretého regulačného obvodu podľa Obr. 5.

b. Navrhnete číslicový filter pre filtráciu šumu z nameraného diskrétného signálu

FIR filter

Šum vytvoríme v Simulink-u tak, že k meranej veličine pripočítame náhodný signál (Random signal) vytvorený v bloku „Signal Generator“. Parametre tohto signálu sú zobrazené na Obr. 10



Obr. 10 Parametre signálu - šum

Nerekurzívny (FIR) filter je definovaný vzťahom:

$$y(m) = \sum_{i=0}^N b_i x(m-i) \quad (3.1)$$

kde x je vstupný vektor (zašumený signál), y je výstupný vektor (vyfiltrovaný signál), b je vektor koeficientov filtra a m je index.

FIR filter navrhujeme príkazom:

$$b = \text{firl}(m, \sigma_n),$$

kde b je vektor koeficientov vytvoreného filtra, m je rád filtra a σ_n je normovaná medzná frekvencia a $\sigma_n \in (0,1)$. Signál z guľôčky je meraný zvolenou vzorkovacou frekvenciou 100Hz ($T = 0.01s$), takže ako normovanú medznú frekvenciu σ_n si určíme hodnotu podľa vzorca

$$\sigma_n = \frac{2 \cdot \sigma_0}{f_s} \quad (3.2)$$

pričom σ_0 je normovaná hraničná frekvencia a f_s je vzorkovacia frekvencia signálu, z ktorého chceme odfiltrovať šum. V našom prípade, kde potrebujeme odfiltrovať šum postačuje nastaviť $f_s = 1$, teda $\sigma_n = 0.02$.

IIR filter

Rekurzívny IIR filter je definovaný vzťahom:

$$y(m) = \sum_{i=0}^M b_i x(m-i) - \sum_{i=1}^N a_i y(m-i) \quad (3.3)$$

kde b je vektor koeficientov filtra, y je výstupný vektor (vyfiltrovaný signál), x je vstupný vektor (zašumený signál) a m je index.

IIR filter je možné navrhnuť príkazmi:

$$[b, a] = \text{butter}(m, \sigma_n),$$

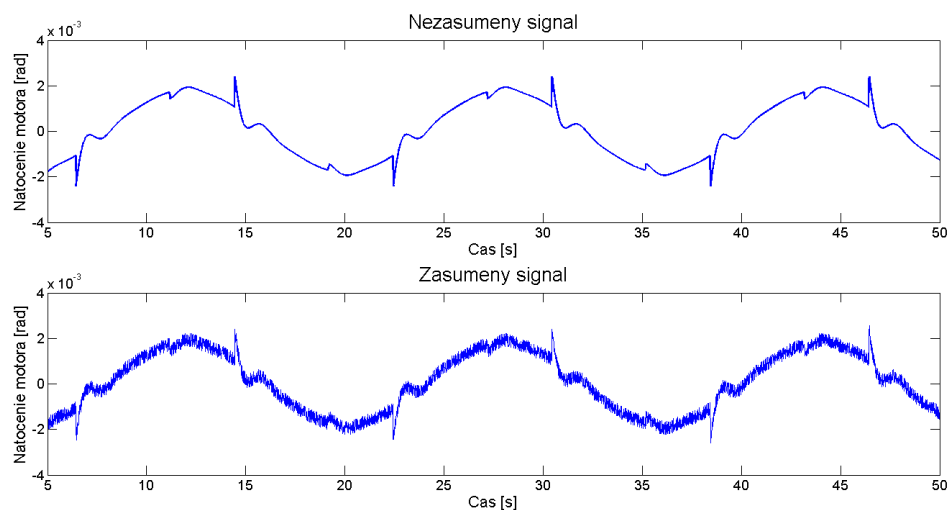
$$[b, a] = \text{cheby1}(m, r_p, \sigma_n)$$

$$[b, a] = \text{cheby2}(m, r_s, \sigma_n)$$

$$[b, a] = \text{ellip}(m, r_p, r_s, \sigma_n)$$

Výstupy b a a sú vektory koeficientov filtra, m je rád filtra, r_p , r_s je zvlnenie v priepustnom a nepriepustnom pásme a σ_n je normovaná medzná frekvencia, pre ktorú platí to isté, čo pri návrhu FIR filtra.

Na Obr. 11 je znázornené otáčanie chybového servomotora (preťažovaný servomotor), pred a po pridaní šumu k signálu. Cieľom riadenia bolo sledovanie sínusovej trajektórie.



Obr. 11 Zašumený a nezašumený signál $\varphi(t)$ zo simulačného modelu guľôčka na tyči

c. Zmerajte otáčanie servomotorov oboch simulačných modelov

i. Z nameraných diskretných signálov odfiltrujte šum pomocou navrhnutého filtra

Na samotnú filtráciu signálu je možné použiť príkazy:

$$yf = \text{filtfilt}(b, a, y),$$

$$y_f = \text{filter}(b, a, y),$$

pričom b , a sú vektory koeficientov filtra (pri FIR filtri sa $a = 1$) a y je diskretný signál, ktorý sa bude filtrovať. V našom prípade je y zašumený signál získaný z jedného zo simulačných modelov zapojených v riadiacej štruktúre (Obr. 5).

Príkaz `filter` filtruje daný diskretný signál y v prípade FIR filtra podľa rovnice:

$$y_f(m) = b_1 y(m) + b_2 y(m-1) + \dots + b_{n_b+1} y(m - m l_b) \quad (3.4)$$

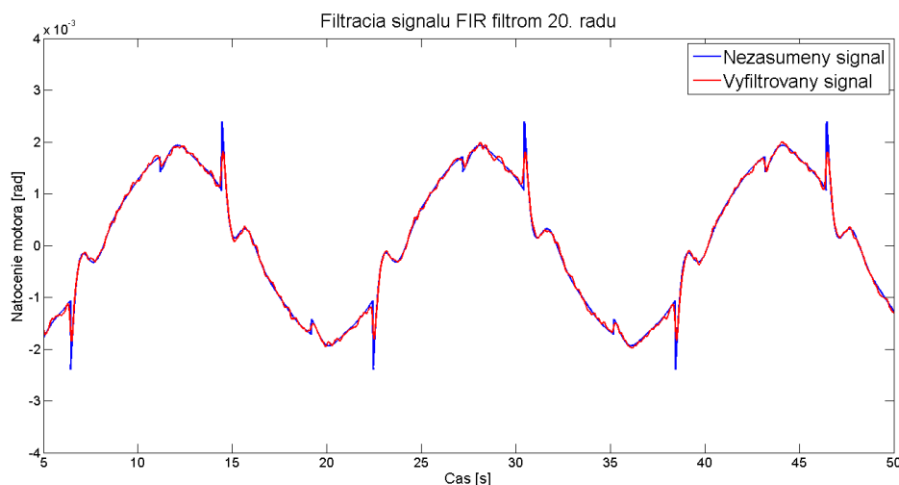
a v prípade IIR filtra podľa rovnice:

$$y_f(m) = b_1 y(m) + b_2 y(m-1) + \dots + b_{n_b+1} y(m - m l_b) - a_2 y_f(m-1) - \dots - a_{n_a+1} y_f(m - m l_a) \quad (3.5)$$

kde b , a sú vektory koeficientov filtra, m je index prvku diskretného signálu, y_f je filtrovaný diskretný signál a l_b , l_a sú dĺžky vektorov b , a .

Príkaz `filtfilt` filtruje diskretný signál y podľa rovnakých diferenčných rovníc, ale po filtrácii sa získaná postupnosť obráti a znova prefiltruje.

Na Obr. 12 vidíme signál z Obr. 11 (dole), z ktorého bol odfiltrovaný šum FIR filtrom 20. rádu.



Obr. 12 Filtrácia signálu FIR filtrom 20. rádu

ii. Namerané diskretné signály prevedte z časovej do frekvenčnej oblasti použitím rýchlej Fourierovej transformácie a porovnajte amplitúdové spektrá.

Diskretná Fourierova transformácia (ďalej DFT) slúži na prevod diskretného signálu z časovej do frekvenčnej oblasti. Je definovaná vzťahom:

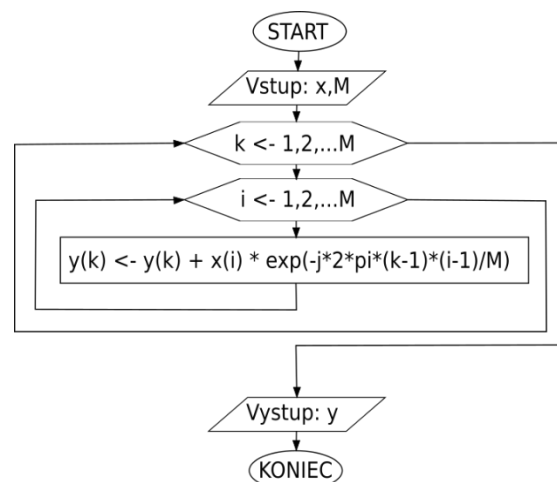
$$Y(k) = \sum_{i=0}^{M-1} y(i) e^{\frac{j2\pi i k}{M}} \quad (3.6)$$

Inverzná diskretná Fourierova transformácia je definovaná vzťahom:

$$y(i) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} Y(k) e^{\frac{j2\pi i k}{M}} \quad (3.7)$$

DFT je široko využívaná, no má zásadnú nevýhodu. Na transformáciu signálu s počtom vzoriek M je potrebných M^2 násobení a $M*(M - 1)$ sčítaní. Napríklad ak máme diskretný signál s počtom vzoriek 100, tak DFT si vyžaduje 10 000 komplexných násobení a 9 900 sčítaní. Práve na elimináciu tejto nevýhody bol vytvorený algoritmus **rýchlej Fourierovej transformácie** (ďalej FFT), ktorý výrazne znížil počet matematických operácií potrebných pre transformáciu diskretného signálu do frekvenčnej oblasti. Algoritmus FFT je založený na tom, že sekvenciu vzoriek rozdelíme na dve časti a ku každej časti určíme DFT. Pre každú takúto časť je potrebných $(M/2)^2$ súčinov. Teda pre obe časti je potrebných $M^2/2$ súčinov, čo je v konečnom dôsledku polovica počtu súčinov potrebných pre klasickú DFT.

Algoritmus DFT je znázornený na Obr. 13. x je diskretný signál a M je počet vzoriek frekvenčného spektra, teda koľko hodnôt chceme na výstupnom frekvenčnom spektre.



Obr. 13 Algoritmus diskretnéj Fourierovej transformácie

```

startP = 7000; %Od ktoreho merania chcem zacat
               %1 sekunda = 100 merani step=0.01
Datapoints = length(ServoRef(:,1)); %pocet vzoriek
newDatapoints = Datapoints - startP; %novy pocet vzoriek
Length = 30; %Dlžka merania (sekundy);

overSampRate = 30; %vzorkovacia frekvencia - kolko chceme vzoriek
fs=overSampRate; %sampling frequency

tempRef = zeros(newDatapoints,2);
tempChybny = zeros(newDatapoints,2);
  
```

```

for i = 1:newDatapoints
    tempRef(i,1) = ServoNominalne(i+startP,1);
    tempRef(i,2) = ServoNominalne(i+startP,2);

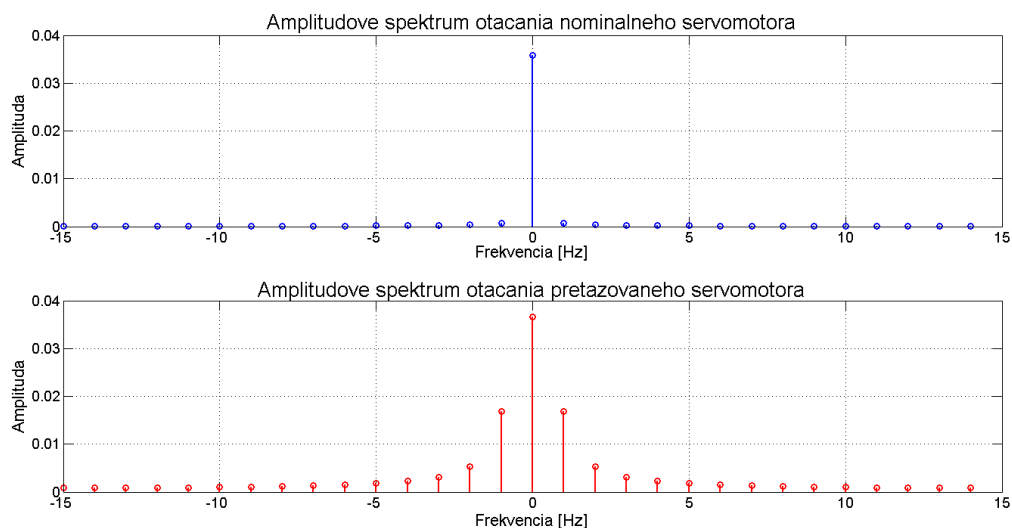
    tempChybny(i,1) = ServoPretazene(i+startP,1);
    tempChybny(i,2) = ServoPretazene(i+startP,2);
end;

%vytvorenie FIR filtra
b=fir1(20, 1/50);
%filtrovanie signalu
yFIRref=filtfilt(b, 1, tempRef(:,2));
yFIRch =filtfilt(b, 1, tempChybny(:,2));

%Vypocet frekvencnych spektier
NFFT = overSampRate;
XRef=fftshift(dft(yFIRref,NFFT));
Xch=fftshift(dft(yFIRch,NFFT));
fVals=fs*(-NFFT/2:NFFT/2-1)/NFFT;

figure
%Vykreslenie amplitudovych
subplot(2,1,1)
stem(fVals,abs(XRef),'b','LineWidth',2)
grid on;
title('Amplitudove spektrum otacania nominalneho servomotora')
xlabel('Frekvencia [Hz]')
ylabel('Amplituda')
subplot(2,1,2)
stem(fVals,abs(Xch),'r','LineWidth',2)
grid on;
title('Amplitudove spektrum otacania servomotora s chybou')
xlabel('Frekvencia [Hz]')
ylabel('Amplituda')

```



Obr. 14 Porovnanie amplitúdových spektier

Výsledkom skriptu uvedeného vyššie je Obr. 14 kde vidíme porovnanie amplitúdových spektier otáčania servomotora, ktorý pracuje bez chyby (nominálny servomotor) a otáčania preťažovaného servomotora. Oba servomotory sú samozrejme subsystémy systému guľôčka na tyči. V amplitúdových spektrách sú badateľné rozdiely, čo znamená, že chyba v systéme bola odhalená.