Cvičenie 3 – teória
(Optimálne riadenie podľa kvadratického kritéria)

RIADENIE

Majme systém :

$$\bar{x}(t)=\bar{A}(t)\bar{x}(t)+\bar{B}(t)\bar{u}(t)$$
$$\bar{y}(t)=\bar{C}(t)\bar{x}(t)$$

a určitý funkcionál (kritérium) :

$$J=\frac{1}{2}[\langle\bar{x}(T),\bar{F}\,\bar{x}(T)\rangle]+\frac{1}{2}\int_0^T[\langle\bar{x}(t),\bar{Q}(t)\bar{x}(t)\rangle+\langle\bar{u}(t),\bar{R}(t)\bar{u}(t)\rangle]dt$$

riadenie ar $u(t)$ nieje ohraničené, T je zadané, matice $\bar{Q},\bar{F}$ sú kladne semidefinitné, matica $\bar{R}$ je kladne definitná. Potom existuje riadnenie, je jediné a odpovedá rovnici :

$$\bar{u}(t)=-\bar{R}(t)^{-1}\,\bar{B}(t)^T\bar{K}(t)\bar{x}(t)$$

kde matica $\bar{K}(t)$ je symetrická (nxn) a je riešením Riccatiho rovnice :

$$\dot{\bar{K}}(t)=-\bar{K}(t)\bar{A}(t)-\bar{A}(t)^T\bar{K}(t)+\bar{K}(t)\bar{B}(t)\bar{R}(t)^{-1}\,\bar{B}(t)^T\bar{K}(t)-\bar{Q}(t)$$

s hraničnou podmienkou

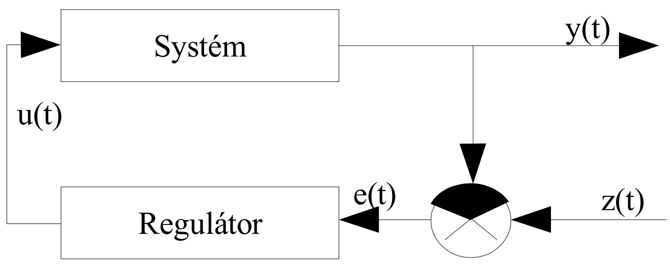
$$\bar{K}(t)=\bar{F}\quad .$$

Stav optimálneho systému je riešením rovnice :

$$\bar{x}(t)=[\bar{A}(t)-\bar{B}(t)\bar{R}(t)^{-1}\,\bar{B}(t)^T\bar{K}(t)]\bar{x}(t)$$
$$\bar{x}(t_0)=\bar{\xi}$$

SLEDOVANIE

Majme funkciu $\bar{z}(t)$, ktorá hrá úlohu žiadanej veličiny. V regulačnom obvode platí :



$$\bar{e}(t)=\bar{z}(t)-\bar{y}(t)=\bar{z}(t)-\bar{C}\,\bar{x}(t)$$

kde
e – regulačná odchýlka
Úlohou je regulovať systém tak, aby $\bar{e}(t)=\bar{0}$. Funkcionál je v tvare :

$$J=\frac{1}{2}[\langle\bar{e}(T),\bar{F}\,\bar{e}(T)\rangle]+\frac{1}{2}\int_0^T[\langle\bar{e}(t),\bar{Q}(t)\bar{e}(t)\rangle+\langle\bar{u}(t),\bar{R}(t)\bar{u}(t)\rangle]dt$$

Pre jednotlivé matice platí vyššie uvedené. V tomto prípade bude riadenie :

$$\bar{u}(t)=\bar{R}^{-1}\,\bar{B}^T[\bar{g}(t)-\bar{K}\,\bar{x}(t)]$$

Symetrická matica $\bar{K}(t)$ je kladne definitná a je riešením Riccatiho rovnice :

$$\dot{\bar{K}}(t)=-\bar{K}(t)\bar{A}(t)-\bar{A}(t)^T\bar{K}(t)+\bar{K}(t)\bar{B}(t)\bar{R}(t)^{-1}\,\bar{B}(t)^T\bar{K}(t)-\bar{C}(t)^T\bar{Q}(t)\bar{C}(t)$$

s hraničnou podmienkou :

$$\bar{K}(t)=\bar{C}(T)^T\bar{F}\,\bar{C}(T)$$

a funkcia $\bar{g}(t)$ je riešením rovnice

$$\dot{\bar{g}}(t)=-[\bar{A}(t)-\bar{B}(t)\bar{R}^{-1}\,\bar{B}(t)^T\bar{K}(t)]^T\bar{g}(t)-\bar{C}(t)^T\bar{Q}\,\bar{z}(t)$$

s hraničnou podmienkou $\bar{g}(T)=\bar{C}(T)^T\bar{F}\,\bar{z}(T)$.
Pre vyčíslenie $\bar{g}(t)$ na celom úseku (t_0, T) musíme poznať $\bar{z}(t)$ na celom úseku (t_0, T) .

Riešenie riccatiho rovníc v matlabe

Existuje funckcia lqr . Výpis z matlabovského helpu pre funkciu lqr je :

```
>> help lqr
 LQR  Linear-quadratic regulator design for continuous-time systems.

    [K,S,E] = LQR(A,B,Q,R,N)  calculates the optimal gain matrix K
    such that the state-feedback law  u = -Kx  minimizes the cost
    function

        J = Integral {x'Qx + u'Ru + 2*x'Nu} dt
                                      .
    subject to the state dynamics  x = Ax + Bu.

    The matrix N is set to zero when omitted.  Also returned are the
    Riccati equation solution S and the closed-loop eigenvalues E:
                             -1
      SA + A'S - (SB+N)R  (B'S+N') + Q = 0 ,    E = EIG(A-B*K) .
```

Cvičenie 3
Optimálne systémy podľa kvadratického kritéria

Príklad 1

Určte optimálne riadenie s kvadratickým kritériom pre dynamický systém daný prenosom :

$$F(s)=\frac{1}{s^2+s+2}=\frac{y(s)}{u(s)}$$

kvadratické kritérium je dané vzťahom :

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(x_1^2(t)+x_2^2(t)+ru^2(t))dt$$

Systém si prepíšeme do stavového priestoru, pričom :

$$x_1(t)=y(t)$$
$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t)=u(t)-2x_1(t)-x_2(t)$$

a maticový zápis :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=[1\quad 0]\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

Určíme či je systém riaditeľný :

$$\bar{G}=[\bar{B}\quad \bar{A}\bar{B}]$$
$$\bar{G}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

Matica A je rozmeru 2x2 a matica G má 2 nezávislé stĺpce. Podmienka riaditeľnosti je splnená.
Teraz si určíme matice $\bar{Q},\bar{R}$ zo vzťahu pre kritérium :

$$\bar{Q}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix};\qquad \bar{R}=r$$

Ide o časovo invariantný systém. Matica K bude teda pozostávať z konštantných prvkov. Maticu K dostaneme ako ustálené hodnoty diferenciálnej rovnice riešením v obrátenom čase pri použití počiatočných podmienok $\bar{K}(0)=\bar{0}$. Použijeme rovnicu :

$$\dot{\bar{K}}(t)=-\bar{K}(t)\bar{A}(t)-\bar{A}(t)^T\bar{K}(t)+\bar{K}(t)\bar{B}(t)\bar{R}(t)^{-1}\bar{B}(t)^T\bar{K}(t)-\bar{Q}(t)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{k}_{11} & \dot{k}_{12}\\ \dot{k}_{12} & \dot{k}_{22}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{12} & k_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{12} & k_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{12} & k_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\frac{1}{r}[0\quad 1]\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{12} & k_{22}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=-\begin{bmatrix}-2k_{12} & k_{11}-k_{12}\\ -2k_{22} & k_{12}-k_{22}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2k_{12} & -2k_{22}\\ k_{11}-k_{12} & k_{12}-k_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k_{12}\\ k_{22}\end{bmatrix}\frac{1}{r}[k_{12}\quad k_{22}]-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}4k_{12}+\frac{1}{r}k_{12}^2-1 & \frac{k_{12}k_{22}}{r}+2k_{22}+k_{12}-k_{11}\\ \frac{k_{12}k_{22}}{r}+2k_{22}+k_{12}-k_{11} & \frac{k_{22}^2}{r}+2\ k_{22}-1-2\ k_{12}\end{bmatrix}$$

Dostali sme teda sústavu rovníc :

$$\dot{k}_{11}(t)=4k_{12}(t)+\frac{1}{r}k_{12}^2(t)-1$$
$$r\dot{k}_{12}(t)=k_{12}(t)k_{22}(t)+2rk_{22}(t)+r(k_{12}(t)-k_{11}(t))$$
$$r\dot{k}_{22}(t)=k_{22}^2(t)+2rk_{22}(t)-r(1+2k_{12}(t))$$

Aby matica K bola kladne definitná, musí platiť :

$$k_{11}>0,\quad k_{22}>0,\quad k_{11}k_{22}-k_{12}^2>0$$

pre $t \to \infty$ dostaneme vzťahy :

$$0 = 4k_{12} + \frac{1}{r}k_{12}^2 - 1$$
$$0 = k_{12}\,k_{22} + 2rk_{22} + r(k_{12} - k_{11})$$
$$0 = k_{22}^2 + 2rk_{22} - r(1 + 2k_{12})$$

odtiaľ :

$$k_{12} = -2r \pm \sqrt{4r^2 + r}$$
$$k_{22} = -r \pm \sqrt{(r - 3r^2 \pm [2r\sqrt{(4r^2 + r)}])}$$

ak $k_{22} > 0$ musí platiť znamienko + a výraz pod odmocninou po odmocnení musí byť > r, potom aby bolo splnené, že $r - 3r^2 \pm 2r\sqrt{(4r^2 + r)} > 0$ musíme brať pri k_{12} znamienko + :

$$k_{12} = -2r + \sqrt{4r^2 + r}$$
$$k_{22} = -r + \sqrt{(r - 3r^2 + [2r\sqrt{(4r^2 + r)}])}$$
$$k_{11} = -2r + \sqrt{((r - 3r^2 + [2r\sqrt{(4r^2 + r)}])(4 + \frac{1}{r}))}$$

Teraz si určíme riadenie u^* :

$$u^*(t) = \frac{-1}{r}[0 \quad 1]\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{-1}{r}[k_{12}\,x_1(t) + k_{22}\,x_2(t)]$$

Po dosadení :

$$u(t) = -\frac{1}{r}[-2r + \sqrt{(4r^2 + r)}]\,y(t) - \frac{1}{r}[-r + \sqrt{(r - 3r^2 + 2r\sqrt{(4r^2 + r)})}]\,\dot{y}(t)$$

po prevedení do laplaceovej transformácie :

$$u(s) = -\frac{1}{r}[-2r + \sqrt{(4r^2 + r)}]\,y(s) - \frac{1}{r}[-r + \sqrt{(r - 3r^2 + 2r\sqrt{(4r^2 + r)})}]\,s\,y(s)$$

Prenos URO :

$$G(s) = \frac{\dfrac{1}{s^2 + s + 2}}{1 + \dfrac{\sqrt{(4 + \frac{1}{r})} - 2 + s\sqrt{(\frac{1}{r} - 3 + 2\sqrt{(4 + \frac{1}{r})})} - s}{s^2 + s + 2}} = \frac{1}{s^2 + s\sqrt{(\frac{1}{r} - 3 + 2\sqrt{(4 + \frac{1}{r})})} + \sqrt{(4 + \frac{1}{r})}}$$

CH. R. :

$$s^2 + s\sqrt{(\frac{1}{r} - 3 + 2\sqrt{(4 + \frac{1}{r})})} + \sqrt{(4 + \frac{1}{r})} = 0$$

odtiaľ korene CH. R. :

$$s_{1,2} = \frac{-\sqrt{(\frac{1}{r} - 3 + 2\sqrt{(4 + \frac{1}{r})})}}{2} \pm \frac{\sqrt{(\frac{1}{r} - 3 - 2\sqrt{(4 + \frac{1}{r})})}}{2}$$

prvý výraz bude vždy reálny pre $r \in (0; \infty)$. Druhý výraz bude v závislosti od voľby r kladný aj záporný. Takže sa ho zbavíme (aby sme mali korene iba reálne záporné):

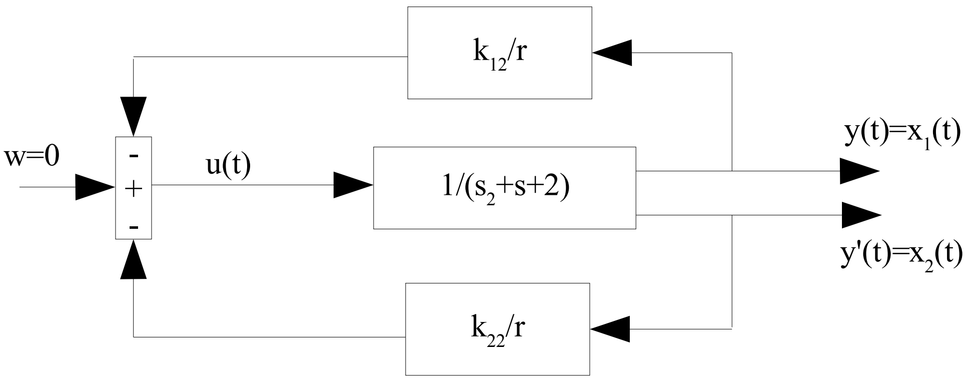
$$\frac{1}{r} - 3 - 2\sqrt{(4 + \frac{1}{r})} = 0$$

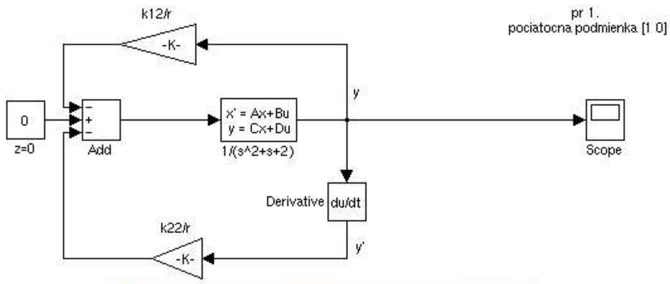
po úprave

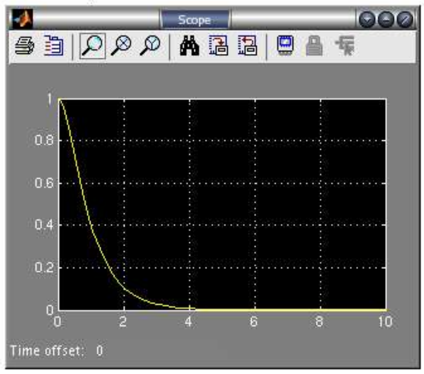
$$7r^2 + 10\,r - 1 = 0$$
$$r \doteq 0.0938$$

Vybrali sme kladné riešenie, aby sme mali prvý člen koreňov reálny.

Schéma URO je potom (uvažujeme r=0,0938):







Príklad 2

Určte optimálne riadenie s kvadratickým kritériom pre dynamický systém daný prenosom :

$$F(s)=\frac{1}{s^2}=\frac{y(s)}{u(s)}$$

kvadratické kritérium je dané vzťahom :

$$J=\frac{1}{2}[x_1^2(3)+2x_2^2(3)]+\frac{1}{2}\int_0^3(2x_1^2(t)+4x_2^2(t)+2x_1(t)x_2(t)+u^2(t))dt$$

Systém si prepíšeme do stavového priestoru, pričom :

$$x_1(t)=y(t)$$
$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t)=u(t)$$

a maticový zápis :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=[1 \quad 0]\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

Teraz si určíme matice $\bar{Q},\bar{R},\bar{F}$ zo vzťahu pre kritérium :

$$\bar{Q}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}; \quad \bar{R}=1\ ; \quad \bar{F}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

Určíme či je systém riaditeľný :

$$\bar{G}=[\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B}]$$

$$\bar{G}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

Matica A je rozmeru 2x2 a matica G má 2 nezávislé stĺpce.
Určíme si riadenie :

$$\bar{u}(t)=-\boxed{\bar{R}^{-1}\bar{B}^T\bar{K}}\bar{x}(t)=1[0 \quad 1]\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{12} & k_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=$$
$$=-(k_{12}x_1(t)+k_{22}x_2(t))$$

Prvky matice K sú riešením riccatiho rovnice :

$$\dot{\bar{K}}(t)=-\bar{K}(t)\bar{A}(t)-\bar{A}(t)^T\bar{K}(t)+\bar{K}(t)\bar{B}(t)\bar{R}(t)^{-1}\bar{B}(t)^T\bar{K}(t)-\bar{Q}(t)$$

pričom počiatoné podmienky $\bar{K}(0)$ nepoznáme. Poznáme ale koncové podmienky $\bar{K}(T)=\bar{F}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$. Tieto koncové podmienky potom môžeme použiť ako počiatočné podmienky ak obrátime výpočet. Po ukončení výpočtu je potrebné výsledky opätovne obrátiť.
Riešenie riccatiho rovnice teda :

$$\begin{bmatrix}\dot{k}_{11} & \dot{k}_{12}\\ k_{12} & \dot{k}_{22}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{12} & k_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{12} & k_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{12} & k_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}[1][0 \quad 1]\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{12} & k_{22}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}k_{12}^2-2 & -k_{11}+k_{12}k_{22}-1\\ -k_{11}+k_{12}k_{22}-1 & -2k_{12}+k_{22}^2-4\end{bmatrix}$$

Máme teda diferenciálne rovnice :

$$\dot{k}_{11}(t)=k_{12}^2-2$$
$$\dot{k}_{12}(t)=-k_{11}+k_{12}k_{22}-1$$
$$\dot{k}_{22}=-2k_{12}+k_{22}^2-4$$

Koncové podmienky sú:

k_{11}	k_{12}	k_{22}
1	0	2

$k_{11}(3)=1$
$k_{12}(3)=0$
$k_{22}(3)=2$

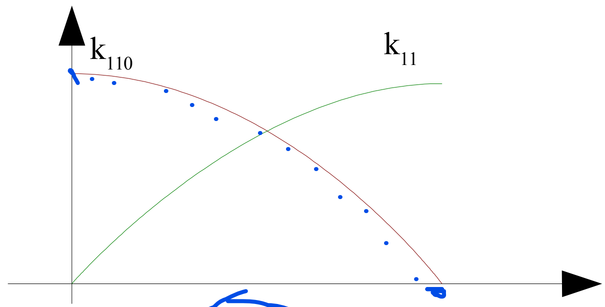
A pre obrátený čas budú rovnice :

$$\dot{k}_{110}(t)=-k_{120}^2+2$$
$$\dot{k}_{120}(t)=+k_{110}-k_{120}k_{220}+1$$
$$\dot{k}_{220}=+2k_{120}-k_{220}^2+4$$

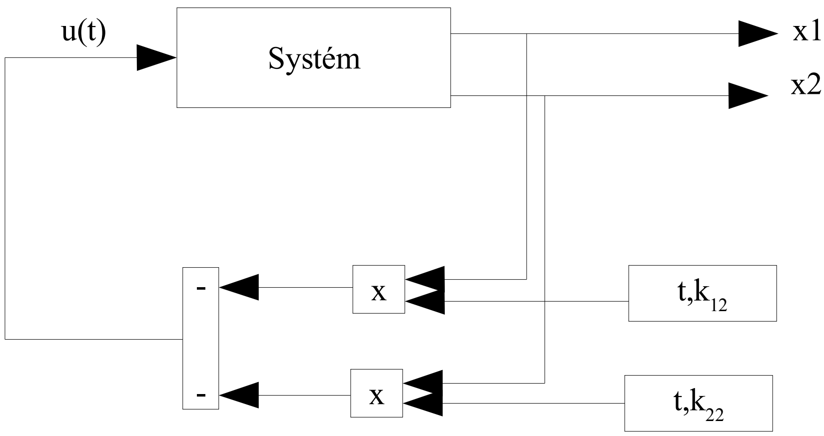
počiatočné podmienky pre takto obrátený čas :

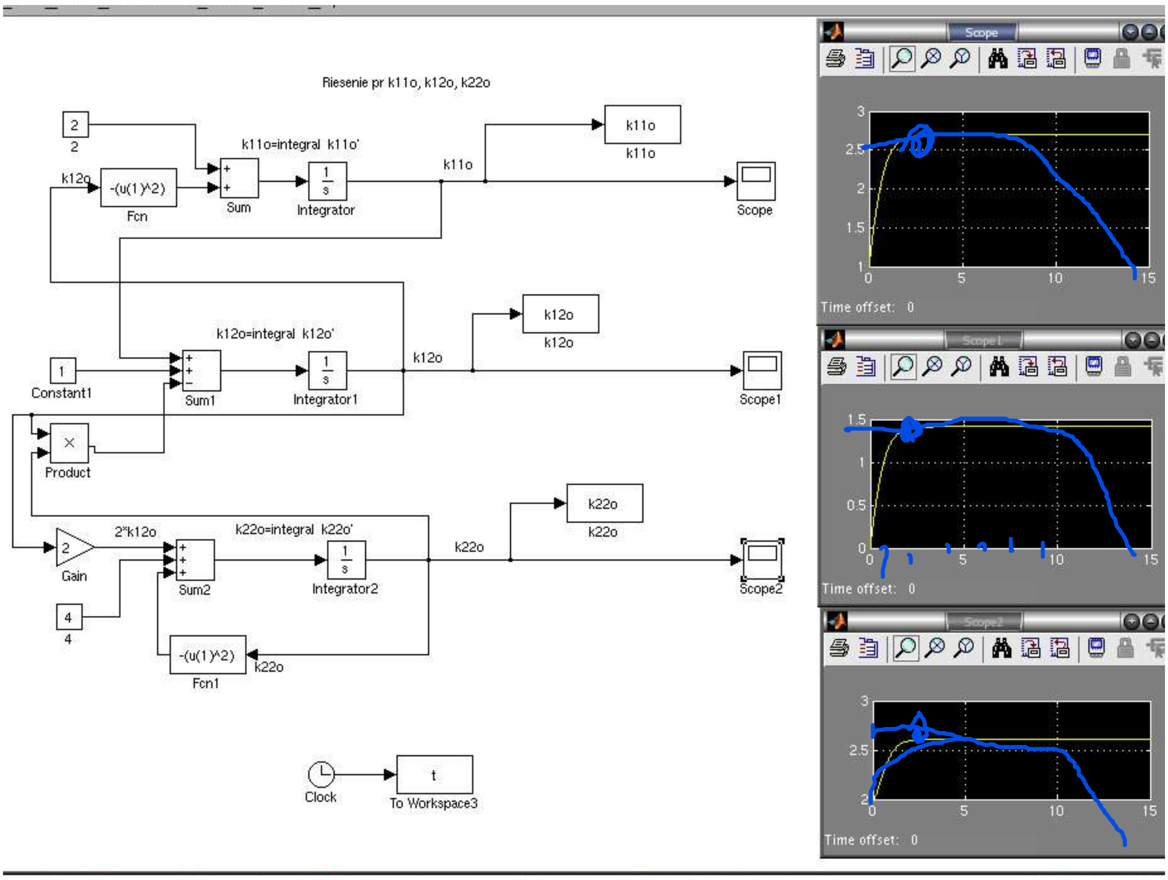
$k_{110}(0)=1$
$k_{120}(0)=0$
$k_{220}(0)=2$

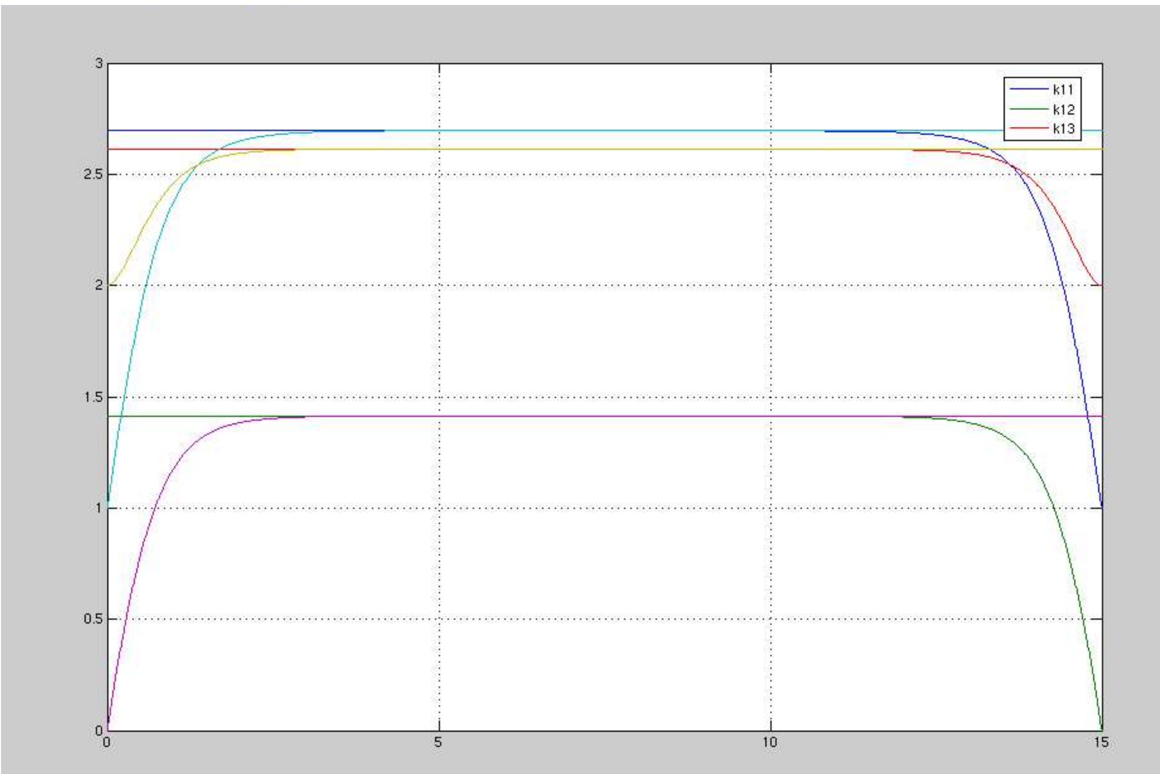
Teda výpočet bude nasledovný :

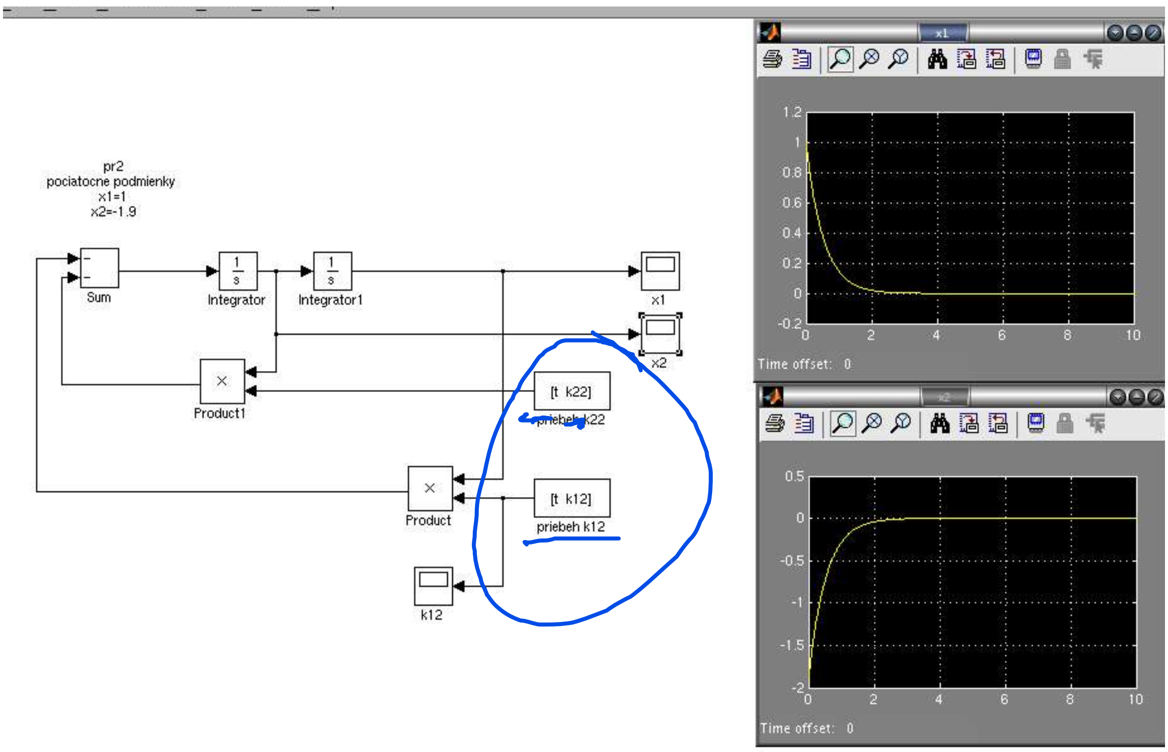


Po výpočte teda stačí obrátiť výsledok.
Štrukturálna schéma :




Riesenie pr k11o, k12o, k22o
k11o=integral k11o'
k12o=integral k12o'
k22o=integral k22o'
-(u(1)^2)
Fcn
Sum
Integrator
k11o
Scope
k12o
Constant1
Sum1
Integrator1
Scope1
Product
2*k12o
Gain
Sum2
Integrator2
k22o
Scope2
Fcn1
Clock
t
To Workspace3
Time offset: 0


k11
k12
k13


pr2
pociatocne podmienky
x1=1
x2=-1.9
Sum
Integrator
Integrator1
x1
x2
Product1
[t k22]
priebeh k22
[t k12]
priebeh k12
Product
k12
Time offset: 0
Time offset: 0