

# 6 TEORIE NELINEÁRNÍHO ŘÍZENÍ

## 6.1 Nelineární systém

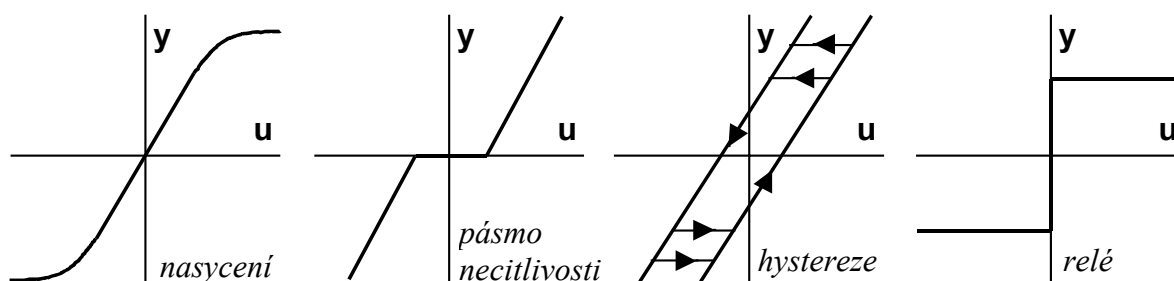
Lineární systémy řízení jsou popsány lineárními diferenciálními rovnicemi. Tyto systémy dovedeme poměrně jednoduše řešit, ale ve skutečnosti jsou jen určitou aproximací, neboť každý fyzikální systém je v podstatě nelineární. Mnohé nelineární systémy je však možno v určité oblasti a za určitých podmínek vyšetřovat jako lineární s dostatečnou přesností. Ale není to možné u všech systémů. Proto se musíme také seznámit alespoň se základy teorie pro vyšetřování nelineárních systémů.

S lineárností a nelineárností prvků systémů i systémů samých jsme se již seznámili v kapitole 3.3: Statické a dynamické vlastnosti regulačních členů. Připomeňme: Je-li statická charakteristika regulačního členu nebo obecně prvku systému přímka, jedná se o lineární člen či prvek systému. Není-li přímka, jedná se o nelineární člen. Lineární systém má všechny prvky lineární; jeden nelineární prvek znamená nelineárnost celého systému.

**Nelineární systém je soubor jednotlivých prvků, z nichž alespoň jeden je nelineární. Nelineární regulační obvod je takový, kdy alespoň jeden z jeho prvků je nelineární.**

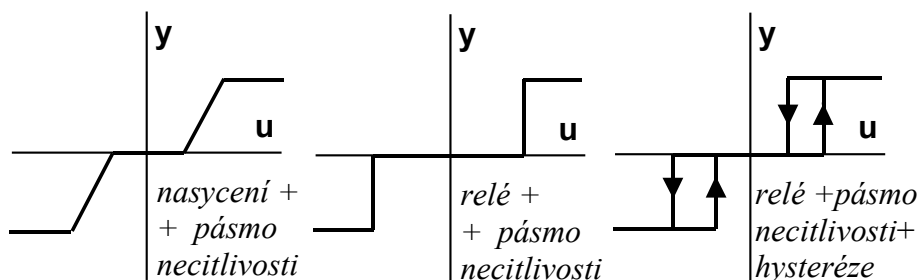
Většina regulačních členů má nelineární statickou charakteristiku. Ovšem některé z nich je možno uvažovat jako podstatně nelineární a jiné slabě nelineární. Při matematickém rozboru se slabě nelineární charakteristiky nahrazují přímkami a člen se řeší jako lineární člen. Prakticky nevykazují členy při takovéto náhradě odchylek od lineárních členů.

Za podstatně nelineární charakteristiku pokládáme takovou, kterou nelze matematicky popsat v celém rozsahu změn vstupní veličiny jednou rovnicí přímky. Taková charakteristika může pouze sestávat ze dvou anebo více přímkových úseků. Existuje ještě jedna zvláštnost některých nelineárních charakteristik – nejednoznačná závislost výstupní veličiny na vstupní.



Obr. 6.1

Statické charakteristiky nelineárních regulačních členů mohou být buď křivky s obecným průběhem anebo se vyskytují ve tvaru tzv. **typických nelinearit** (velmi častý případ). Typické nelinearity jsou znázorněny na obr. 6.1 – to jsou základní typické nelinearity a na obr. 6.2 – to jsou kombinace těchto základních typických nelinearit.



Obr. 6.2

V nelineárních obvodech neplatí princip superposice. Z toho důvodu nemůže být nalezena odezva na libovolný vstupní signál jako suma reakcí na posloupanost skoků nebo impulsů. Odezva nelineárního obvodu na skokovou změnu jej necharakterizuje, neboť není nezávislá na velikosti skoku.

Následkem neplatnosti principu superpozice je také nepoužitelnost extrapolace. Známé chování nelineárního obvodu při daném jednotkovém skoku nedovoluje dělat závěry o charakteru reakce na skok větší či menší velikosti. Dokonce u některých nelineárních obvodů může změna velikosti vstupního skoku změnit stabilní přechodový děj v nestabilní nebo naopak.

Frekvenční metody, které byly vyvinuty pro lineární systémy jsou pro nelineární systémy nepoužitelné. Je-li totiž na vstupu sinusová či obecně harmonická funkce, není sinusová funkce na výstupu. Tím není možno použít frekvenčního přenosu, který pro lineární systémy předpokládá sinusové vstupní i výstupní kmity. A frekvenční přenos je východiskem všech frekvenčních metod, počínaje frekvenčními charakteristikami.

U nelineárních systémů nelze použít Laplaceovy transformace, nelze zavést pojem přenos, a tím se výpočet nelineárních obvodů stává daleko složitější, než byl výpočet lineárních obvodů. Pro řešení nelineárních obvodů neexistuje ani „universální“ metoda, ani „zcela přesná“ metoda. Pro jejich řešení existuje více metod, z nichž každá je vhodná pro jiný typ obvodu, pro jinou nelinearitu a pro různé cíle výpočtu. Všechny metody jsou přibližné, jejich přesnost závisí na velikosti kroku výpočtu, délce volených intervalů, ...

Obecně můžeme rozdělit metody řešení nelineárních obvodů na **numerické, simulační a grafické** či **graficko-analytické**.

**Numerické metody** jsou v podstatě numerické metody řešení diferenciálních rovnic. V matematice existuje celá řada numerických metod pro řešení diferenciálních rovnic, které se zhruba dají rozdělit na jednokrokové a vícekové (jednokrokové počítají funkční hodnotu v daném bodě z jedné předcházející, vícekové z několika předcházejících funkčních hodnot).

U těchto metod je zcela lhostejné, jestliže se jedná o lineární či nelineární diferenciální rovnice. Dnes existuje celá řada softwarových produktů, které umožňují řešení diferenciálních rovnic. Uživatel nemusí vůbec ovládat numerické metody pro řešení diferenciálních rovnic, pokud je tímto software vybaven. Co však umět musí, jsou základy řešení nelineárních regulačních systémů, aby pochopil zvláštnosti, které se u nelineárních systémů vyskytují a které nemají žádnou analogii u systémů lineárních. Nevýhodou numerických metod je skutečnost, že dávají řešení pouze pro jedny parametry a jedny počáteční podmínky a neumožňují celkový přehled o tom, pro které parametry je obvod stabilní a pro které nestabilní a proč se někdy chová tak a jindy právě opačně.

**Simulační metody** mají svůj základ také v numerickém řešení diferenciálních rovnic, ale pracují typicky simulačním způsobem na počítači. Na počítači se sestavuje simulační model regulačního obvodu z bloků příslušného simulačního jazyka, na jeho vstup se přivádí vstupní funkce a sleduje odezva.

Nejznámějším simulačním jazykem pro modelování regulačních systémů je produkt MATLAB a jeho simulační doplněk SIMULINK plus tzv. toolboxy pro řízení, identifikaci atd., které jsou používány v celém světě. Tyto programy jsou samozřejmě jak pro nelineární, tak i pro lineární systémy a také pro fuzzy řízení a pro mnoho dalších aplikací. O nich bude ještě mluveno v dalším.

Základem **grafických metod** je metoda **stavové roviny**. Má sice nedostatek v tom, že je použitelná pouze pro obvody druhého řádu (přejdeme-li do prostoru, přejde v metodu stavového prostoru, umožňující řešit obvody třetího řádu). Ale výsledky řešení dávají celkový obraz

chování systému a můžeme je obdržet pro celou řadu počátečních podmínek, pro různé vstupní funkce, pro různé nelinearity či parametry nelinearity. Základem metody je grafické řešení nelineární rovnice prvního řádu. Vyšetřuje vlastnosti obvodu v tzv. stavové rovině, jejímiž souřadnicemi jsou vyšetřovaná veličina (nejčastěji regulovaná) a její derivace. Výsledky se dají rozšířit i na obvody vyšších řádů než je druhý.

Mezi **grafické** či **graficko-analytické metody** můžeme zařadit i **frekvenční metody** řešení nelineárních systémů, především metodu **ekvivalentního přenosu**. Tato metoda rozšiřuje použití frekvenčních charakteristik i na nelineární systémy. Ekvivalentní přenos předpokládá linearizaci ve frekvenční oblasti. Dostaneme ho za předpokladu, že vstupní veličina nelineárního členu je sinusová a výstupní může být nahrazena první harmonickou rozkladu ve Fourierovu řadu. Při použití metody ekvivalentního přenosu se využívá lineárních frekvenčních metod, ale v jejich použití jsou některé zvláštnosti. Nezastupitelné místo má metoda ekvivalentního přenosu při vyšetřování autooscilací v nelineárních obvodech.

## 6.2 Metoda stavové roviny

### 6.2.1 Základní vztahy metody

Kdybychom měli lineární systém o přenosu řízení podle (3.101)

$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

a rovnici řízení (3.103)

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m w^{(m)}(t) + \dots + b_1 w'(t) + b_0 w(t)$$

byla by to rovnice buzeného systému, kde vstup je samozřejmě řídicí veličina  $w$ . Kdybychom ji položili rovnu nule, dostaneme rovnici autonomního lineárního systému

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \quad (6.1)$$

Zde jsou koeficienty  $a_0, a_1, \dots, a_n$  konstantními koeficienty. Budou-li ale místo těchto koeficientů funkce  $y$ , např.

$$y'''(t) + y^2(t)y''(t) + (1 - y(t))y'(t) + 2y(t) = 0$$

dostaneme rovnici autonomního nelineárního systému – autonomního nelineárního regulačního obvodu.

Nelineární obvody uvažujeme vesměs autonomní s nulovou budící funkcí a buzení pak nahrazujeme některou nenulovou počáteční podmínkou.

V matematice se převádí nelineární diferenciální rovnice (6.1) substitucí

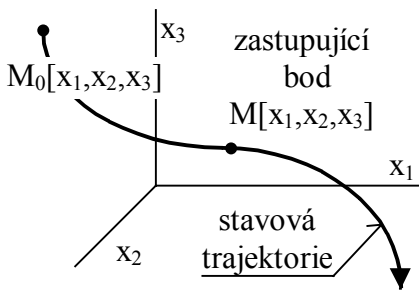
$$\begin{array}{|l} x_1 = y \\ x_2 = y' \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} \end{array} \quad \begin{array}{l} (= x'_1) \\ \\ \\ (= x'_{n-1}) \end{array} \quad (6.2)$$

na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned}
 x_1' &= x_2 \\
 x_2' &= x_3 \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_n' &= -\frac{a_0}{a_n}x_1 - \frac{a_1}{a_n}x_2 - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_n
 \end{aligned}
 \tag{6.3}$$

Tuto substituci lze také chápat jako zavedení stavových veličin. První stavová veličina  $x_1$  je výstupní veličina systému  $y$ , další stavové veličiny  $x_2, x_3, \dots, x_n$  jsou derivace výstupní veličiny  $y', y'', \dots$ . Tímto jsme převedli nelineární diferenciální rovnici autonomního obvodu (6.1)  $n$ -tého řádu, kde  $a_0, a_1, \dots, a_n$  jsou funkce  $y$ , na  $n$  diferenciálních rovnic prvního řádu.

Této soustavě lze přiřadit jednoduchou geometrickou interpretaci. Proměnné  $x_1, x_2, \dots, x_n$



budeme považovat za souřadnice tzv. zastupujícího bodu  $M$  v  $n$  – rozměrném prostoru. Každému bodu tohoto prostoru odpovídá určitý stav systému. Proto se tento prostor nazývá **stavový prostor**. Proměnné  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mají v každém časovém okamžiku určité hodnoty a určují tedy polohu zastupujícího bodu  $M$  v každém časovém okamžiku – obr. 6.3. Podle toho, jak se proměnné s časem mění, mění se i poloha zastupujícího bodu. Křivka, kterou přitom bod opisuje, se nazývá **stavová trajektorie**.

Obr. 6.3

Stavový prostor

**Stavovou trajektorii** rozumíme křivku ve stavovém prostoru, která spojuje všechny body  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , jimiž systém postupně při svém pohybu prochází. Čas systému se v této interpretaci stává nezávisle proměnnou parametrického vyjádření stavové trajektorie.

Přejdeme-li z  $n$  – rozměrného stavového prostoru do  $n = 2$ -rozměrného prostoru, přejdeme do stavové roviny. Rovnice (6.1) přejde do jednoduché rovnice

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \tag{6.4}$$

která se nejčastěji vyskytuje ve tvaru

$$\boxed{y'' + g(y') + f(y) = 0} \tag{6.5}$$

kde  $f(y), g(y')$  jsou nelineární funkce proměnných  $y$  a  $y'$ . Touto rovnicí jde popsat velmi mnoho nelineárních systémů, a proto ji budeme považovat za výchozí rovnici pro demonstraci metody stavové roviny. Zdůrazněme, že v této rovnici není explicitně vyjádřen čas.

Substituci zavedeme podle (6.2)

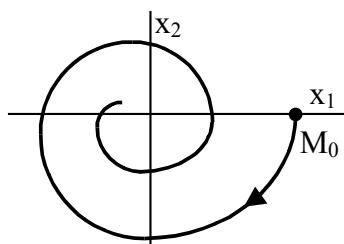
$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= y' \end{aligned}} \tag{6.6}$$

a touto substitucí převedeme rovnici (6.6) na soustavu rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned}
 x_1' &= \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\
 x_2' &= \frac{dx_2}{dt} = -g(x_2) - f(x_1)
 \end{aligned}
 \tag{6.7}$$

a podělením druhé rovnice první dostaneme

$$\boxed{\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{g(x_2) + f(x_1)}{x_2}} \tag{6.8}$$




Obr. 6.4 Stavová trajektorie

Toto je rovnice stavové trajektorie v diferenciálním tvaru. Kdybychom ji dovedli vyřešit, získali bychom skutečnou rovnici křivky ve stavové rovině a touto křivkou by byla stavová trajektorie. Rovnice (6.8) není sice obecně analyticky řešitelná, lze ale použitím některých grafických konstrukcí její řešení získat a tímto řešením je právě stavová trajektorie.

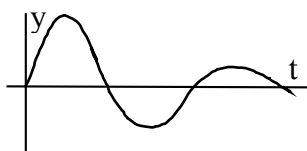
Podle obr. 6.4 je stavová trajektorie křivka ve stavové rovině. Jak souvisí stavová trajektorie s řešením původní rovnice (6.5)? Celý postup řešení rovnice (6.5) je na obr. 6.5.

**nelineární systém 2.řádu**  
**rovnice:**

$$y'' + g(y') + f(y) = 0$$

 přímé řešení  
není možné

**časový průběh**  
**regulované veličiny  $y(t)$ :**



možnost posouzení  
stability

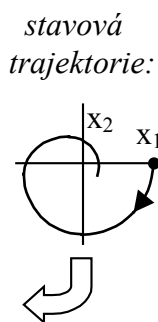
substituce:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{y} \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{y}' \end{aligned}$$

soustava rovnic 1.řádu:

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ x_2' &= \frac{dx_2}{dt} = -g(x_2) - f(x_1) \end{aligned}$$

převod do  
časové  
domény:



grafické  
konstrukce

diferenciální tvar rovnice  
stavové trajektorie:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{g(x_2) + f(x_1)}{x_2}$$

Obr. 6.5

Postup při řešení nelineárního systému metodou stavové roviny

Protože není možné přímé analytické ani grafické řešení výchozí nelineární diferenciální rovnice druhého řádu (6.5), převedeme tuto rovnici substitucí (6.6) na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu (6.7). **Ty bývají základem numerického řešení systému.** Při řešení metodou stavové roviny převedeme tuto soustavu na jednu diferenciální rovnici prvního řádu (6.8). Tuto rovnici dovedeme řešit graficky a to tak, že grafickými konstrukcemi nakreslíme její řešení a to je právě stavová trajektorie. Ta je ovšem v souřadnicích  $x_1 - x_2$ , čili ve stavové rovině. Stavová trajektorie nám sice umožní určit stabilitu daného nelineárního systému, ale to je většinou málo. Obvykle chceme řešení ve tvaru časového průběhu regulované veličiny  $y(t)$ , které je možné ze stavové trajektorie získat. Tímto problémem se zabývají metody vyjádření času ve stavové rovině.

## 6.2.2 Konstrukce stavové trajektorie

### a) Metoda izoklín

Metodou izoklín můžeme obecně řešit nelineární diferenciální rovnice prvního řádu

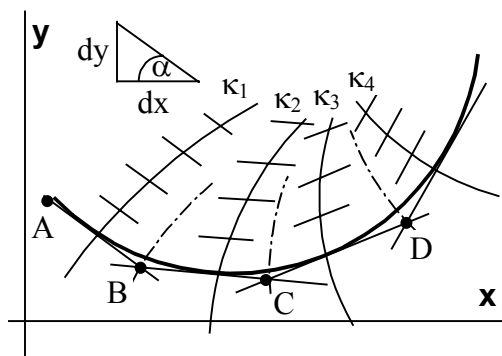
$$y' = f(x, y) \quad (6.9)$$

Touto rovnicí je určeno, že libovolnému bodu  $[x, y]$  je přiřazena směřnice  $y'$ , tj. směřnice tečny k řešení rovnice (6.9), kdyby toto řešení daným bodem  $[x, y]$  procházelo.

Podle metody izoklín volíme postupně za  $y'$  konstanty  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$  a v rovině  $x - y$  nakreslíme křivky

$$\kappa_i = f(x, y) \quad (6.10)$$

podle obr. 6.6. Tyto křivky nazýváme **izoklínami**, neboť jsou to geometrická místa bodů o stejné směrnici (k řešení dané diferenciální rovnice). Každé řešení rovnice (6.9) – tedy partikulární řešení – které prochází některým bodem izoklíny, musí mít v tomto bodě směrnici, která odpovídá dané izoklíně a je na ní vyznačena krátkými úseky. Proto na každou izoklínu nakreslíme krátké úseky o dané směrnici



Obr. 6.6

$$\kappa_i = \frac{dy}{dx} \quad (6.11)$$

(je-li např.  $\kappa_i = 2$ , je směrnice vedena pod úhlem  $\alpha$ , kde  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = 2$ , a tedy  $\alpha = \operatorname{arctg} 2 \cong 63,5^\circ$ ).

Máme-li sestavit řešení rovnice (6.9), procházející bodem  $A$  určeným počáteční podmínkou, postupujeme následovně: bodem  $A$  vedeme rovnoběžku s nejbližší směrnici (na nejbližší izoklíně) a to až do bodu  $B$ , který leží „uprostřed“ mezi dvěma izoklínami. Z tohoto bodu vedeme

rovnoběžku se směrnici odpovídající další izoklíně atd. Jsou-li izoklíny dostatečně husté, je lomená čára nahraditelná plynulou křivkou a ta je partikulárním řešením diferenciální rovnice (6.9).

Aplikujme nyní tuto matematickou metodu izoklín na řešení rovnice (6.8)

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{g(x_2) + f(x_1)}{x_2}$$

Je zřejmé, že řešení provádíme v souřadnicích  $x_1 - x_2$ , tj. ve stavové rovině. Za derivaci  $\frac{dx_2}{dx_1}$  pokládáme postupně konstanty  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$  a kreslíme izoklíny o rovnici

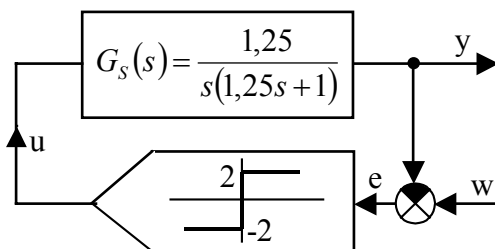
$$\kappa_i = -\frac{g(x_2) + f(x_1)}{x_2} \quad (6.12)$$

Počátečním bodem sestavujeme popsáním způsobem řešení rovnice (6.8) a to je stavová trajektorie.

**Příklad 6.1:** Řešte nelineární regulační obvod podle obr. 6.7, kde dvupolohovým regulátorem typu ideální relé regulujeme integrační regulovanou soustavu. Sestojte odezvu regulované veličiny na jednotkový skok řídicí veličiny na vstupu obvodu.

**Řešení:** Z přenosu regulované soustavy získáme její rovnici

$$1,25y'' + y' = 1,25u$$



Obr. 6.7

Ze vztahu  $e = w - y$  vyplývá  $y = w - e$ , což dosadíme do rovnice soustavy, abychom získali rovnici regulačního obvodu (rovnici dělíme hodnotou 1,25)

$$(w - e)'' + 0,8(w - e)' = u$$

Protože je  $w(t) = 1$ , je  $w' = w'' = 0$  a tedy

$$e'' + 0,8e' = -u$$

Zavedením substituce  $x_1 = e$ ,  $x_2 = e'$  dostaneme rovnice

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = -0,8x_2 - u$$

a jejich podělením dostaneme rovnici stavové trajektorie v diferenciálním tvaru

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{0,8x_2 + u}{x_2}$$

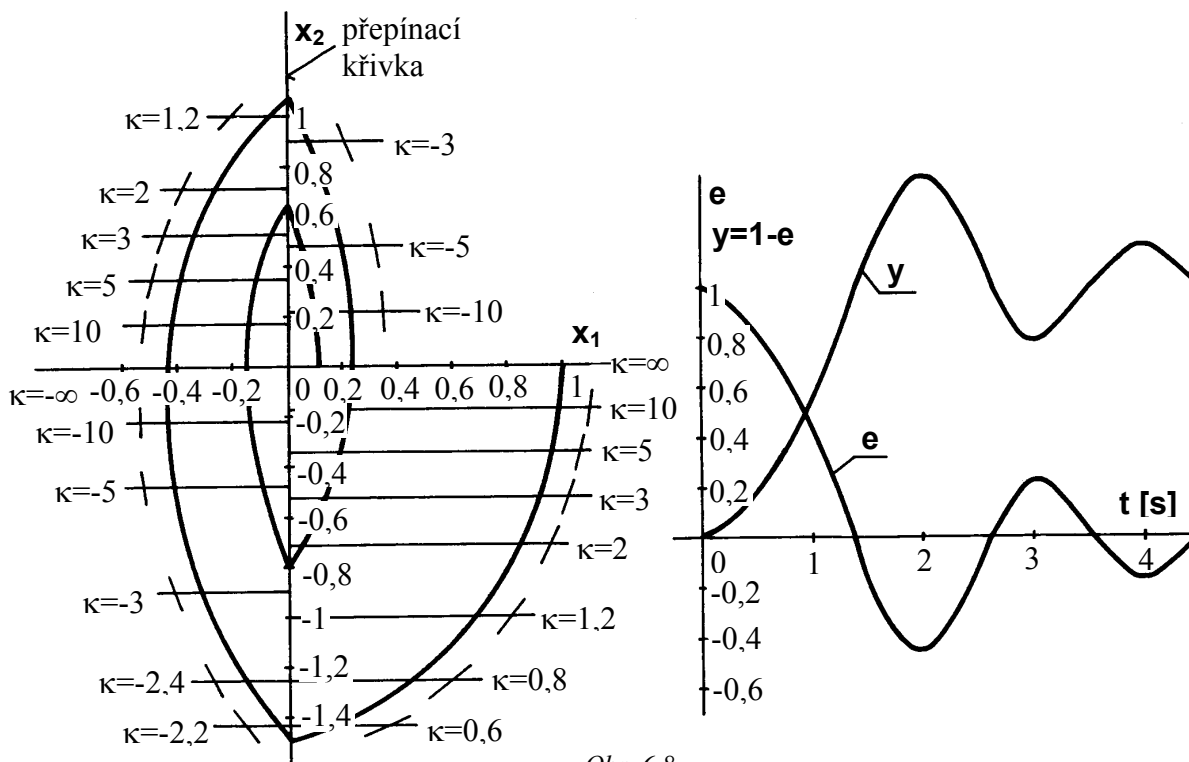
Akční veličina je  $u = 2$  pro  $e > 0$  (čili  $x_1 > 0$ ) a  $u = -2$  pro  $e < 0$  (čili  $x_1 < 0$ ). Tím pádem se rovnice stavové trajektorie rozpadne na dvě rovnice

$$x_1 > 0 : \quad \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{0,8x_2 + 2}{x_2}$$

$$x_1 < 0 : \quad \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{0,8x_2 - 2}{x_2}$$

$$\begin{array}{c} \boxed{\frac{dx_2}{dx_1}} \rightarrow x_2 = \frac{-2}{\kappa + 0,8} \\ \boxed{\frac{2}{dx_1}} \rightarrow x_2 = \frac{2}{\kappa + 0,8} \end{array}$$

Řešíme samostatně v pravé a levé polovině stavové roviny. Izoklíny jsou polopřímky rovnoběžné s osou  $x_1$  a celá konstrukce stavové trajektorie je na obr. 6.8 pro počáteční bod  $[1;0]$  (podle zadání řešíme odezvu na jednotkový skok řídicí veličiny  $w$  a proto musí být regulační odchylka  $e(0) = x_1(0) = 1$  a  $e'(0) = x_2(0) = 0$  ... je to vidět z obr. 6.8). Zjistíme, že křivka, kde regulátor přepíná je osa  $x_2$  (přepínací křivka). Na ní dochází vždy k ostrému zlomu stavové trajektorie.



Obr. 6.8

Časový průběh regulační odchylky  $e(t)$  lze zkonstruovat metodami, které budou uvedeny v další kapitole, ale na obr. 6.8 již tento průběh je. Známe-li průběh  $e(t)$  je snadné získat průběh regulované veličiny  $y(t)$  podle vztahu

$$y = w - e = I - e$$

protože jsme sestrojovali odezvu na jednotkový skok řídicí veličiny  $w(t)$ . Průběh  $y(t)$  je rovněž sestrojen na obr. 6.8.

#### b) Metoda pomocných křivek

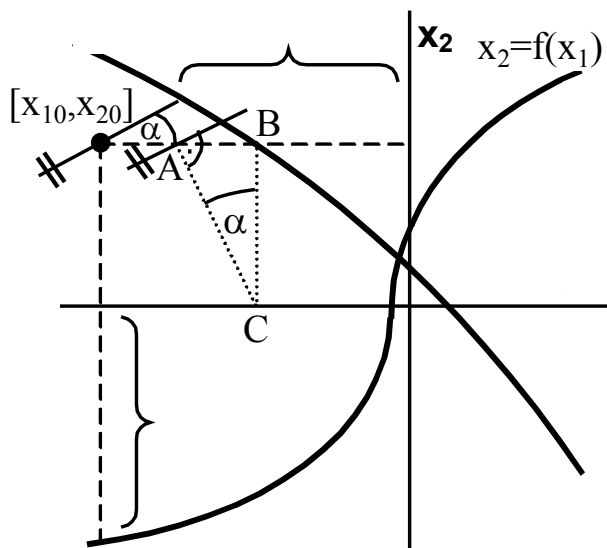
Rovnici izoklín nelze vždy tak jednoduše vyjádřit jako v předchozím příkladu. Zejména jestliže jsou funkce  $g(y)$  a  $f(y)$  složité anebo jsou dány experimentálně získanými charakteristikami. Pak je pro konstrukci stavové trajektorie výhodný následující grafický způsob. Jeho výhoda spočívá také v tom, že nemusíme kreslit celé pole izoklín jako u metody izoklín, ale v podstatě kreslíme jenom ty izoklíny, kudy stavová trajektorie prochází.

Metoda izoklín nám ukázala, že nelineárnímu systému popsanému rovnicí (6.8) můžeme ve stavové rovině sestrojit pole izoklín. V každém bodě stavové roviny tedy existuje směrnice k stavové trajektorii, kdyby tudy stavová trajektorie (při vhodné počáteční podmínce) procházela. Metoda pomocných křivek je právě metoda, která nám tuto směrnici v libovolném bodě stavové roviny umožňuje sestrojit.

Ve stavové rovině sestrojíme dvě pomocné křivky o rovnicích

$$\begin{aligned} x_1 &= -g(x_2) \\ x_2 &= f(x_1) \end{aligned} \quad (6.13)$$

kde funkce  $g(x_2)$  a  $f(x_1)$  vezmeme z čitatele pravé strany rovnice (6.8). Směrnici stavové trajektorie v libovolném bodě  $[x_{10}; x_{20}]$  stavové roviny pak sestrojíme takto – obr. 6.9:



Obr. 6.9

Daným bodem vedeme rovnoběžky se souřadnými osami  $x_1, x_2$ . Pořadnici  $a = f(x_{10})$  nanese od osy  $x_2$  na rovnoběžku s osou  $x_1$  a dostaneme bod A. Z průsečíku této rovnoběžky s pomocnou křivkou  $x_1 = -g(x_2)$ , označíme ho jako bod B, spustíme kolmici na osu  $x_1$  – označíme jako bod C. Kolmice ke spojnici AC pak udává směrnici stavové trajektorie v daném bodě  $[x_{10}; x_{20}]$ .

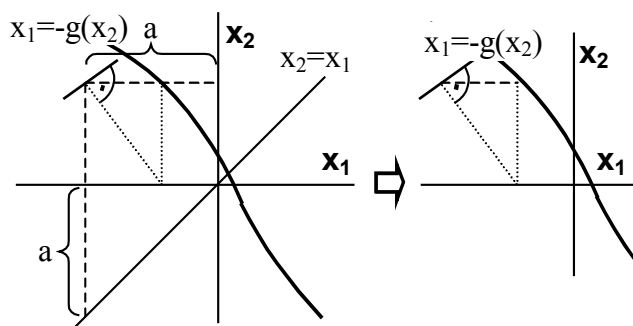
Správnost konstrukce vyplývá ze vztahu

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_{10}) - [g(x_{20})]}{x_{20}} = \frac{f(x_{10}) + g(x_{20})}{x_{20}}$$

kde  $\operatorname{tg} \alpha$  je směrnice stavové trajektorie a ta odpovídá rovnici (6.8). Znaménko směrnice je kladné proto, že pro případ na obrázku 6.9 je  $f(x_1) < 0, g(x_2) < 0$ .

Lienard ukázal výhodu této metody pro případy, kdy v rovnici (6.5) je  $f(y)$  lineární funkcí, což bývá poměrně často. Tuto rovnici pak známou substitucí převedeme na tvar





Obr. 6.10

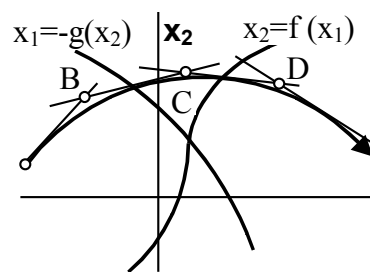
$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{g(x_2) + x_1}{x_2} \quad (6.14)$$

Budeme-li aplikovat uvedenou metodu sestavení směrnice stavové trajektorie na tento případ zjistíme, že pomocná křivka  $x_2 = f(x_1)$  je zde přímkou  $x_2 = x_1$  jdoucí počátkem pod úhlem  $45^\circ$ . Konstrukce směrnice se zde redukuje na sestavení pravoúhlého

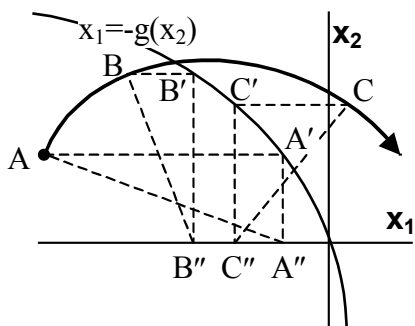
trojúhelníku a přímkou  $x_2 = x_1$  není vůbec zapotřebí sestavovat. Uvedená konstrukce pro lineární funkce  $f(y)$  se nazývá Lienardovou konstrukcí.

Nyní dovedeme sestavit v libovolném bodě stavové roviny směrnici k stavové trajektorii (buď obecnou metodou nebo Lienardovou konstrukcí). Jak nyní sestavit stavovou trajektorii?

Řešme úlohu sestavit stavovou trajektorii obvodu popsaného rovnicí (6.5) a vyhovující počáteční podmínce, zobrazené bodem  $A$  ve stavové rovině. Sestavíme pomocné křivky o rovnicích (6.13). V případě, že  $f(y)$  je lineární funkce, druhou křivku nekreslíme. V bodě  $A$  sestavíme směrnici stavové trajektorie (obecnou metodou nebo Lienardovou konstrukcí). V blízkém bodě na této směrnici (označme ho  $B$ ) znovu sestavíme směrnici stavové trajektorie. Na ni zvolíme blízký bod (označme ho  $C$ ) a v něm ... Jestliže body  $A, B, C, \dots$  volíme dostatečně blízko sebe, je obálka směrnic v těchto bodech stavová trajektorie – obr. 6.11.



Obr. 6.11



Někdy je výhodné, zvláště je-li  $f(y)$  lineární funkce, nahrazovat směrnice kruhovými oblouky, jak je to naznačeno na obr.6.12. Stavová trajektorie se skládá z krátkých kruhových obloučků, opisovaných z bodů  $A'', B'', \dots$  jako středů, přímo v bodech  $A, B, \dots$  Body  $A'', B'', \dots$  však nejsou středy křivosti, metoda je jen přibližná a její přesnost opět závisí na hustotě bodů.

**Příklad 6.2:** Regulační obvod podle obr. 6.13 se skládá z nelineárního regulátoru daného statickou charakteristikou typu nasycení a z lineární regulované soustavy dané přenosem  $G_S(s)$ . Nakreslete stavovou trajektorii tohoto obvodu pro počáteční podmínky  $y(0) = 0,8$  a  $y'(0) = 0$ .

**Řešení:** Rovnici regulované soustavy získáme z jejího přenosu

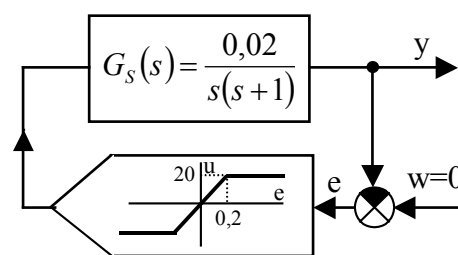
$$y'' + y' = 0,02u$$

Rovnice regulátoru je dána nelineární funkcí, určenou statickou charakteristikou

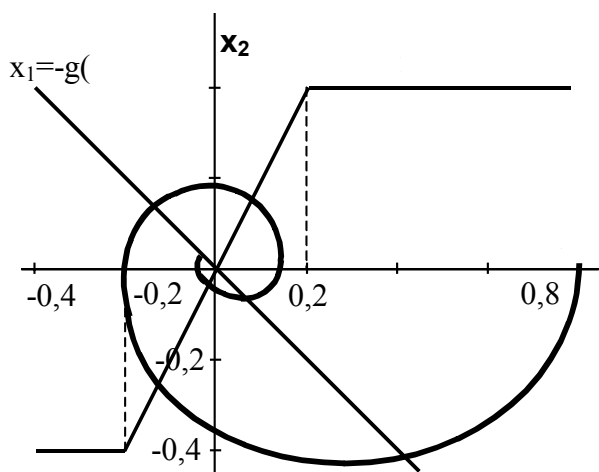
$$u = f(e)$$

a proto je

$$y'' + y' - 0,02f(e) = 0$$



Obr. 6.13



Obr. 6.14

K obvodu, danému touto rovnicí, budeme sestrojovat stavovou trajektorii metodou pomocných křivek. Nelze použít Lienardovy konstrukce, poněvadž  $0,02f(y)$  není lineární funkcí. Stavová trajektorie pro počáteční podmínku  $x_1(0) = 0,8$  a  $x_2(0) = 0$  je zkonstruována na obr. 6.14.

### c) Metoda $\delta$

Metoda předpokládá, že lze rovnici (6.5)

$$y'' + g(y') + f(y) = 0$$

převést na tvar

$$y'' + y + D(y, y') = 0 \quad (6.15)$$

Funkce  $D(y, y')$  je obecná nelineární funkce proměnných  $y, y'$ . Pro blízké okolí zvoleného bodu  $P$  ji nahradíme konstantou  $\delta$

$$D(y, y') = \delta \quad (6.16)$$

jejíž hodnotu spočítáme jako funkční hodnotu dané funkce  $D(y, y')$  v bodě  $P$ . Rovnice (6.15) pak má tvar

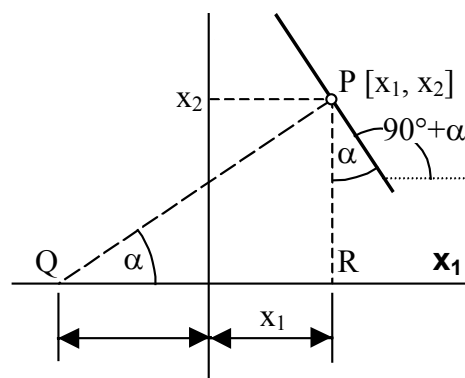
$$y'' + y + \delta = 0 \quad (6.17)$$

Zavedením substituce  $x_1 = y, x_2 = y'$  převedeme tuto rovnici na tvar

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1 + \delta}{x_2} \quad (6.18)$$

To, jak už bylo řečeno, je diferenciální tvar rovnice stavové trajektorie a přímo udává její směrnici. Předchozí metodou pomocných křivek jsme dovedli tuto směrnici v libovolném bodě stavové trajektorie sestroit. A toto je také cíl metody  $\delta$ . Konstrukce celé stavové trajektorie pak už bude stejná jako u metody pomocných křivek.

Na obr. 6.15 je způsob sestrojení směrnice v obecném bodě  $P$  stavové roviny. Tato směrnice je vyjádřena pomocí výrazu  $\delta$ , který je spočítán ve výpočtovém bodě  $P [x_1, x_2]$ . Na ose  $x_1$  je realizován



Obr. 6.15

výraz  $x_1 + \delta$  tak, že za předpokladu  $\delta > 0$  je na opačnou stranu jak  $x_1$  nanesen úsek  $\delta$ . Dostáváme tak bod  $Q$ , na jehož spojnici  $QP$  je právě kolmá hledaná směrnice.

Správnost konstrukce dokážeme výpočtem směrnice přímky, kterou vydáváme za směrnici stavové trajektorie:

$$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{1}{\frac{x_2}{x_1 + \delta}} = -\frac{x_1 + \delta}{x_2} \quad (6.19)$$

a to je podle rovnice (6.18) skutečně směrnice stavové trajektorie.

Předpokládáme-li pro nejbližší okolí bodu  $P$  konstantní  $\delta$ , lze rovnici (6.18) upravit

$$x_2 dx_2 = -(x_1 + \delta) dx_1$$

a integrovat

$$x_2^2 + (x_1 + \delta)^2 = r^2 \quad (6.20)$$

To je rovnice kružnice o poloměru  $r = QP$  a středu  $Q[-\delta, 0]$ . Stavovou trajektorii sestojíme z krátkých kruhových oblouků tak, že začneme z daného počátečního bodu. Určíme hodnotu  $\delta$  a ze středu  $[-\delta, 0]$  opišeme krátký oblouček. Na něm zvolíme další blízký bod a k němu určíme znovu  $\delta$ , opišeme další oblouček a tak postupujeme dále a postupně sestavujeme stavovou trajektorii. Výhodou této metody je to, že oblouky o středu  $[-\delta, 0]$  jsou skutečně oskulační kružnice.

**Příklad 6.3:** Sestrojte stavovou trajektorii nelineárního regulačního obvodu popsaného diferenciální rovnicí

$$y'' + 0,33y' + (1 + 0,58y^2)y = 0$$

pro počáteční podmínky  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ .

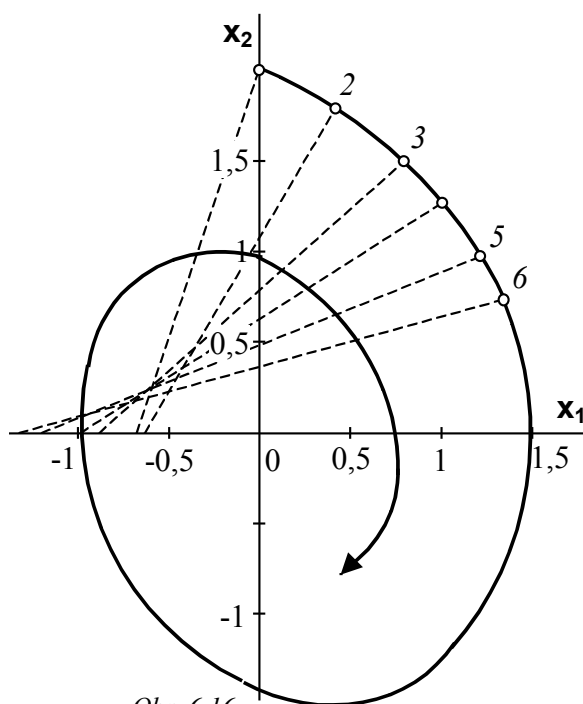
**Řešení:** Rovnici upravíme na tvar (6.15)

$$y'' + y + 0,33y' + 0,58y^3 = 0$$

Funkci  $D(y, y') = 0,33y' + 0,58y^3$  pokládáme vždy pro každý výpočtový bod za konstantu  $\delta$ . Ta je po zavedení proměnných  $x_1, x_2$

$$\delta = 0,33x_2 + 0,58x_1^3$$

Konstrukce stavové trajektorie je na obr. 6.16 a to pro počáteční podmínky  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 2$ . Výpočet pro prvních šest výpočtových bodů je v tabulce tab.6.1.



Obr. 6.16

č.	$x_1$	$x_2$	$\delta$
1	0,0	2,00	0,66
2	0,4	1,81	0,63
3	0,6	1,52	0,80

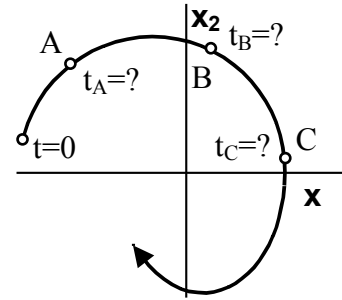
.1

č.	$x_1$	$x_2$	$\delta$
4	1,0	1,28	1,00
5	1,2	0,94	1,31
6	1,3	0,68	1,50

Výpočet  $\delta$

### 6.2.3 Vyjádření času ve stavové rovině

Parametry systému se mění v čase, počínaje časem  $t = 0$ . Uvažujeme-li jako systém regulační obvod, mění se v čase jeho jednotlivé veličiny, nás obvykle nejvíce zajímá, jak se mění s časem regulovaná veličina  $y$ . U nelineárního systému, který řešíme metodou stavové roviny a sestavujeme stavovou trajektorii nám chybí údaj o čase, ve kterém se systém popisovaný polohou zastupujícího bodu na stavové trajektorii nachází – obr. 6.17. Pouze je jasný počáteční bod, děj začíná v čase  $t = 0$ . Jak vyjádříme čas  $t$ , ve kterém přejde obvod z bodu  $A$  do bodu  $B$  na stavové trajektorii? Vyjděme ze substituce (6.6)



Obr. 6.17

$$x_1 = y; \quad x_2 = y'$$

odkud můžeme vyjádřit

$$x_2 = \frac{dx_1}{dt} \quad (6.21)$$

a jestliže chceme vyjádřit čas, dostaneme nejdříve

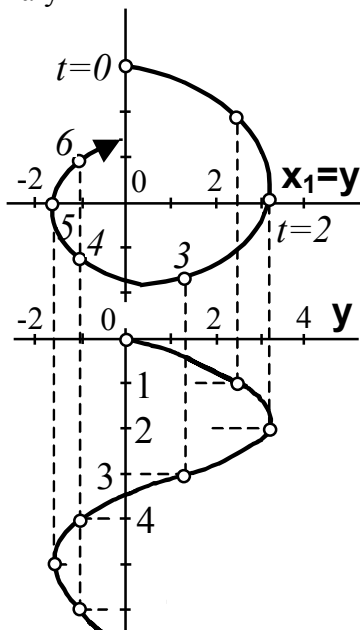
$$dt = \frac{dx_1}{x_2} \quad (6.22)$$

a potom integrací

$$t_B - t_A = \int_{x_A}^{x_B} \frac{1}{x_2} dx_1 \quad (6.23)$$

Podle tohoto vztahu bychom mohli spočítat čas, ve kterém přejde systém z bodu  $A$  do bodu  $B$ . Graficky by to znamenalo sestavit křivku převratné hodnoty  $\frac{1}{x_2}$  v závislosti na  $x_1$  a planimetricky určit plochu pod touto křivkou z  $x_A$  do  $x_B$ . To je spíše teoretická varianta než praktická.

Někdy se ve vztahu (6.22) přejde od hodnot nekonečně malých k hodnotám konečně malým



Obr. 6.19

$$\Delta t = \frac{\Delta x_1}{\bar{x}_2} \quad (6.24)$$

Tato rovnice udává přírůstek času  $\Delta t$  v daném intervalu, kde  $\bar{x}_2$  je střední hodnota  $x_2$  na tomto intervalu, jak je naznačeno na obr. 6.18. S touto metodou se dá poměrně jednoduše stavová trajektorie okótovat časem.

Pokud se nám podaří okótovat stavovou trajektorii časem, není už problém ji převést na časový průběh regulované veličiny. Stačí si uvědomit, že souřadnice stavové roviny jsou vlastně  $y - y'$ , regulovaná veličina  $y$  a její derivace  $y'$ . To nám říká substituce (6.6). A s tímto poznáním už není žádný problém převést stavovou trajektorii, kde je vyznačen čas, do časového průběhu  $y(t)$  – obr. 6.19. A je dobré si ujasnit průběh času ve stavové rovině. Připomeňme, že geometrická interpretace stavové trajektorie je pohyb zastupujícího bodu v této rovině. Zastupující bod zde zastupuje systém respektive jeho stav.

Je ale možné a v praxi velmi používané převést na časový průběh regulované veličiny stavovou trajektorii, která není okótovaná časem (úloha na obr. 6.19 byla přeúčtována – hodnoty  $x_2$  jsme vůbec nepoužívali). Použijeme k tomu metodu, která by se také dala nazvat metodou izoklín, protože tam opět budou vystupovat geometrická místa bodů o konstantní směrnici. V tomto případě to ale bude směrnice časového průběhu  $y(t)$  a nikoli směrnice stavové trajektorie. Aby se to nepletlo s předcházející metodou izoklín, tak zde raději tento název nepoužívejme.

Vyjdeme ze skutečnosti, že každý bod stavové trajektorie je dán hodnotami  $x_1$  a  $x_2$  neboli  $y$  a  $y'$ . Při převádění ze stavové roviny do souřadnic  $t - y$  nebudeme sice znát hodnoty  $t$  a  $y$  jako na obr. 6.19 (s výjimkou  $t = 0$ ), ale budeme znát hodnoty  $y$  a  $y'$ . Pro volené hodnoty  $y$  si na vodorovnou přímkou (to je izoklína!) krátkými úseky vyznačíme směrnici, odpovídající  $y'$  ( $y' = dy/dx = \Delta y / \Delta x$ ). Pak začínáme v bodě  $t = 0$  a prokládáme křivku  $y(t)$  tak, aby stále byl její směr shodný se směrnici  $y'$ . Postup bude lépe patrný z příkladu 6.4.

**Příklad 6.4:** Sestrojte stavovou trajektorii nelineárního systému, kterým je nelineární regulační obvod o rovnici

$$y'' + 0,5y' + (1 + 0,5y^2)y = 0$$

pro počáteční podmínku danou bodem  $[-2; 0]$ . Tuto trajektorii sestrojte metodou grafické konstrukce s pomocnými křivkami. Potom převed'te sestavenou stavovou trajektorii na časový průběh regulované veličiny  $y$ .

**Řešení:** Substitucí (6.5) převedeme rovnici obvodu na rovnici stavové trajektorie

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{0,5x_2 + (1 + 0,1x_1^2)x_1}{x_2}$$

Pomocné křivky budou mít rovnice

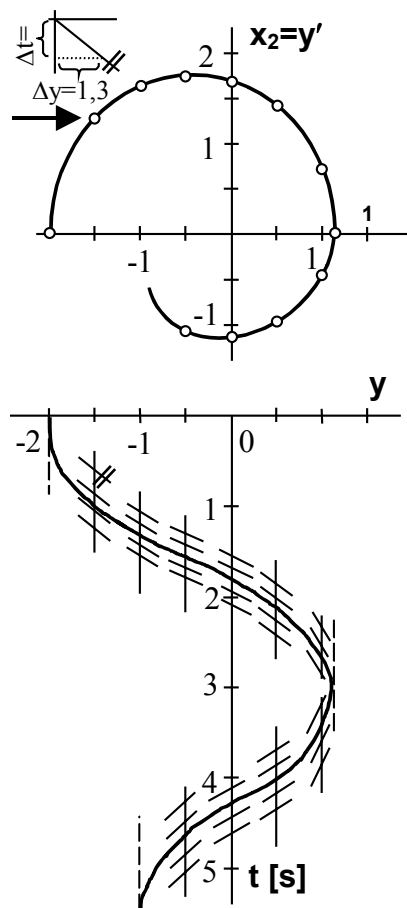
$$\begin{aligned} x_1 &= -0,5x_2 \\ x_2 &= (1 + 0,1x_1^2)x_1 \end{aligned}$$

Musíme použít obecnou metodu, nelze použít Lienardovy konstrukce. Výsledná stavová trajektorie pro dané počáteční podmínky je na obr. 6.20. A na tomto obrázku je také uvedena plná konstrukce časového průběhu regulované veličiny  $y$  podle uvedené metody.

K času ve stavové rovině si ještě řekneme, že směr stavové trajektorie je možný pouze ve směru ručiček hodinových a nikdy naopak. Je to proto, že v horní polovině stavové roviny je podle rovnice (6.21)

$$x_2 = \frac{dx_1}{dt} > 0$$

a proto má stavová trajektorie směr zleva doprava, neboť s rostoucím časem se musí  $x_1$  zvětšovat. Naopak v dolní polovině je



Obr. 6.20

$$\dot{x}_2 = \frac{dx_1}{dt} < 0$$

a stavová trajektorie má směr zprava doleva.

Podobně je možno konstatovat, že v okamžiku, kdy stavová trajektorie prochází osou  $x_1$ , musí ji procházet kolmo, směrnice musí být kolmá na osu  $x_1$ , protože na ose  $x_1$  je  $x_2 = 0$  a tudíž

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{g(x_2)+f(x_1)}{x_2} = -\frac{g(x_2)+f(x_1)}{0} = \infty$$

### 6.2.3 Singulární body

Vyjděme z rovnice nelineárního obvodu druhého řádu (6.5)

$$y'' + g(y') + f(y) = 0$$

z níž dostaneme rovnici stavové trajektorie (6.8) v diferenciálním tvaru

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{g(x_2)+f(x_1)}{x_2}$$

Připomeňme si grafické řešení této rovnice metodou izoklín. Derivaci na levé straně rovnice jsme položili rovnu konstantě  $\kappa_i$  a rovnice byla rovnicí izoklín. Pro různá  $\kappa_i$  jsme dostali celou řadu izoklín a na nich byla vždy vyznačena směrnice, která platila na celé izoklíně. Takže jsme mohli konstatovat, že každému bodu stavové roviny je přiřazena jedna určitá směrnice. Samozřejmě myslíme směrnice ke stavové trajektorii, kdyby ta daným bodem procházela za daných počátečních podmínek.

Není tomu tak přesně. Existují body, ve kterých neexistuje žádná směrnice a body, ve kterých je směrnek nekonečně mnoho. Jsou to takové body, kdy je čitatel i jmenovatel v rovnici (6.8) současně roven nule

$$\begin{aligned} g(x_2)+f(x_1) &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{6.25}$$

Takovýchto bodů může mít systém konečný i nekonečný počet, může mít jeden takový bod anebo i žádný. V těchto bodech není jednoznačně definována hodnota směrnice  $dx_2/dx_1$  k stavové trajektorii, a tím pádem může tímto bodem procházet nekonečně mnoho trajektorií anebo žádná trajektorie. Tyto body se nazývají **singulární body** systému. V okolí singulárních bodů jsou možné nejrůznější případy, pokud se týče existence a jednoznačnosti řešení a tvaru stavových trajektorií. Z hlediska pozdějšího vyšetřování stability systému a chování systému mají tyto body velmi důležitý význam.

Singulární body, odpovídající systému popsanému rovnicí (6.5) a tím pádem i (6.8) musí samozřejmě ležet na reálné ose, poněvadž pro ně platí  $x_2 = 0$ . Ovšem pro obecný nelineární systém druhého řádu tomu tak není a singulární body mohou ležet obecně i mimo reálnou osu.

Rovnici (6.8) jsme získali dělením obou rovnic v soustavě rovnic (6.7)

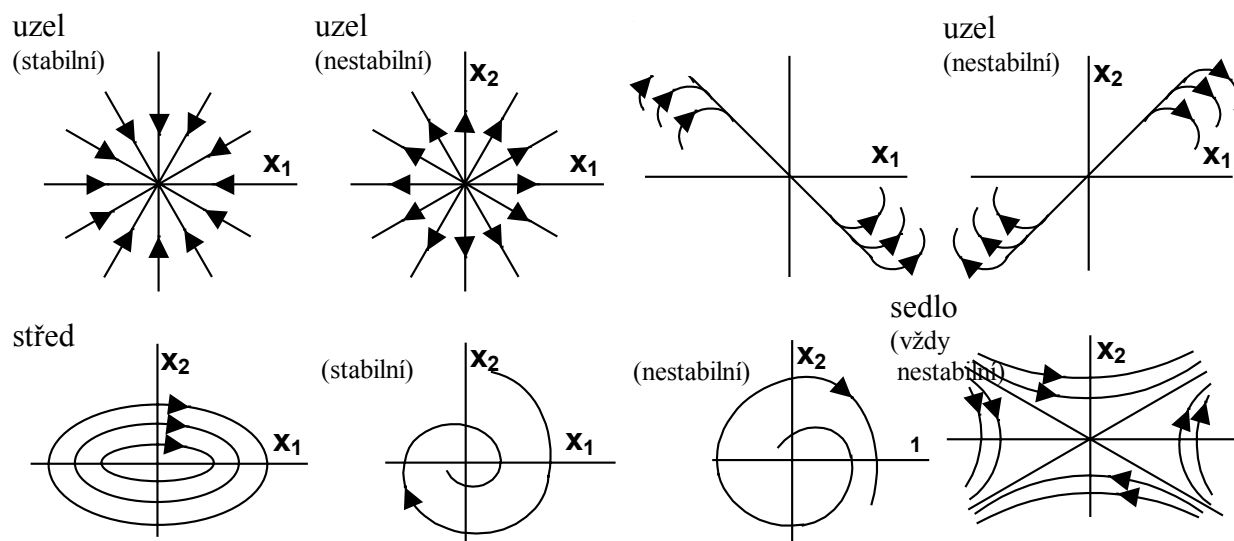
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{dx_2}{dt} = -g(x_2) - f(x_1) \end{aligned}$$

a to znamená, že v singulárních bodech bude současně také

$$x_1' = \frac{dx_1}{dt} = 0; \quad x_2' = \frac{dx_2}{dt} = 0 \quad (6.26)$$

To znamená, že jsou v něm rychlosti změn v jednotlivých osách nulové – systém je v rovnovážném stavu. V singulárních bodech jsou splněny podmínky rovnováhy systému. Bude ovšem záležet na tom, zdali stavová trajektorie má směr do singulárního bodu – v tom případě bude tento rovnovážný stav stabilní a systém se bude chovat v okolí tohoto rovnovážného stavu jako stabilní systém. Anebo bude mít stavová trajektorie směr od singulárního bodu a v tom případě se bude jednat o nestabilní rovnovážný stav a nestabilní systém v okolí tohoto singulárního bodu. Na toto navážeme v kapitole o stabilitě nelineárních systémů.

Singulární body jsou tedy takové, kde není určena směrnice stavové trajektorie.



Neprochází jím jedna, ale většinou nekonečné množství stavových trajektorií. Podle průběhu stavových trajektorií singulárním bodem se nazývají singulární body uzel, sedlo, střed a ohnisko. Ohnisko můžeme definovat jako singulární bod, ke kterému směřují spirální trajektorie (nebo se od něho vzdalují), uzel jako bod, ke kterému směřují asymptotické čáry, sedlo, kolem něhož jsou hyperbolické trajektorie, které jím neprocházejí a střed, kolem něhož jsou trajektorie kružnice nebo elipsy. Znázornění je na obr. 6.21.

**Příklad 6.5:** Určete singulární body systému, popsaného rovnicí

$$y'' - \left(0,1 - \frac{10}{3}y'^2\right)y' + y + y^2 = 0$$

**Řešení:** Zavedením substituce  $x_1 = y$ ,  $x_2 = y'$  přejde rovnice v soustavu dvou rovnic

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = \left(0,1 - \frac{10}{3}x_2^2\right)x_2 - x_1 - x_1^2$$

Pro singulární body musí současně platit  $x_1' = 0$ ,  $x_2' = 0$ , tedy

$$x_2 = 0; \quad \left(0,1 - \frac{10}{3}x_2^2\right)x_2 - x_1 - x_1^2 = 0$$

Této soustavě rovnic vyhovují dva body, které jsou řešením soustavy, a to  $[0, 0]$  a  $[-1, 0]$ . To jsou singulární body systému.

## 6.3 Stabilita nelineárních systémů

### 6.3.1 Obecně o stabilitě

Stabilita je nejdůležitější vlastností regulačních obvodů, ať už lineárních nebo nelineárních. Stabilita nelineárních obvodů je široký pojem, který se odlišuje od stability systémů lineárních.

Stabilita lineárních systémů je vlastnost těchto systémů a nezávisí na jejich okamžitém stavu ani na vstupních signálech či počátečních podmínkách. Většinou se stabilita lineárního systému definuje jako jeho schopnost vrátit se do rovnovážného stavu, jestliže skončilo působení signálu, který jej z tohoto stavu vyvedl.

Pro nelineární systémy je tato definice již nepostačující a to z mnoha důvodů, které budou v dalším uvedeny (např. rovnovážných stavů je u nelineárních systémů více – odpovídají jim singulární body).

Nejdříve o rozsahu platnosti stability u nelineárních systémů. Lineární systém je stabilní nebo nestabilní pro jakékoliv počáteční podmínky. Toto může za jistých okolností platit i pro nelineární systém. V tomto případě pak mluvíme o **globální stabilitě** (někdy též o stabilitě ve velkém). Systém je globálně stabilní, je-li stabilní pro všechny počáteční podmínky.

U nelineárních systémů se však častěji setkáváme se stabilitou při malých výchylkách, při malých počátečních podmínkách, pouze v jistém okolí rovnovážného stavu. V tomto případě pak mluvíme o **lokální stabilitě** (někdy o stabilitě v malém). Systém je stabilní lokálně, je-li stabilní pro počáteční podmínky uvnitř libovolně malé oblasti kolem rovnovážného stavu.

Jeli systém stabilní globálně, je automaticky stabilní i lokálně. Naopak to neplatí. Požadavek na lokální stabilitu je slabší.

Ted' si všimněme ustálených stavů nelineárních systémů, to je stavů systému pro čas jdoucí k nekonečnu ( $t \rightarrow \infty$ ). Na rozdíl od lineárních systémů, které mají pouze jediný ustálený stav (anebo se vůbec neustalují a jsou nestabilní), mohou u nelineárních systémů vzniknout **dva typy ustálených stavů**:

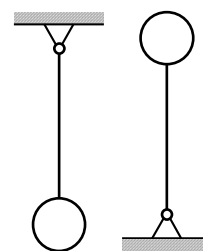
- rovnovážné ustálené stavy (také zvané klidové stavy)
- periodické ustálené stavy (periodická řešení reprezentovaná mezními cykly)

**Rovnovážný ustálený stav** se vyznačuje nulovými rychlostmi v jednotlivých osách – je to stav klidu, jednotlivé veličiny se nemění.

**Periodický ustálený stav** se vyznačuje kmity o konstantní amplitudě a frekvenci (nezaměňujeme tento stav se stavem na hranici stability u lineárních systémů – to není ustálený stav, jakoukoliv malou změnou parametrů se obvod dostane do stabilního nebo nestabilního stavu).

Jestliže vyšetřujeme stabilitu nelineárního systému, pak většinou nemluvíme o stabilitě systému, ale o **stabilitě jeho rovnovážných stavů**, které mohou být buď stabilní anebo nestabilní.

Často se stabilita systému v rovnovážném stavu vysvětluje na příkladu kyvadla. Kyvadlo podle obr. 6.22 má dvě klidové polohy – jednu, je-li těžiště kyvadla v klidu kolmo pod bodem upevnění a druhou, je-li těžiště kyvadla kolmo nad bodem upevnění. První poloha je stabilní, druhá nestabilní, neboť při malém vychýlení nastává pohyb kyvadla dolů z této polohy. Mluvit o stabilitě jiné polohy kyvadla nemá smysl, neboť v ní kyvadlo nemůže zůstat. Je



Obr. 6.22



tedy zřejmé, že má smysl mluvit pouze o stabilitě klidových stavů, ve kterých systém bez působení vnějších podnětů může zůstat. Toto jsou tzv. **rovnovážné stavy systému**.

U **rovnovážných stavů** jsou derivace stavových veličin nulové. To jsme konstatovali v kapitole o singulárních bodech – rovnice (6.26) – a toto tvrzení pochopitelně můžeme zobecnit na systémy i vyšších řádů

$$x'_1 = \frac{dx_1}{dt} = 0; \quad x'_2 = \frac{dx_2}{dt} = 0; \quad x'_3 = \frac{dx_3}{dt} = 0; \quad \dots \quad (6.27)$$

a těmto stavům odpovídají singulární body systému.

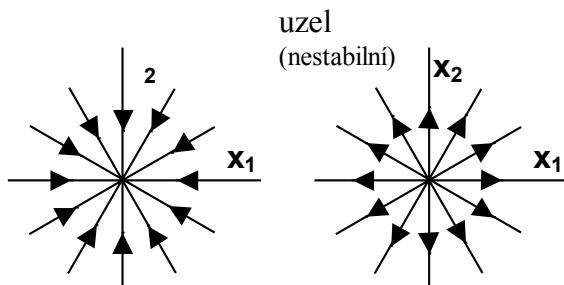
Nelineární systém má tolik rovnovážných stavů, kolik existuje řešení soustavy rovnic (6.27). U lineárních systémů je soustava (6.27) lineární soustavou, má jedno řešení a proto u lineárních systémů existuje pouze jeden rovnovážný stav. U nelineárních systémů jich může být nula či žádný, jeden, dva i více a také nekonečné množství.

Tedy např. systém druhého řádu je v rovnováze – je v ustáleném stavu – jsou-li rychlosti v jednotlivých osách nulové, tj. platí-li rovnice (6.26)

$$x'_1 = \frac{dx_1}{dt} = 0; \quad x'_2 = \frac{dx_2}{dt} = 0$$

Těmto ustáleným stavům odpovídají body stavové roviny, ve kterých nejsou definovány směrnice stavové trajektorie. Těmito body může procházet až nekonečně mnoho trajektorií a jsou to tedy **singulární body**.

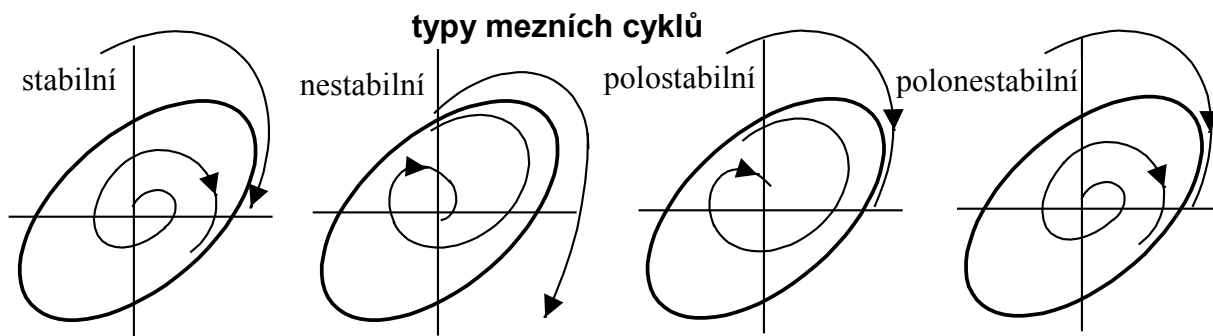
**Mají-li stavové trajektorie v okolí singulárního bodu směr dovnitř, spěje systém ke stavu klidu a tento rovnovážný stav – tento singulární bod – je stabilní. Naopak, jestliže stavové trajektorie opouští singulární body, dostávají se ze stavu klidu a tento rovnovážný stav – tento singulární bod – je nestabilní. Samozřejmě toto můžeme konstatovat též o systému nebo regulačním obvodu, ale bude to jenom lokální stabilita systému či obvodu, protože tento může mít ještě jiné singulární body – jiné rovnovážné stavy.**



do tohoto bodu, rovnovážný stav je stabilní, systém je lokálně stabilní pro okolí tohoto singulárního bodu. Pokud se vyskytne singulární bod typu nestabilní uzel, vycházejí všechny trajektorie z tohoto singulárního bodu, rovnovážný stav je nestabilní a systém je lokálně nestabilní pro okolí tohoto singulárního bodu.

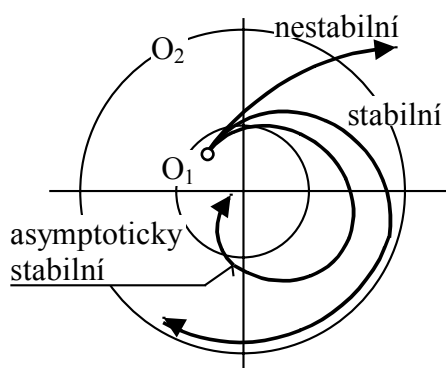
Druhým typem ustálených stavů nelineárních systémů jsou **periodické ustálené stavy (periodická řešení)**. Jsou to ustálené vlastní kmity neboli autooscilace. Ve stavové rovině jsou reprezentovány uzavřenými trajektoriemi, které se nazývají **mezní cykly**.

Mezní cykly mohou být stabilní, nestabilní nebo též polostabilní a polonestabilní – obr. 6.24. U stabilního mezního cyklu směřují trajektorie z blízkého okolí k tomuto cyklu, u nestabilního se z obou stran od něho vzdalují. U polostabilního mezního cyklu se trajektorie z vnější strany přibližují a z vnitřní vzdalují k počátku a přesně naopak je to u polonestabilního mezního cyklu. Vyšetření mezních cyklů v systému je velmi důležité pro praxi. V regulační



technice není zpravidla žádný mezní cyklus žádoucí (výjimkou jsou zde příklady dvupolohové regulace – žehlička), i když lze někdy připustit kmity s malou amplitudou, které nejsou na závadu činnosti systému. U některých mechanických systémů zlepšují tyto malé kmity celkové chování, např. snižují vliv suchého tření. Naproti tomu se těchto kmitů využívá v oscilátorech, kde požadujeme mezní cyklus s dostatečnou (a proměnnou) amplitudou.

Oba typy ustálených stavů (rovnovážné stavy a ji odpovídající singulární body i periodické ustálené stavy) tedy mohou být stabilní nebo nestabilní. U nelineárního systému je proto třeba rozlišovat stabilitu rovnovážného stavu a stabilitu periodického řešení.



Obecnou myšlenku stability rovnovážných stavů formuloval ruský matematik Ljapunov.

Podle Ljapunova je rovnovážný stav stabilní, když stavová trajektorie začínající v nějaké oblasti  $O_1$  stavové roviny zůstane uvnitř nějaké oblasti  $O_2$  (libovolně velké) – obr. 6.25.

Dále je podle Ljapunova rovnovážný stav asymptoticky stabilní, když je stabilní podle předcházející definice a navíc se stavová trajektorie ustálí v rovnovážném stavu (daném některým singulárním bodem).

Je-li oblast  $O_1$  počátečních stavů ohraničená, pak hovoříme o stabilitě lokální (v malém), je-li neohraničená – o stabilitě globální (ve velkém). Totéž platí o stabilitě asymptotické.

U lineárního regulačního obvodu, pokud je stabilní, jde vždy o globální asymptotickou stabilitu jediného rovnovážného stavu.

**Příklad 6.6:** Metodou stavové roviny s průběhem stavové trajektorie vyšetřete stabilitu nelineárního regulačního obvodu podle obr. 6.26 pro skokovou změnu řídicí veličiny  $w$ .

**Řešení:** Rovnice regulované soustavy je

$$2y'' + y' = u$$

Protože  $y = w - e$  a protože  $u = e^3$  je

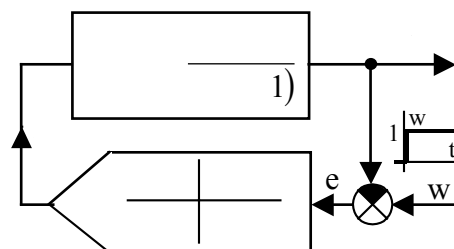
$$2(w - e)'' + (w - e)' = e^3$$

Pro jednotkový skok  $w = 1$  při  $t \geq 0$  je  $w' = w'' = 0$  a rovnice regulačního obvodu je

$$2e'' + e' + e^3 = 0$$

Zavedeme-li

$$x_1 = e; \quad x_2 = e'$$



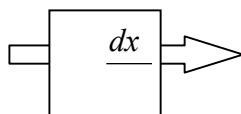
jsou rovnice systému

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -0,5x_2 - 0,5x_1^3$$

a rovnice stavové trajektorie a z ní získaná rovnice obecné izoklíny

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_2 + x_1^3}{2x_2}$$



$$x_2 = -\frac{x_1^3}{2\kappa + 1}$$

Průběh izoklín je na obr. 6.27. Počáteční stav jsme určili z úvahy, že pro  $t = 0$  je  $y = 0$ ;  $w = 1$

$$e(0) = x_1(0) = 1$$

a z průběhu  $y(t)$  je

$$e'(0) = x_2(0) = 0$$

Z průběhu stavové trajektorie pro počáteční stav  $[1; 0]$  plyne, že se dostává do rovnovážného stavu, kterým je počátek souřadnic, tj. bod  $[0; 0]$ . Je tedy tento rovnovážný stav asymptoticky stabilní.

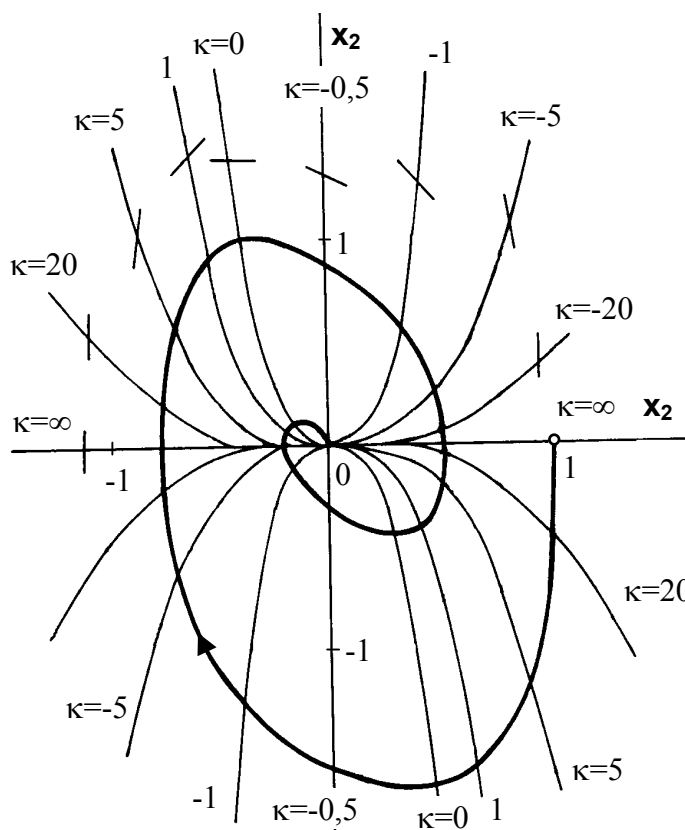
Rovnovážný stav odpovídající singulárnímu bodu  $[0; 0]$  je jediným rovnovážným stavem systému, jak plyne z řešení rovnic

$$x_2 = 0$$

$$-0,5x_2 - 0,5x_1^3 = 0$$

které ukazuje, že systém nemá další singulární bod mimo  $[0; 0]$ . Protože pro libovolné počáteční stavy se stavové trajektorie vždy dostanou do rovnovážného stavu daného singulárním bodem  $[0; 0]$ , je tento globálně asymptoticky stabilní.

O stabilitě daného nelineárního obvodu tedy uděláme tento závěr: Obvod má jediný rovnovážný stav daný singulárním bodem  $[0; 0]$  a tento rovnovážný stav je globálně asymptoticky stabilní.



Obr. 6.27

### 6.3.2 Vyšetřování stability

Vyšetřovat stabilitu nelineárních systémů sestavováním stavové trajektorie by bylo stejně obtížným úkolem, jako počítat kořeny charakteristické rovnice u lineárních systémů. My potřebujeme rychlejší a méně pracné metody pro určení stability nelineárních systémů.

#### a) Metoda linearizace

V předcházející kapitole bylo ukázáno, že rovnovážné stavy nelineárních systémů mohou být stabilní nebo nestabilní podle toho, budou-li se stavové trajektorie ve stavové rovině s časem  $t \rightarrow \infty$  blížit k příslušnému singulárnímu bodu nebo se od něj vzdalovat.

Stabilitu rovnovážných stavů ve smyslu Ljapunova můžeme pro daný nelineární systém vyšetřit tak, že jeho rovnice linearizujeme v okolí každého rovnovážného stavu a zjišťujeme stabilitu náhradního lineárního systému.

Budeme opět uvažovat pouze jednoduchý nelineární regulační obvod, který jsme uvažovali při řešení metodou stavové roviny o rovnici (6.5)

$$y'' + g(y') + f(y) = 0$$

a který substitucí (6.6)

$$x_1 = y$$

$$x_2 = y'$$

převeďme na rovnici (6.8)

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{g(x_2) + f(x_1)}{x_2}$$

Bez odvození – viz např.[23] – uvedeme, že tento obvod můžeme v každém jeho singulárním bodě  $[x_{10}, x_{20}]$  linearizovat. Při této linearizaci nahradíme jeho rovnici lineární rovnici

$$y'' + \left[ \frac{\partial [g(x_2) + f(x_1)]}{\partial x_2} \right]_{[x_{10}, x_{20}]} y' + \left[ \frac{\partial [g(x_2) + f(x_1)]}{\partial x_1} \right]_{[x_{10}, x_{20}]} y = 0 \quad (6.28)$$

Chování systému a typy singulárních bodů (průběh stavových trajektorií) jsou stejné. Vyšetření stability zlinearizovaného obvodu platí i pro nelineární obvod. Ovšem pouze v okolí singulárního bodu, je to tedy lokální stabilita. Je to vyšetření stability daného rovnovážného stavu.

Stabilitu zlinearizovaného obvodu budeme určovat jako u lineárního systému. To znamená, že kořeny charakteristické rovnice musí mít zápornou reálnou část a to určujeme kritérii stability platnými pro lineární obvody. Ze stability zlinearizovaného obvodu usuzujeme na stabilitu příslušného rovnovážného stavu systému a také na chování nelineárního systému a na průběh stavových trajektorií v blízkém okolí příslušného singulárního bodu, ve kterém byla linearizace provedena.

**Zdůrazněme:** Rovnovážný stav nelineárního systému bude stabilní jen tehdy, budou-li kořeny charakteristické rovnice ležet v levé komplexní polorovině.

Má-li charakteristická rovnice kořeny s kladnými reálnými částmi, je rovnovážný stav systému (singulární bod) nestabilní. Má-li některý kořen nulovou reálnou část, není možné podle lineárního přiblížení stanovit, zda původní nelineární systém má uvažovaný rovnovážný stav stabilní anebo nestabilní.

**Příklad 6.7:** Vyšetřete stabilitu rovnovážných stavů nelineárního obvodu podle obr. 6.28.

**Řešení:** Z rovnice soustavy

$$0,1y'' + y' = u$$

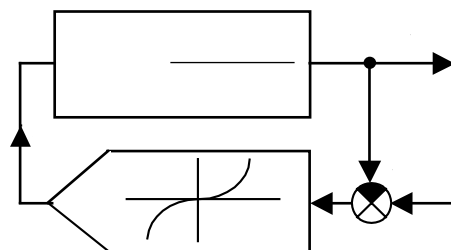
dostaneme dosazením pro  $w = 0$

$$u = 0,5e + 0,25e^3$$

$$e = -y$$

a z toho plyne rovnice obvodu

$$0,1y'' + y' + 0,5y + 0,25y^3 = 0$$



Zavedeme substituci  $x_1 = y$ ;  $x_2 = y'$  a pak je

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = -10x_2 - 5x_1 - 2,5x_1^3$$

a rovnice stavové trajektorie

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{10x_2 + 5x_1 + 2,5x_1^3}{x_2}$$

Pro singulární body, respektive rovnovážné stavy (RS) platí

$$x_2 = 0$$

$$-10x_2 - 5x_1 - 2,5x_1^3 = 0 \quad \left[ 10x_2 + 2,5x_1(2 + x_1^2) = 0 \right]$$

Z těchto rovnic určíme singulární body

$$1. \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 0$$

$$2. - 3. \quad x_1 = \pm j\sqrt{2}; \quad x_2 = 0$$

Singulární body 2.-3. neodpovídají reálným rovnovážným stavům. V tomto případě má proto vyšetřovaný nelineární obvod pouze jediný rovnovážný stav  $[0, 0]$ . Jeho stabilitu určíme linearizací nelineární diferenciální rovnice v tomto bodě.

Spočítáme parciální derivace a dosadíme do nich souřadnice singulárního bodu  $[0, 0]$

$$\left[ \frac{\partial [g(x_2) + f(x_1)]}{\partial x_2} \right]_{[0;0]} = \left[ \frac{\partial [10x_2 + 5x_1 + 2,5x_1^3]}{\partial x_2} \right]_{[0;0]} = [10]_{[0;0]} = 10$$

$$\left[ \frac{\partial [g(x_2) + f(x_1)]}{\partial x_1} \right]_{[0;0]} = \left[ \frac{\partial [10x_2 + 5x_1 + 2,5x_1^3]}{\partial x_1} \right]_{[0;0]} = [5 + 7,5x_1^2]_{[0;0]} = 5$$

Tyto derivace dosadíme do rovnice (6.28)

$$y'' + 10y' + 5y = 0$$

a dostali jsme zlinearizovanou rovnici daného nelineárního obvodu v singulárním bodě  $[0, 0]$  – rovnovážném stavu tohoto systému.

Máme za úkol vyšetřit stabilitu tohoto rovnovážného stavu. Rovnice je lineární, a proto sestavíme charakteristickou rovnici

$$s^2 + 10s + 5 = 0$$

a určíme její kořeny

$$s_{1,2} = -5 \pm 2\sqrt{5} = \begin{matrix} -9,47 \\ -0,53 \end{matrix}$$

Kořeny jsou reálné záporné. Rovnovážný stav je stabilní. Bližším rozбором bychom mohli zjistit, že se jedná o rovnovážný stav typu uzlu. Protože je to jediný singulární bod systému, jedná se o globálně asymptoticky stabilní rovnovážný stav. (Samozřejmě jsme kořeny nemuseli ani počítat, protože byla splněna nutná a pro rovnici druhého stupně postačující podmínka kladnosti koeficientů.)

**Příklad 6.8:** Vyšetřete stabilitu nelineárního obvodu z příkladu 6.5, jehož rovnice je

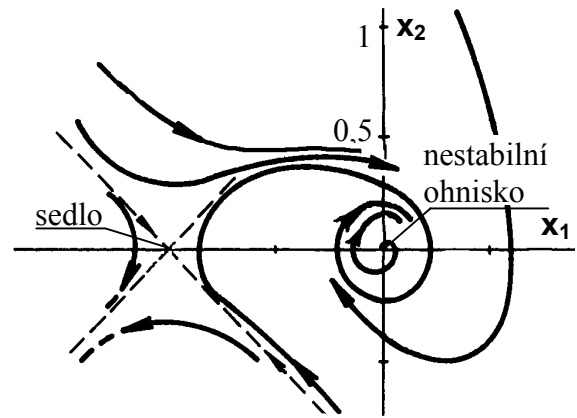
$$y'' - \left( 0,1 - \frac{10}{3}y'^2 \right) y' + y + y^2 = 0$$

**Řešení:** V příkladu 6.5 byla sestavena soustava rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 \\x_2' &= \left(0,1 - \frac{10}{3}x_2^2\right)x_2 - x_1 - x_1^2\end{aligned}$$

a z ní byly určeny singulární body nelineárního systému a to  $[0, 0]$  a  $[-1, 0]$ . Spočítejme ještě rovnici stavové trajektorie

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\left(0,1 - \frac{10}{3}x_2^2\right)x_2 + x_1 + x_1^2}{x_2}$$



a můžeme provádět linearizaci. Začneme singulárním bodem  $[0, 0]$ . Příslušné derivace jsou

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial[g(x_2)+f(x_1)]}{\partial x_2}\right]_{[0;0]} &= \left[\frac{\partial\left[\left(\frac{10}{3}x_2^3 - 0,1x_2\right) + x_1 + x_1^2\right]}{\partial x_2}\right]_{[0;0]} = [10x_2^2 - 0,1]_{[0;0]} = -0,1 \\ \left[\frac{\partial[g(x_2)+f(x_1)]}{\partial x_1}\right]_{[0;0]} &= \left[\frac{\partial\left[\left(\frac{10}{3}x_2^3 - 0,1x_2\right) + x_1 + x_1^2\right]}{\partial x_1}\right]_{[0;0]} = [1 + 2x_1]_{[0;0]} = 1\end{aligned}$$

Zlinearizovaná rovnice nelineárního systému v singulárním bodě  $[0, 0]$  dosazením do (6.28) je

$$y'' - 0,1y' + y = 0 \quad [\text{char. rovn.: } s^2 - 0,1s + 1 = 0]$$

Charakteristická rovnice má záporný koeficient, a proto nejsou všechny kořeny v levé komplexní polorovině. A proto je příslušný singulární bod – rovnovážný stav – nestabilní.

Tytéž derivace jak v předchozím spočítáme pro singulární bod  $[-1, 0]$

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial[g(x_2)+f(x_1)]}{\partial x_2}\right]_{[-1;0]} &= \left[\frac{\partial\left[\left(\frac{10}{3}x_2^3 - 0,1x_2\right) + x_1 + x_1^2\right]}{\partial x_2}\right]_{[-1;0]} = [10x_2^2 - 0,1]_{[-1;0]} = -0,1 \\ \left[\frac{\partial[g(x_2)+f(x_1)]}{\partial x_1}\right]_{[-1;0]} &= \left[\frac{\partial\left[\left(\frac{10}{3}x_2^3 - 0,1x_2\right) + x_1 + x_1^2\right]}{\partial x_1}\right]_{[-1;0]} = [1 + 2x_1]_{[-1;0]} = -1\end{aligned}$$

Zlinearizovaná rovnice nelineárního systému v singulárním bodě  $[-1, 0]$  dosazením do (6.28) je

$$y'' - 0,1y' - y = 0 \quad [\text{char. rovn.: } s^2 - 0,1s - 1 = 0]$$

Charakteristická rovnice má záporné koeficienty, a proto nejsou všechny kořeny v levé komplexní polorovině. A proto je příslušný singulární bod – rovnovážný stav – nestabilní.

Podrobnějším rozбором bychom zjistili, že singulární bod  $[0, 0]$  odpovídá nestabilnímu ohnisku a singulární bod  $[-1, 0]$  odpovídá sedlu (to je nestabilní vždy). A při ještě podrobnějším rozboru bychom mohli vyšetřit průběhy stavových trajektorií v celé stavové rovině, kde oba

singulární body mají dominantní postavení. Na obr. 6.29 je stavový obraz skutečného nelineárního systému, abychom s ním mohli naše výsledky konfrontovat.

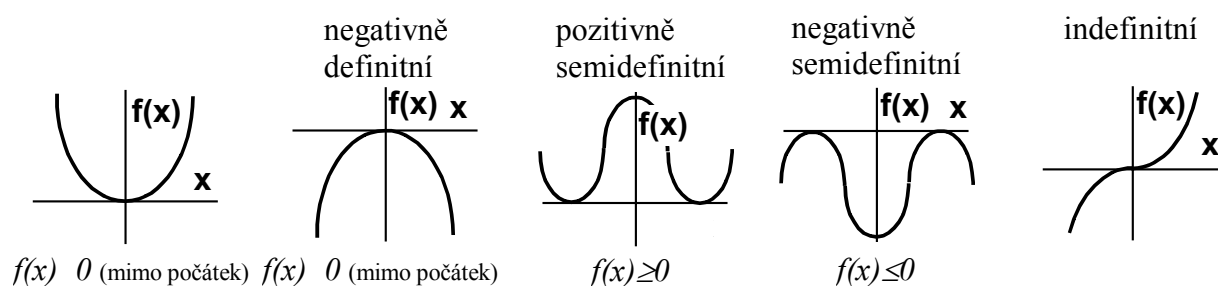
## b) Ljapunovova metoda

Tato metoda umožňuje posuzovat stabilitu i asymptotickou stabilitu v malém i ve velkém (lokální nebo globální) u obecného nelineárního systému a často se začíná používat i pro vyšetřování stability lineárních systémů.

Princip metody je ve vyhledání Ljapunovy funkce k danému systému. Jestliže ji pro daný systém nalezneme, je tento stabilní anebo nestabilní. Pokud ji ale nenalezneme, neznamená to, že je systém nestabilní – pouze jsme neuspěli s vyšetřováním stability. Vyhledání Ljapunovy funkce je komplikovaná záležitost a zde ji omejdeme používáním ztabelovaných funkcí.

Nejdříve si uvedeme základní potřebné pojmy o definitnosti funkcí.

Říkáme, že funkce  $f(x)$  je **pozitivně definitní** v intervalu  $a \leq f(x) \leq a$ , když v tomto intervalu platí  $f(x) > 0$ . Obdobně je v tomto intervalu **negativně definitní**, když v něm platí  $f(x) < 0$ . Přitom v počátku může funkce nabývat i nulové hodnoty. Jestliže jsou funkční hodnoty  $f(x)$  v tomto intervalu někdy kladné a jindy záporné, je funkce  $f(x)$  **indefinitní** (nedefinitní) v daném intervalu.



Pokud by pro funkci  $f(x)$  platilo v daném intervalu  $f(x) \geq 0$  anebo  $f(x) \leq 0$ , bude daná funkce **pozitivně semidefinitní** anebo **negativně semidefinitní**. Schématicky je to znázorněno na obr. 6.30 pro interval  $(-\infty, +\infty)$ .

Rozšíříme tyto pojmy na funkce více proměnných.

Funkci  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  nazýváme **pozitivně definitní**, jestliže má nulovou hodnotu pouze v počátku a mimo počátek nabývá pouze kladných hodnot.

Funkci  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  nazýváme **negativně definitní**, jestliže má nulovou hodnotu pouze v počátku a mimo počátek nabývá pouze záporných hodnot.

Funkci  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  nazýváme **pozitivně (negativně) semidefinitní**, jestliže nabývá pouze kladných (záporných) hodnot anebo nulovou hodnotu.

Definitnost funkce  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  může být buď v určité oblasti kolem počátku anebo může platit v celém prostoru. Pokud uvedeme pouze, že funkce  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  je tak nebo onak definitní, předpokládáme definitnost v celém prostoru (globální).

**Příklad 6.9:** Určete definitnost těchto funkcí

- a)  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^4$       d)  $f(x_1, x_2) = x_1^2(x_2^2 + 1)$   
 b)  $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$       e)  $f(x_1, x_2) = x_1^2$   
 c)  $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$       f)  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_2^4$

**Řešení:** a) pozitivně definitní

- b) pozitivně semidefinitní, neboť když je  $x_1 = -x_2$  je  $f(x_1, x_2) = 0$ , tedy i mimo počátek  
 c) indefinitní  
 d) negativně semidefinitní, neboť když je  $x_1 = 0$  je  $f(x_1, x_2) = 0$  pro jakékoliv  $x_2$   
 e) pozitivně semidefinitní, neboť když je  $x_1 = 0$  je  $f(x_1, x_2) = 0$  pro jakékoliv  $x_2$   
 f) na první pohled nelze rozhodnout; snad řešením nerovností.

Nyní k vlastní Ljapunovově metodě. Metoda je naprosto obecná, pro systémy jakéhokoliv řádu. Budeme tedy předpokládat obecný nelineární systém  $n$  – tého řádu popsany soustavou rovnic prvního řádu

$$\begin{array}{l} x_1' = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ x_n' = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \quad (6.29)$$

Pokud by byl popsán jednou nelineární rovnicí vyššího řádu, je nutné jej substitucí (6.2)

$$\begin{array}{l} x_1 = y \\ x_2 = y' \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} \end{array}$$

převést na tuto soustavu rovnic prvního řádu (6.29).

Dále předpokládejme, že tento nelineární systém má singulární bod (rovnovážný stav) v počátku souřadnicového systému, tzn. že pro  $x_1' = x_2' = \dots = x_n' = 0$  je řešením bod  $[0, 0, \dots, 0]$ . Kdyby obvod neměl singulární bod v počátku (to je obecně pouze vlastností lineárních obvodů), je možné použít vhodné transformace a do počátku ho posunout. V dalším budeme zkoumat stabilitu tohoto rovnovážného stavu.

Ljapunovova metoda předpokládá nalezení vhodné spojité funkce (tzv. Ljapunovy funkce)

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6.30)$$

proměnných  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , které jsou zároveň proměnnými daného systému (6.29). Tato funkce musí být **pozitivně definitní** a mít spojité první parciální derivace.

Podle definitnosti funkce  $V$  a její derivace  $dV/dt$  podle času lze pak posuzovat stabilitu rovnovážného stavu systému (rovnovážný stav odpovídá podle předpokladu singulárnímu bodu v počátku).

Derivaci funkce  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  podle času získáme jako derivaci složené funkce

$$V' = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} \quad (6.31)$$

přičemž za derivace  $\frac{dx_i}{dt} = x_i'$  dosadíme pravé strany z rovnic systému (6.29).



$$\mathbf{V}' = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{f}_1 + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_2} \mathbf{f}_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_n} \mathbf{f}_n \quad (6.32)$$

### VĚTY:

**Asymptotická stabilita:** Existuje-li Ljapunovova funkce  $V$  taková, že její derivace podle času  $V'$  je **negativně definitní**, je rovnovážný stav **asymptoticky stabilní**.

**Stabilita:** Existuje-li Ljapunovova funkce  $V$  taková, že její derivace podle času  $V'$  je **negativně semidefinitní**, je rovnovážný stav **asymptoticky stabilní**.

**Nestabilita:** Existuje-li Ljapunovova funkce  $V$  taková, že její derivace podle času  $V'$  je **pozitivně definitní nebo semidefinitní**, je rovnovážný stav **asymptoticky stabilní**.

Symbolicky zapsáno:

$$\begin{aligned} V' < 0 &\Rightarrow \text{RS asymptoticky stabilní} \\ V > 0: \quad V' \leq 0 &\Rightarrow \text{RS stabilní} \\ V' > 0 &\Rightarrow \text{RS nestabilní} \end{aligned}$$

Ljapunovovy věty o stabilitě dávají pouze postačující podmínky, nikoliv nutné a postačující. **Jestliže pro nějakou funkci  $V$  je její derivace  $V'$  indefinitní funkce, pak to neznamená, že obvod je nestabilní. Lze jen konstatovat, že pokus o určení stability se nezdařil a že je nutné volit jinou funkci  $V$ .**

Uvedené věty o stabilitě jsou buď splněny v určité oblasti kolem počátku a pak je rovnovážný stav lokálně stabilní, asymptoticky stabilní či nestabilní v dané oblasti. Nebo platí podmínky předcházejících vět v celém prostoru a rovnovážný stav je globálně stabilní, asymptoticky stabilní či nestabilní.

Dané věty dávají postačující podmínky stability, ale neukazují cestu k nalezení funkce  $V$ . Neexistuje pro nelineární systémy obecný způsob, jak funkci  $V$  nalézt. Jde o to, abychom určili  $V$  tak, aby ona sama i její derivace  $dV/dt$  byly definitní funkce.

č.	rovnice systému	omezení		funkce $V$
1	$ay'' + by' + cy = 0$	-		$V = \frac{c}{a} x_1^2 + x_2^2$
2	$ay'' + by'(y)^q + cy = 0$	$r$ sudé	$q$ liché	
3	$ay'' + by'(y)^q + cy^t = 0$	$r$ sudé	$q, t$ liché	$V = 2 \frac{c}{a} \frac{1}{t+1} x_1^{t+1} + x_2^2$
4	$ay'' + b(my^r + ny^s)(y)^q + cy^t = 0$	$r, s$ sudé	$q, t$ liché	
5	$ay'' + b(my^r + ny^s)[e(y)^q + f(y)^k] + cy^t = 0$	$r, s$ sudé	$k, q, t$ liché	

$T$

Tabulka Ljapunovových funkcí pro obvody 2. řádu

Obecně pro nelineární systémy existuje více matematických metod, které umožňují generování Ljapunovovy funkce vždy pro určitou skupinu systémů. Všechny jsou však složité a teoretické náročné. Proto zde uvádíme v tab. 6.1 ztabelované Ljapunovy funkce  $V$  pro nejobecnější skupinu regulačních obvodů 2. řádu. V podstatě by stačilo uvést rovnici č.5, neboť systémy č.1-4 jsou zjednodušením tohoto systému. Uvedením všech pěti funkcí je práce s tabulkou přehlednější.

**Příklad 6.10:** Pro daný konkrétní nelineární systém 2. řádu zvolíme pozitivně definitní Ljapunovu funkci ve tvaru

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

a její časové derivace  $V'(x_1, x_2)$  nám po dosazení pravých stran rovnice systému vyjdou ve tvaru

$$\begin{array}{ll} \text{a) } V'(x_1, x_2) = -(x_1^2 + x_2^2) & \text{c) } V'(x_1, x_2) = -x_1^2(x_2^2 + 1) \\ \text{b) } V'(x_1, x_2) = -x_1 - x_2 & \text{d) } V'(x_1, x_2) = +x_1^2(x_2^2 + 1) \end{array}$$

Rozhodněte o stabilitě rovnovážného stavu, kterým je počátek souřadnic.

**Řešení:** a) asymptoticky stabilní ( $V'$  je negativně definitní)  
 b) podle zvolené Ljapunovy funkce  $V$  nelze rozhodnout o stabilitě ( $V'$  je indefinitní)  
 c) stabilní ( $V'$  je negativně semidefinitní)  
 d) nestabilní ( $V'$  je pozitivně semidefinitní).

Tyto vlastnosti rovnovážných stavů jsou globální.

**Příklad 6.11:** Rozhodněte o stabilitě nelineárního regulačního obvodu popsaného rovnicí

$$y'' + (1 + y^2)y' + y = 0$$

**Řešení:** Známou substitucí (6.2) převedeme rovnici na soustavu rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -(1 + x_1^2)x_2 - x_1 \end{aligned}$$

Soustava má evidentně jeden singulární bod – jeden rovnovážný stav, a tím je počátek souřadnic  $[0, 0]$ . Podle tab. 6.1 zvolíme Ljapunovu funkci č. 4 ( $a=b=c=m=n=q=t=1$ ;  $r=0$ ;  $s=2$ )

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

a spočítáme její derivaci podle času s dosazením pravých stran systému

$$V'(x_1, x_2) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 = 2x_1x_2 + 2x_2[-(1 + x_1^2)x_2 - x_1] = -2(1 + x_1^2)x_2^2$$

Funkce  $V'$  je negativně semidefinitní (protože pro  $x_2 = 0$  je pro libovolné  $x_1$  rovna nule) a rovnovážný stav je globálně stabilní (nikoliv asymptoticky stabilní).

**Příklad 6.12:** Určete stabilitu nelineárního obvodu podle obr. 6.31.

**Řešení:** Rovnice lineární části obvodu je

$$y'' + y' = m$$

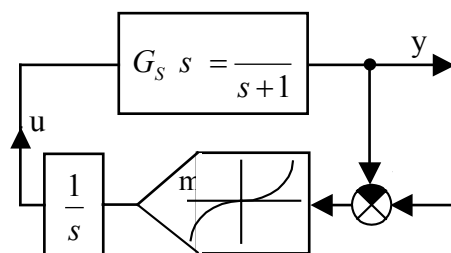
Dosadíme  $m = e^3$ ;  $e = -y$  ( $w = 0$ ) a získáme rovnici obvodu

$$y'' + y' + y^3 = 0$$

Používanou substitucí převedeme rovnici na soustavu

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_2 - x_1^3 \end{aligned}$$

Rovnovážný stav je evidentně počátek souřadnic. Podle tab. 6.1 zvolíme Ljapunovu funkci č. 3 ( $a=b=c=q=1$ ;  $r=0$ ;  $t=3$ )



Obr. 6.31

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^4}{2} + x_2^2$$

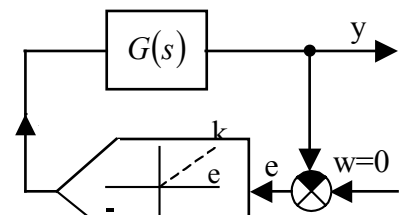
a spočítáme její derivaci podle času s dosazením pravých stran systému

$$V'(x_1, x_2) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 = 2x_1^3 x_2 + 2x_2(-x_2 - x_1^3) = -2x_2^2$$

Funkce  $V'$  je negativně semidefinitní (protože pro  $x_2 = 0$  je pro libovolné  $x_1$  rovna nule) a rovnovážný stav je globálně stabilní (nikoliv asymptoticky stabilní).

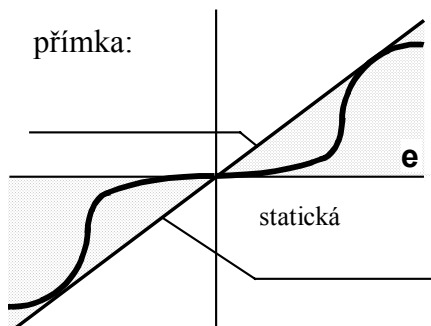
### c) Popovovo kritérium

V roce 1959 uveřejnil rumunský vědec A. M. Popov nové kritérium stability nelineárních systémů, které je velmi výhodné pro praxi, protože k vyšetření stability se používá běžných frekvenčních charakteristik lineární části obvodu. Kritérium je dnes rozpracováno pro systémy se spojitými i diskrétními systémy, pro systémy s větším počtem nelinearit a pro další systémy. My se seznámíme s nejjednodušší verzí tohoto kritéria pro obvody s jednou nelinearitou a s lineární částí, kde lze do jednoho přenosu zahrnout všechny lineární členy. Na tento typ lze převést velkou část nelineárních systémů.



Obr. 6.32

Podle obr. 6.32 uvažujme autonomní systém s lineární částí danou přenosem  $G(s)$  a nelineární částí, popsanou statickou charakteristikou, která leží v 1. a 3. kvadrantu a prochází počátkem.



Obr. 6.33

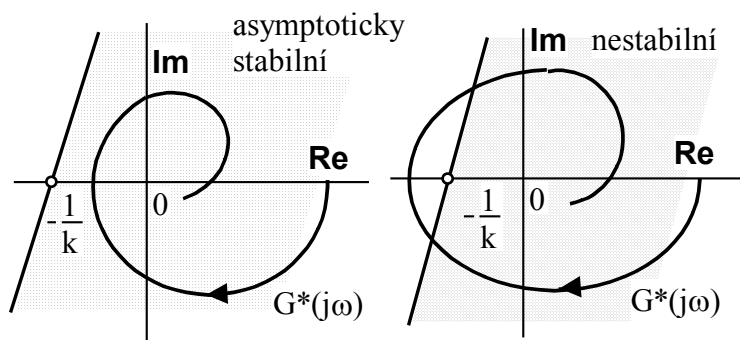
Podle obr. 6.33 najdeme **přímku procházející počátkem o rovnici  $u = k \cdot e$** , kde  $k$  je směrnice této přímky tak, aby **celá statická charakteristika ležela pod touto přímkou**. Jinak statická charakteristika může být zcela obecná křivka, která leží ve vyšrafovaném sektoru. To je velká výhoda Popovova kritéria – statická charakteristika může být obecná křivka. V dalším budeme předpokládat, že **statická charakteristika nelineárního prvku je daná hodnotou  $k$** , což je směrnice uvedené přímky a touto hodnotou je zadán nelineární člen.

**Popovovo kritérium:** Nelineární systém s lineární částí danou přenosem  $G(s)$  a jednoznačnou nelinearitou, ležící pod přímkou o směrnici  $k$  je globálně asymptoticky stabilní, existuje-li libovolné reálné číslo  $q$  pro něž je pro všechna  $\omega \geq 0$  splněna nerovnost

$$\operatorname{Re}[(1 + j\omega q)G(j\omega)] + \frac{1}{k} > 0 \quad (6.33)$$

Toto je analytická verze Popovova kritéria. Většinou se však převádí do grafické verze a stabilita řeší graficky. Odvození převodu je možno nalézt v [23].

**Popovovo kritérium – grafická verze:** Nelineární systém, respektive nelineární regulační obvod je globálně asymptoticky stabilní, můžeme-li vést bodem  $[-1/k, 0]$  libovolnou přímku, aby celá **modifikovaná frekvenční charakteristika  $G^*(j\omega)$  lineární části ležela vpravo od této přímky** – viz obr. 6.34.



Obr. 6.34

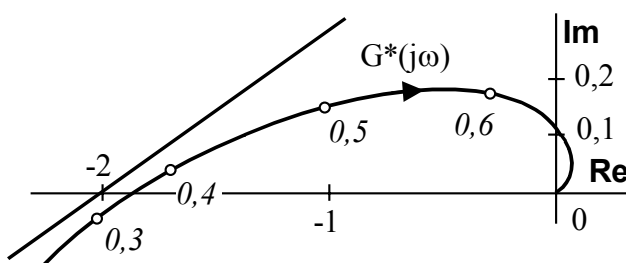
**Modifikovaná frekvenční charakteristika  $G^*(j\omega)$  lineární části** se sestavuje stejně jako normální frekvenční charakteristika v komplexní rovině, jenom imaginární část je pro každý bod vynásobena příslušnou odpovídající hodnotou  $\omega$ .

**Příklad 6.13:** Určete, zda obvod podle obr. 6.32 s přenosem lineární části

$$G(s) = \frac{1}{s(2s+1)(s+1)^2(0,5s+1)}$$

je stabilní, když statická charakteristika nelineárního členu leží v 1. a 3. kvadrantu všude pod přímkou o směrnici  $k = 0,5$ .

**Řešení:** V komplexní rovině sestavíme modifikovanou frekvenční charakteristiku lineární části podle daného přenosu  $G(s)$  – obr. 6.35.



Obr. 6.35

Charakteristiku  $G^*(j\omega)$  sestavujeme tak, že všechny imaginární části násobíme příslušnou hodnotou  $\omega$ . V tabulce k hodnotám  $\omega$  počítáme hodnoty  $Re$  a  $\omega Im$ . Jak je z obrázku vidět, bodem  $-\frac{1}{k} = -\frac{1}{0,5} = -2$  můžeme vést přímku,

aby  $G^*(j\omega)$  ležela pro všechna  $\omega$  vpravo od této přímky. Obvod je proto globálně

asymptoticky stabilní.

**Příklad 6.14:** Stanovte, pro jaký sklon  $k$  přímky ohraničující nelineární reléovou charakteristiku podle obr. 6.32 je regulační obvod stabilní. Přenos lineární části je

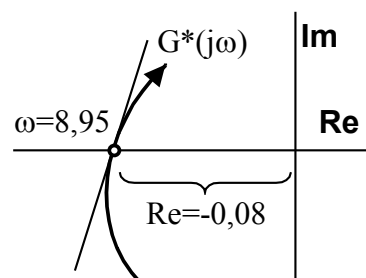
$$G(s) = \frac{1}{(0,5s+1)(0,2s+1)(0,1s+1)}$$

**Řešení:** Normální frekvenční přenos  $G(j\omega)$  rozdělíme na reálnou a imaginární složku. Modifikovaný frekvenční přenos  $G^*(j\omega)$  pak má imaginární složku  $\omega$  - krát větší

$$G^*(j\omega) = \frac{1 - 0,17\omega^2}{(1 + 0,25\omega^2)(1 + 0,04\omega^2)(1 + 0,01\omega^2)} - j\omega^2 \frac{0,8 - 0,01\omega^2}{(1 + 0,25\omega^2)(1 + 0,04\omega^2)(1 + 0,01\omega^2)}$$

Jestliže je imaginární část  $G^*(j\omega)$  rovna nule, protíná frekvenční charakteristika reálnou osu, a to je při  $0,8 - 0,01\omega^2 = 0 \rightarrow \omega^2 = 80$  ( $\omega = 8,95$ ). Dosadíme-li tuto frekvenci do reálné části  $G^*(j\omega)$ , dostaneme úsek na reálné ose, ve kterém frekvenční charakteristika protíná reálnou osu a tento úsek je  $0,08$ . Aby podle obr. 6.36 byl obvod asymptoticky stabilní, musí platit

$$-\frac{1}{k} < -0,08 \Rightarrow k < 12,5$$



# LITERATURA

- [1] Bartsch, H.J.: Matematické vzorce. SNTL, Praha, 1983
- [2] Dorf, R.C.- Bishop, H.R.: Modern Control Systems. Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1995
- [3] Forsythe, W.- Goodall, R.M.: Digital Control . Fundamentals, Theory and Practice. MacMillan Education Ltd. London, 1991
- [4] Hoffmann, Z.- Mykiska, A.- Kára, J.: Základy automatického řízení. Příklady, úlohy. skriptum ČVUT, Praha, 1993
- [5] Hofreiter, M. a kolektiv: Příklady a úlohy z automatického řízení. Skriptum ČVUT, Praha, 1999
- [6] Isermann, R.: Digital Control Systems. Volume 1. Springer-Verlag, Berlin, 1989
- [7] Kubík, S.- Kotek, Z.- Strejc, V.- Štecha, J.: Teorie automatického řízení I. SNTL, Praha, 1982
- [8] Levine, W.S.: The Control Handbook. CRC Press, Inc. Boca Raton, Florida, 1996
- [9] Raven, H.R.: Automatic Control Engineering. McGraw-Hill, Inc. New York, 1995
- [10] Rektorys, K. a spolupracovníci: Přehled užití matematiky. SNTL, Praha, 1981
- [11] Škrášek, J.- Tichý, Z.: Základy aplikované matematiky I-III. SNTL, Praha, 1983
- [12] Švarc, I.: Automatizace - Automatického řízení , CERM - Brno, 2002
- [13] Švarc, I.: Teorie automatického řízení I. Skriptum VUT, Brno, 1989
- [14] Švarc, I.: Teorie automatického řízení II. Skriptum VUT, Brno, 1993
- [15] Švarc, I.: Teorie automatického řízení . Sbírka příkladů. Skriptum VUT, Brno, 1993
- [16] Švarc, I.: Základy automatizace a regulace. Sbírka příkladů. Skriptum VUT, Brno, 1989
- [17] Švarc, I.- Lacko, B.- Němec, Z.: Automatizace. Skriptum VUT, Brno, 1995
- [18] Vavřín, P.: Teorie automatického řízení I. Skriptum VUT, Brno, 1988
- [19] Víteček, A.: Matematické metody automatického řízení. Transformace L a Z. Skriptum VŠB, Ostrava, 1988
- [20] Zítek, P.- Hofreiter, M.- Hlava, J.: Automatické řízení. Skriptum ČVUT, Praha, 2000
- [21] Zítek, P.- Víteček, A.: Doporučované značky, zkratky a názvy z oblasti automatického řízení. Interní publikace. VŠB, Ostrava, 1995