# Riešenie dvojbodovej okrajove úlohy - Van der Pólov oscilátor

## Úloha na pevný pravý koniec

Úlohou je nájsť optimálne riadenie $u(t)$, ktoré prevedie systém diferenciálnych rovníc:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + (1 - x_1^2) * x_2 + u$$

z počiatočného stavu $x_1(0) = 0{,}4$; $x_2(0) = 1$ do koncového stavu $x_1(T) = 1$ a $x_2(T) = 0.2$, pričom sa minimalizuje funkcionál:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + u^2)dt$$

## Riešenie:

1. Zadefinovanie počiatočných $x_0$ a koncových podmienok $x_T$ pre stavové premenné nelineárneho systému
2. Zostavenie hamiltonovej funkcie:

$$H = -J + \sum_{i=1}^{n} p_i * \dot{x}_i$$

kde n je počet diferenciálnych rovníc prvého rádu.

3. Vytvorenie kovektora $p$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

4. Voľba počiatočných hodnôt pre kovektor stavu $p$
5. Vytvorenie korekčných rovníc:

$$\dot{U}_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i\big(\bar{x}(t), p(t)\big)}{\partial x_k(t)} * U_{kj}(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i\big(\bar{x}(t), p(t)\big)}{\partial p_k(t)} * V_{kj}(t)$$

$$\dot{V}_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i\big(\bar{x}(t), p(t)\big)}{\partial x_k(t)} * U_{kj}(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i\big(\bar{x}(t), p(t)\big)}{\partial p_k(t)} * V_{kj}(t)$$

6. Voľba počiatočných hodnôt pre korekčné rovnice (citlivostné rovnice)
7. Výpočet korekcií $\Delta p_i(0)$ - riešenie sústavy algebraických rovníc $\Delta {p_i}^{(k+1)}$

$$x_i^k(T) - x_{iT} = -\sum_{l=1}^{n} U_{il}(T)\,\Delta {p_l}^{(k+1)}$$

Kde počiatočné hodnoty $p_i^{(k+1)}$ určíme:

$$p_i^{(k+1)}(0) = p_i^k(0) + \Delta p_i^{(k+1)}$$

8. Test na splnenie koncovej podmienky $|x_{iT} - x_i(T)| < \varepsilon$ ($x_{iT}$ – aktuálna, $x_i(T)$ - požadovaná)

# Rovnice:

Hamiltonián:

$$H = -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + u^2) + p_1 x_2 + p_2 * (-x_1 + (1 - x_1^2) * x_2 + u)$$

Substitučný kanonický tvar diferenciálnych rovníc popisujúcich systém:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = p_2 - x_1 - x_2 * ({x_1}^2 - 1)$$

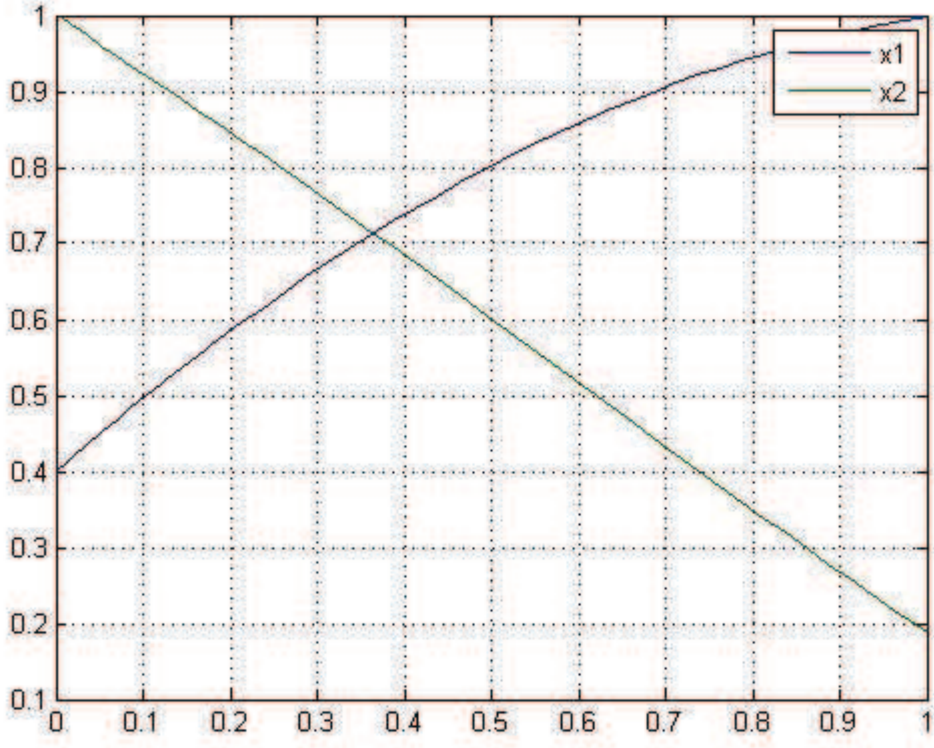
Kovektory stavu:

$$\dot{p}_1 = x_1 + p_2 * (2 * x_1 * x_2 + 1)$$
$$\dot{p}_2 = x_2 - p_1 + p_2 * ({x_1}^2 - 1)$$

Korekčné rovnice:

$$\dot{U}_{11} = U_{21}$$
$$\dot{U}_{12} = U_{22}$$
$$\dot{U}_{21} = V_{21} - U_{21} * ({x_1}^2 - 1) - U_{11} * (2 * x_1 * x_2 + 1)$$
$$\dot{U}_{22} = V_{22} - U_{22} * ({x_1}^2 - 1) - U_{12} * (2 * x_1 * x_2 + 1)$$
$$\dot{V}_{11} = U_{11} * (2 * x_2 * p_2 + 1) + V_{21} * (2 * x_1 * x_2 + 1) + 2 * x_1 * p_2 * U_{21}$$
$$\dot{V}_{12} = U_{12} * (2 * x_2 * p_2 + 1) + V_{22} * (2 * x_1 * x_2 + 1) + 2 * x_1 * p_2 * U_{22}$$
$$\dot{V}_{21} = U_{21} - V_{11} + V_{21} * (x_1^2 - 1) + 2 * x_1 * p_2 * U_{11}$$
$$\dot{V}_{22} = U_{22} - V_{12} + V_{22} * ({x_1}^2 - 1) + 2 * x_1 * p_2 * U_{12}$$

Riešenie v prostredí Matlab:




**Obrázok 1 dvojbodová okrajová úloha - pevný koniec**

K3. počiatočné hodnoty $p_i^{k+1}$ určíme :

$$\boxed{p_i^{k+1}(0) = p_i^{k}(0) + \Delta p_i^{(k+1)}} \qquad (5\text{-}6)$$

nová hodnota   predošlá iterácia   korekcia sa vypočíta

Body K1, K2, K3 opakujeme dovtedy, kým sa vypočítané hodnoty $\boxed{x_i^k(T)}$ nepriblížia čo najviac k požadovaným hodnotám $\boxed{x_{iT}}$ (zadané v okrajovej podmienke).

Príklad 1: Úloha na pevný pravý koniec

Uvažujme NDS reprezentovaný Van-der-Polovým oscilátorom :

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + (1-x_1^2).x_2 + u \end{aligned}} \qquad (1)$$

Úlohou je nájsť optimálne riadenie $u(t)$, ktoré prevedie systém (1) z poč. stavu $x_1(0) = 0.4$ ; $x_2(0) = 1 \rightarrow$ $\Rightarrow$ do koncového stavu : $x_1(T) = 1$ ; $x_2(T) = 0.2$ ; pričom sa minimalizuje funkcionál :

$$\boxed{J = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x_1^2 + x_2^2 + u^2\right) dt} \qquad (2)$$

Riešenie :

1. Vytvoriť Hamiltonovu funkciu :

$$H = -\frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + u^2\right) + p_1 x_2 + p_2\left(-x_1 + u + (1-x_1^2)x_2\right) \qquad (3)$$

1.5-P-ONS

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x} \rightarrow \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\left(-x_1 - p_2 - 2p_2 x_1 x_2\right) =$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{p}_1 &= x_1 + p_2(1 + 2x_1x_2) \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} &= x_2 - p_1 - p_2(1 - x_1^2) \end{aligned}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \iff -u + p_2 = 0 \Rightarrow \boxed{u = p_2} \qquad (5)$$

(2)
$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x, p) = x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x, p) = -x_1 + p_2 + (1 - x_1^2)x_2 \end{aligned}\right\} \dot{x} =$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{p}_1 &= g_1(x, p) = x_1 + p_2(1 + 2x_1x_2) \\ \dot{p}_2 &= g_2(x, p) = x_2 - p_1 - (1 - x_1^2)p_2 \end{aligned}\right\} \dot{p} = \cdot$$

$\boxed{\begin{aligned} x_1(0) &= 0.4 \\ x_1(1) &= 1 \end{aligned}}$ ; $\boxed{\begin{aligned} x_2(0) &= 1 \\ x_2(1) &= 0.2 \end{aligned}}$ $\rightarrow$ Dyn. systém / $\rightarrow$ Konjug. syst.

$\boxed{p_i(0) = }$

(3) **CITLIVOSTNÉ ROVNICE**

$$\left[\begin{aligned} \dot{U}_{11} &= U_{21} \quad ; \quad \dot{U}_{12} = U_{22} \\ \dot{U}_{21} &= (-1 - 2x_1x_2)U_{11} + (1 - x_1^2)U_{21} + V_{21} \\ \dot{U}_{22} &= (-1 - 2x_1x_2)U_{12} + (1 - x_1^2)U_{22} + V_{22} \end{aligned}\right\} \dot{U}_i$$

$$\left[\begin{aligned} \dot{V}_{11} &= (1 + 2p_2x_2)U_{11} + 2x_1p_2 U_{21} + (1 + 2x_1x_2)V_{21} \\ \dot{V}_{12} &= (1 + 2p_2x_2)U_{12} + 2x_1p_2 U_{22} + (1 + 2x_1x_2)V_{22} \\ \dot{V}_{21} &= 2x_1p_2 U_{11} + U_{21} - V_{11} + (x_1^2 - 1)V_{21} \\ \dot{V}_{22} &= 2x_1p_2 U_{12} + U_{22} - V_{12} + (x_1^2 - 1)V_{22} \end{aligned}\right.$$

$\boxed{V_{11}(0) = 1 \ ; \ V_{12}(0) = 0 \ ; \ V_{21}(0) = 0 \ ; \ V_{22}(0) = 1}$ $\boxed{U_{ij}(0) = 0}$ $i = 1, 2$; $j = 1, 2$

· Výpočet korekcií $\Delta p_i(0)$ → riešiť sústavu algebraických rovníc (5-5) → $\Delta p_i^{k+1}$

⑤ Test na splnenie koncovej podmienky: $|x_{iT} - x_i(T)| < \varepsilon$

⇓ vyriešiť algoritmicky v sim. j. MATLAB

PR2: Nájdite riadenie $u(t)$, ktoré systém (8)

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= u(t) - x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) - x_1(t)x_2(t) \end{aligned}}$$

(8) prevedie z poč. stavu $x_1(0)=0$, $x_2(0)=1$ do koncového stavu

$x_1(1) = 1$; $x_2(1) = 2$ a minimalizuje funkcionál $J(u)$:

$$J(u) = \int_0^1 \overbrace{[1 + x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)]}\, dt .$$

Riešenie daného pr. vykonajte numericky v sim. j. M/S

Tlačte jednotlivé iterácie pre $x_1(t)$, $x_2(t)$ a výsledné $u^*(t)$.

① HAMILTONOVÁ FUNKCIA:

$$H(x,u,t) = -(\underbrace{1 + x_1^2 + x_2^2 + u^2}) + (u - x_2^2)p_1 + (u - x_1x_2)p_2 \quad (9)$$

② Vytvoriť $\dot{p}_1(t)$ a $\dot{p}_2(t)$:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2p_2 \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = x_1p_2 + 2x_2(1+p_1) \end{aligned}}$$

→ (10) systém združených DR

③ V zmysle Pontrjaginovho PMaxima → optimálne riadenie maximalizuje Hamiltonovu fciu ⇒ musí vyhovovať podmienke:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + p_1 + p_2 = 0 \Rightarrow \boxed{u(t) = 0{,}5(p_1 + p_2)} \quad (11)$$

④ Dosadením $u(t) \leftrightarrow (11)$ do $(10) \rightarrow$ združený SDR : 5-P-ONS-6

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x,p) = -x_2^2 + 0{,}5\,(p_1+p_2) & ; \; x_1(0)=0 \; ; \; x_1(1)=1 \\ \dot{x}_2 = f_2(x,p) = -x_1x_2 + 0{,}5\,(p_1+p_2) & ; \; x_2(0)=1 \; ; \; x_2(1)=2 \, . \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = g_1(x,p) = 2x_1 + x_2 p_2 \\ \dot{p}_2 = g_2(x,p) = x_1 p_2 + 2x_2(p_1+1) \end{cases}$$

$p_i(0) = ?$
iteračne $\Leftrightarrow$ aby hľadali

⑤ Výpočet citlivostných rovníc $\rightarrow$ zostaviť ich (Symb. MATH TOOL)

$$\dot{U}_{11} = -2x_2\,U_{21} + 0{,}5\,V_{11} + 0{,}5\,V_{21} ; \qquad U_{11}(0)=0$$

$$\dot{U}_{12} = -2x_2\,U_{22} + 0{,}5\,V_{12} + 0{,}5\,V_{22} ; \qquad U_{12}(0)=0$$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Za nulté priblíženie poč. hodnôt združených premenných $p_1(0) = p_2(0) = 1$. Vypočítajte hodnotu funkcionálu $J(u) = \dots$

II. Úlohy s voľným pravým koncom $\rightarrow$ oproti prípadu I. sa líšia tým, že v čase $t=T$ hodnoty premenných $x_1(t)$ a $x_2(t)$ nie sú predpísané ($x(0)=$ a $p(T)=0$)

Metóde CR $\cong$ korekčných funkcií možno použiť avšak pre výpočet korekcií počiatočných hodnôt združených premenných využívame hodnoty korekčných funkcií $V_{ij}(t)$ v čase $t=T$ :

hľadáme (počítame

$$\boxed{\; \overset{k}{p}_i(T) = -\sum_{l=1}^{n} \underbrace{\overset{k}{V}_{il}(T)}\, \overset{k+1}{\Delta p_l} \qquad i = 1,2,\dots,n \;}$$

?

Pr: $\dot{x}(t) = -x(t) - \dfrac{x^3(t)}{3} + u(t)$ ; $x(0)=0$ ; $\Big\}$ $p(1)=0$

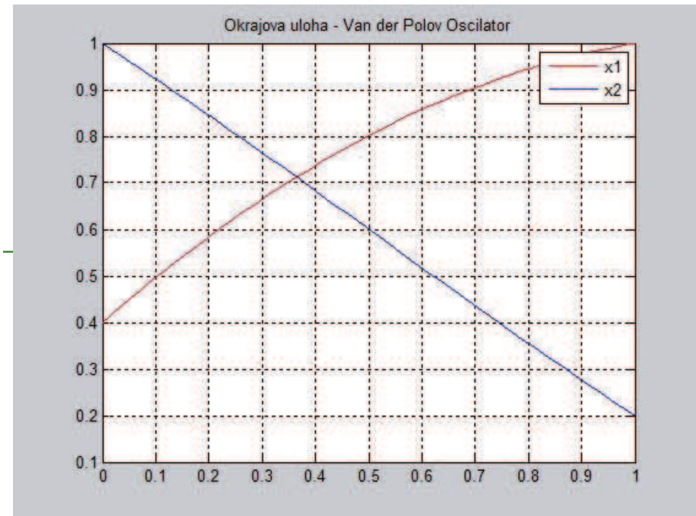
$J(u) = 1/2 \int_0^1 [\,x^2 + u^2\,]\,dt \rightarrow MIN$ $\Big\}$ $p(0) =$

Dvojbodova okrajova uloha – Van der Polov oscilator

```
function xder = citlivostneRovOkrajUloha( t,x )
% citlivostne rovnice pre vypocet okrajovej ulohy Van der Polovho
% oscilatora

% ktore premenne odpovedaju ktorym castiam (2+2+4+4)=12 rovnic
% d x1=x(1)
% d x2=x(2)
% d p1=x(3)
% d p2=x(4)
% d u11=x(5)
% d u12=x(6)
% d u21=x(7)
% d u22=x(8)
% d v11=x(9)
% d v12=x(10)
% d v21=x(11)
% d v22=x(12)

xder=[  x(2);
        -x(1)+x(4)+(1-(x(1)^2))*x(2);
        x(1)+x(4)*(1+2*x(1)*x(2));
        x(2)-x(3)-(1-x(1)^2)*x(4);
        x(7);
        x(8);
        (-1-2*x(1)*x(2))*x(5)+(1-x(1)^2)*x(7)+x(11);
        (-1-2*x(1)*x(2))*x(6)+(1-x(1)^2)*x(8)+x(12);
        (1+2*x(4)*x(2))*x(5)+2*x(1)*x(4)*x(7)+(1+2*x(1)*x(2))*x(11);
        (1+2*x(4)*x(2))*x(6)+2*x(1)*x(4)*x(8)+(1+2*x(1)*x(2))*x(12);
        2*x(1)*x(4)*x(5)+x(7)-x(9)+(x(1)^2-1)*x(11);
        2*x(1)*x(4)*x(6)+x(8)-x(10)+(x(1)^2-1)*x(12)
      ];
return

 ////////////////////////////////////////////////////////////////////////

% hlavny program pre vypocet okrajovej ulohy pre Van der Polov oscilator
% SKT:  x1' = x2;
%       x2' = -x1 + (1-x1^2)*x2 +u;
% Ulohou je riadit system z pociatocneho stavu:
% x1(0) = 0.4
% x2(0) = 1
% do koncoveho stavu:
% x1(T) = 1
% x2(T) = 0.2
% kde T = 1, pricom funkcional:
% J = (1/2) * int[0 -> 1]{x1^2(t) + x2^2(t) + u^2(t)}dt --> min
% ----------------------------------------------------------------------
% 1. zadefinujem si Hamiltonovu funkciu:
%   H = -J + sum[i=1 -> n]{p(i)*x'(i)} kde, n - pocet dif. rovnic
%
% 2. vytvorim kovektor stavu:
%             dH
% p'(i) = -  ----   kde i - pocet stavov, teda rovnic
%            dx(i)
```

Dvojbodova okrajova uloha – Van der Polov oscilator

```
%        dH
% 0 =  ----
%        du
% -------------------------------------------------------------------
% ktore premenne odpovedaju ktorym castiam (2+2+4+4)=12 rovnic
% d x1=x(1)
% d x2=x(2)
% d p1=x(3)
% d p2=x(4)
% d u11=x(5)
% d u12=x(6)
% d u21=x(7)
% d u22=x(8)
% d v11=x(9)
% d v12=x(10)
% d v21=x(11)
% d v22=x(12)
% ---------------------------------
```




```
clear all
clc

% pociatocne a koncove podmienky
x1poc = 0.4;
x2poc = 1;
x1konc = 1;
x2konc = 0.2;
p1poc = 0;
p2poc = 0;

eps = 0.001; % presnost
[t,x]=ode45('citlivostneRovOkrajUloha',[0
1],[x1poc,x2poc,p1poc,p2poc,0,0,0,0,1,0,0,1]);

while ( abs(x(end,1)-x1konc)>eps || abs(x(end,2)-x2konc)>eps ) % kontrola
presnosti
    [t,x]=ode45('citlivostneRovOkrajUloha',[0
1],[x1poc,x2poc,p1poc,p2poc,0,0,0,0,1,0,0,1]);

    % prepocty delt kovektora p
    c = [ x(end,1)-x1konc;
          x(end,2)-x2konc ]; % aktualna - koncova
    e = [ -x(end,5:6);
          -x(end,7:8) ]; % 4 konecne hodnoty matic U
    dp = inv(e)*c;
    p1poc=x(1,3)+dp(1);
    p2poc=x(1,4)+dp(2);
end

plot(t,x(:,1),'r',t,x(:,2),'b')
grid on
title('Okrajova uloha - Van der Polov Oscilator')
legend('x1','x2')
```