Nelineární systémy

Nelineární chování podmiňuje
vznik nových hodnot

http://www.kky.zcu.cz/ -> Předměty -> NS

Ing. Andrea Fialová, Ph.D.
fialova@kky.zcu.cz
UK 524

Konzultační hodiny:
Út, Pá 10 – 11:30
St, Čt, Pá 13 – 15:00

Základní pojmy, definice…

Reprezentace $\Re(S)$ systému S

$$\Re(S): \quad \dot{x} = F(x,u,t)$$
$$y = H(x,u,t)$$

$$\dim x = n, \dim u = m, \dim y = p$$

$$F : X \times U \times T \to X$$
$$H : X \times U \times T \to Y$$

t-variantní systém

$$\dot{x} = f(t, x),\ x(t_0) = x_0 \qquad \dot{x} = A(t)x,\ x(t_0) = x_0$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\dot{x} = f(x, t) \qquad\qquad \dot{x} = f(x, t)$$

$$\dot{t} = 1 \qquad\qquad \dot{t} = 1$$

$$x(t_0) = x_0, t(t_0) = t_0 \qquad x(t_0) = x_0, t(t_0) = t_0$$

Rozdíly mezi LS a NS

$$\dot{x} = F\left(x, u, t\right);\ x_0$$

Očekáváme

(i) Alespoň jedno řešení existuje EXISTENCE

(ii) Právě jedno řešení JEDNOZNAČNOST

(iii) Právě jedno řešení pro všechna *t*, tj. na $t \in \langle 0; \infty)$

! platí pouze pokud *x(t)* i *u(t)* jsou lineární $\forall t$

přísnější

! pro NS nemusí

Rozdíly mezi LS a NS - existence řešení

Příklad

$$\dot{x} = sign(x),\ x_0$$

kde

$$sign(x) = \begin{cases} 1\mathbf{K}\ x \geq 0 \\ -1\mathbf{K}\ x < 0 \end{cases}$$

! žádná spojitě diferencovatelná funkce rovnici nevyhovuje

řešení

$$x(t) = t, \quad x \geq 0$$

$$= -t,\ x < 0$$

Rozdíly mezi LS a NS – jednoznačnost řešení

Příklad

$$\dot{x} = 3x^{\frac{2}{3}},\ x_0 = 0$$

řešení

$$\begin{aligned} x_a(t) &= (t-a)^3 \qquad t \geq a \\ &= 0 \qquad\qquad\quad t < a \end{aligned}$$

Rozdíly mezi LS a NS – prodloužení do nekonečna (existence řešení pro všechna t)

Příklad

$$\dot{x} = 1 + x^2,\ x_0 = 0$$

řešení

$$x(t) = \tan(t),\ \text{pro } t \in \left\langle 0; \frac{p}{2} \right)$$

Lze místo NS používat LS?

Ano, lze. ALE pouze na „malém“ okolí bodu, kde linearizujeme (rovnovážný bod, pracovní bod)

Linearizovaný LS popisuje pouze LOKÁLNÍ chování v okolí jednoho bodu

Linearizace, viz aproximativní linearizace

Dynamika NS je bohatá, existuje řada jevů, které v LS nemohou nastat

Další rozdíly mezi LS a NS

vnější popis (dif. rovnice)	vnější popis (dif. rovnice)
vnitřní (stavový) popis	vnitřní (stavový) popis
přenos	
vlastní čísla	
charakteristiky (impulsní, přechodová, frekvenční)	
princip superpozice	

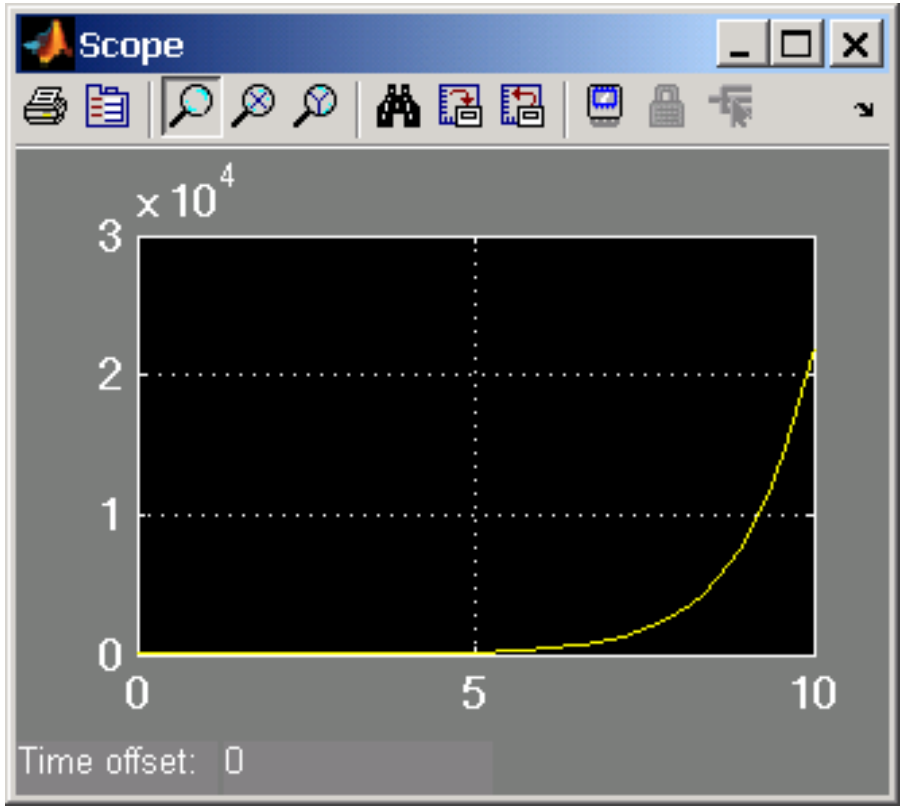
Ryze nelineární jevy

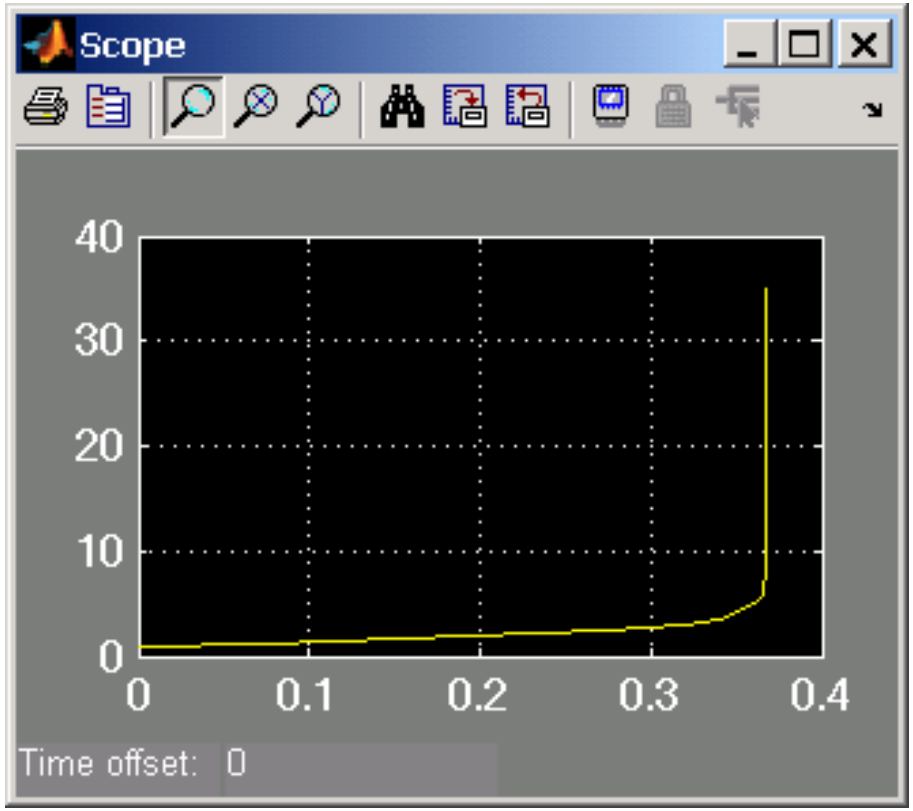
- únik v konečném čase
- mnohonásobné rovnovážné stavy (pracovní body)
  NS může mít více (žádné) izolované rovnovážné stavy
- limitní (mezní) cykly
  NS může mít stabilní oscilace s pevnou amplitudou a frekvencí nezávislé na počátečním stavu
- bifurkace
  kvalitativní změny chování způsobené změnou parametrů
- složité dynamické chování (chaos, turbulence …)
  “efekt motýlích křídel“

Nekonečný únik v konečném čase

LS: $\dot{x} = x,\ x(t) = e^{t} x_0$

NS: $\dot{x} = e^{x},\ x(t) = \ln\left(\frac{1}{t-1}\right)$





Více rovnovážných stavů

$$\dot{x}_1 = x_2$$

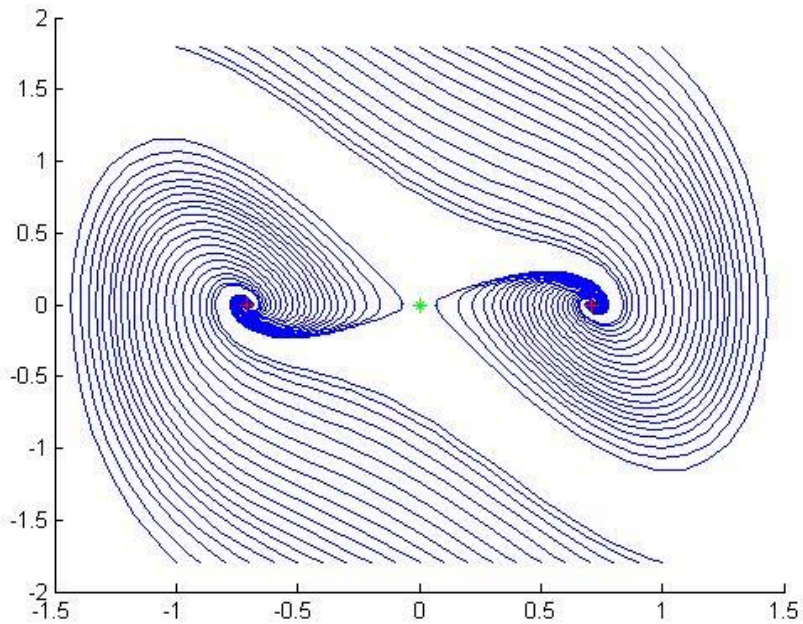
$$\dot{x}_2 = bx_1 - cx_1^3 - ax_2$$

rovnovážné stavy: $x^r = [0,0],\ x^r = \left[+\sqrt{\frac{b}{c}}, 0\right],\ x^r = \left[-\sqrt{\frac{b}{c}}, 0\right]$

Simulace

parametry $a = 1, b = 1, c = 2$

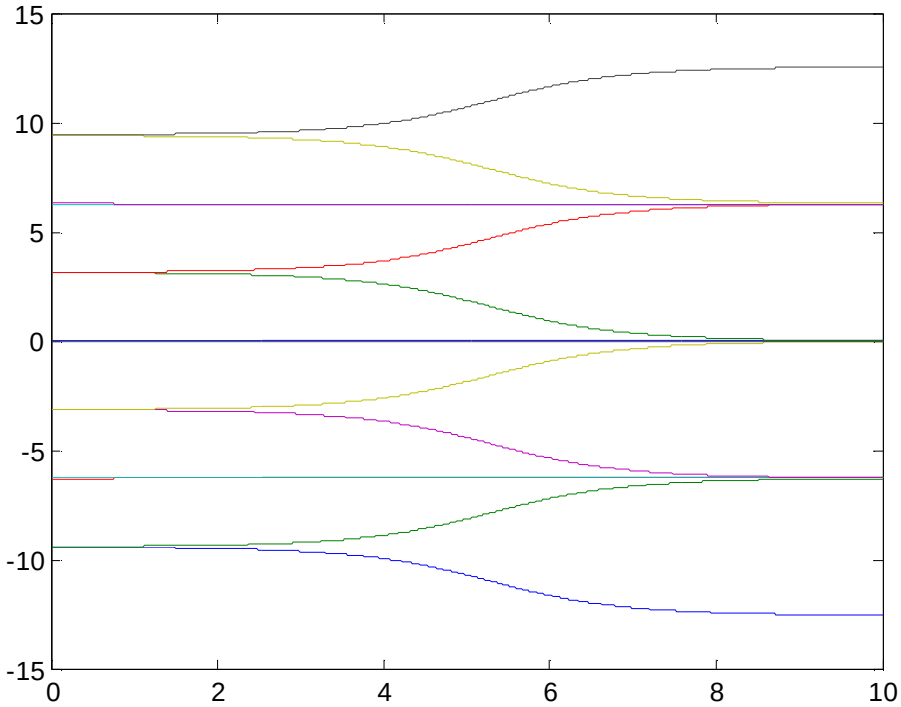
sedlo $[0;0]$, ohnisko $\left[-2^{-\frac{1}{2}};0\right], \left[+2^{-\frac{1}{2}};0\right]$



Nekonečně mnoho rovnovážných stavů

$$\dot{x} = -\sin(x)$$

$$x^r = kp \quad (k = 0, \pm 1, \mathbf{K})$$



Limitní cykly

$$\dot{x}_1 = a x_1 \left(m - x_1^2 - x_2^2 \right) - x_2$$

$$\dot{x}_2 = a x_2 \left(m - x_1^2 - x_2^2 \right) + x_1$$

transformace do polárních souřadnic $x_1 = r \cos j$, $x_2 = r \sin j$

$$\dot{r} = amr - ar^3$$

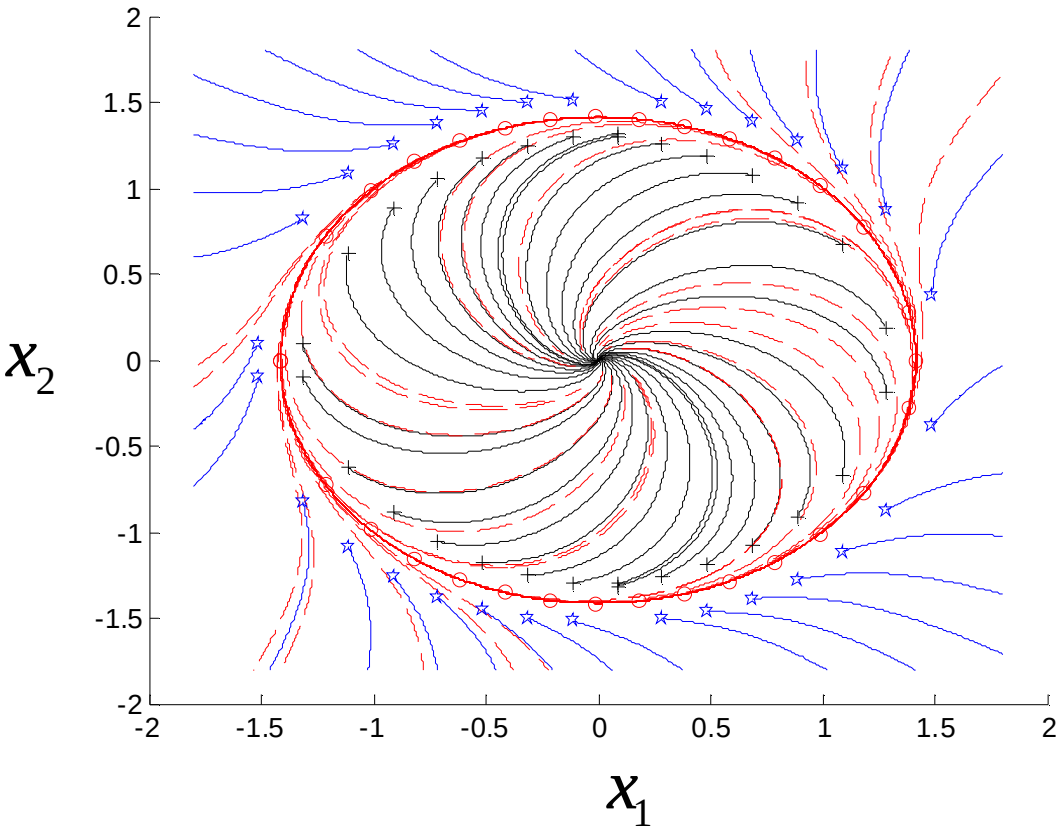
$$\dot{j} = 1$$

=> limitní cyklus: $r^2 = m$

v původních souřadnicích: $x_1^2 + x_2^2 = m$

Simulace

$a = -1,\ m = 2,$



počáteční podmínky:

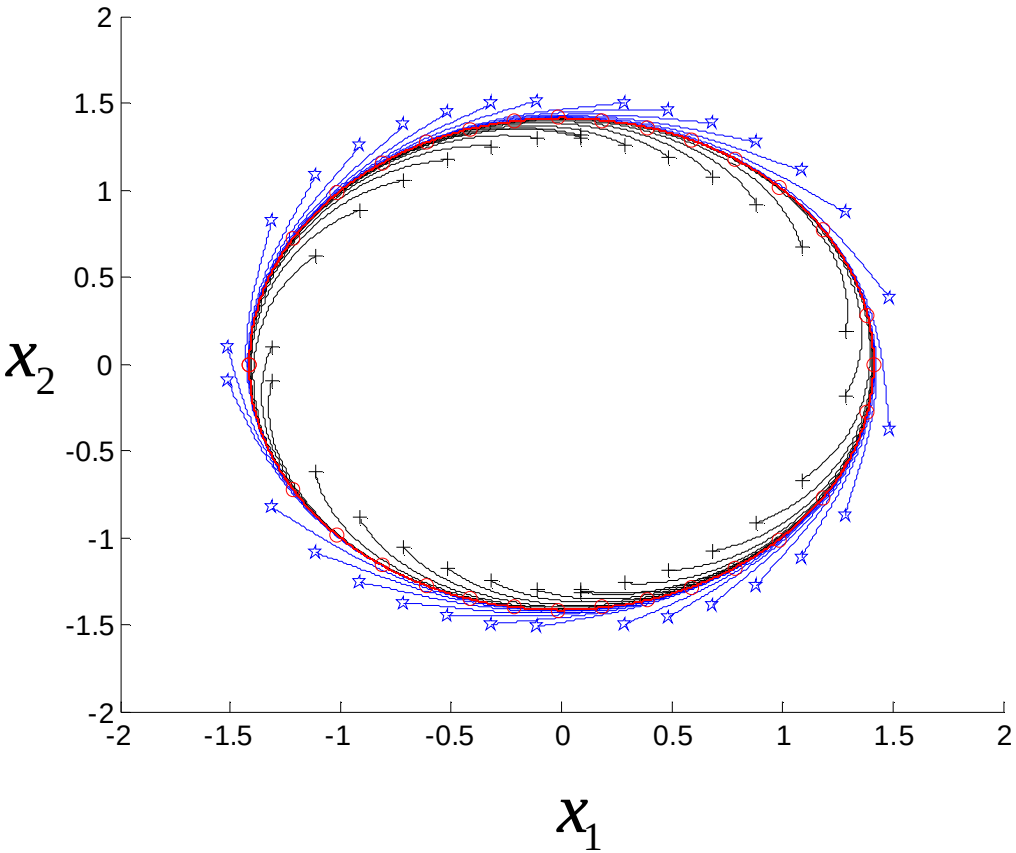
$x_1^2 + x_2^2 < 2$ (černě),

$x_1^2 + x_2^2 > 2$ (modře),

$x_1^2 + x_2^2 = 2$ (červeně)

Simulace

$a = 1,\ m = 2,$



počáteční podmínky:

$x_1^2 + x_2^2 < 2$ (černě),

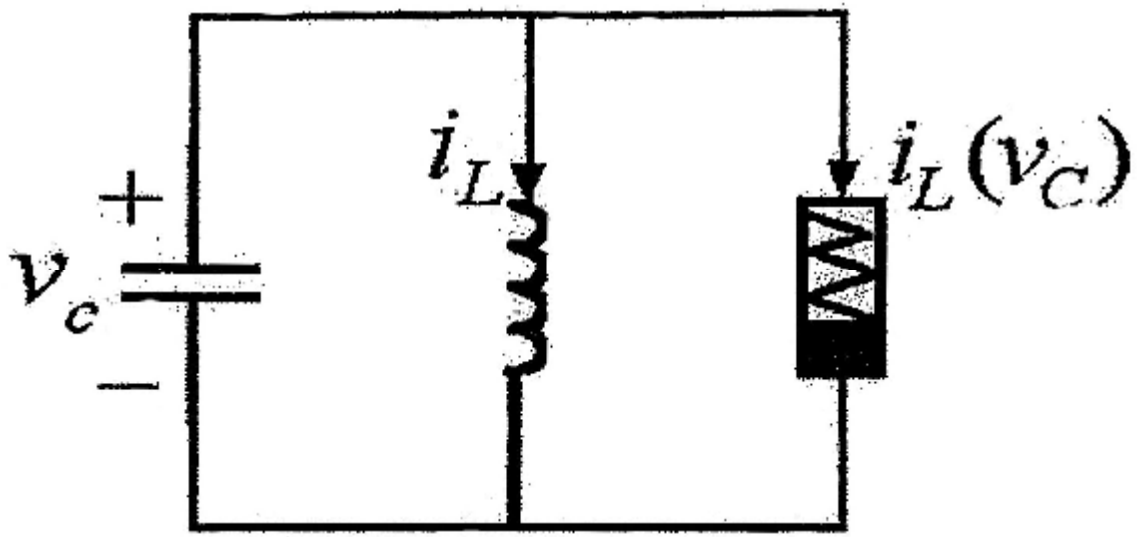
$x_1^2 + x_2^2 > 2$ (modře),

$x_1^2 + x_2^2 = 2$ (červeně)

Van der Pool a jeho oscilátor

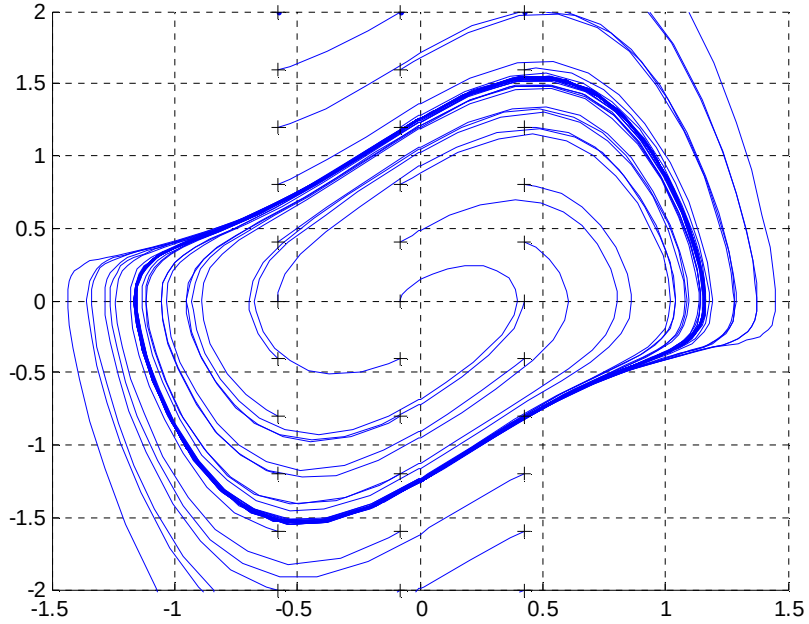
Balthasar van der Pool (1889 – 1959)

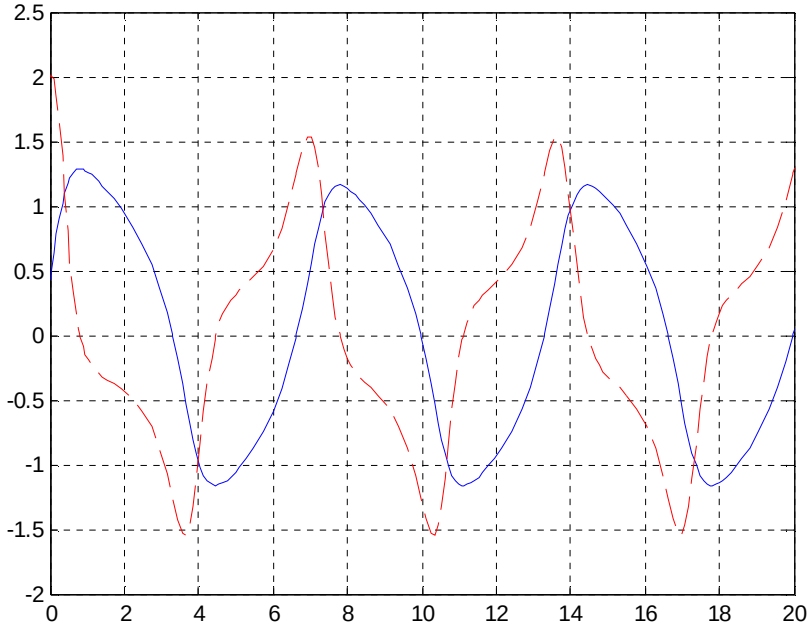
$$y'' + e\left(a + b\,y^2\right)y' + ky = 0$$



Simulace

$a = 1,\ b = 3,\ e = 1,\ k = 1$

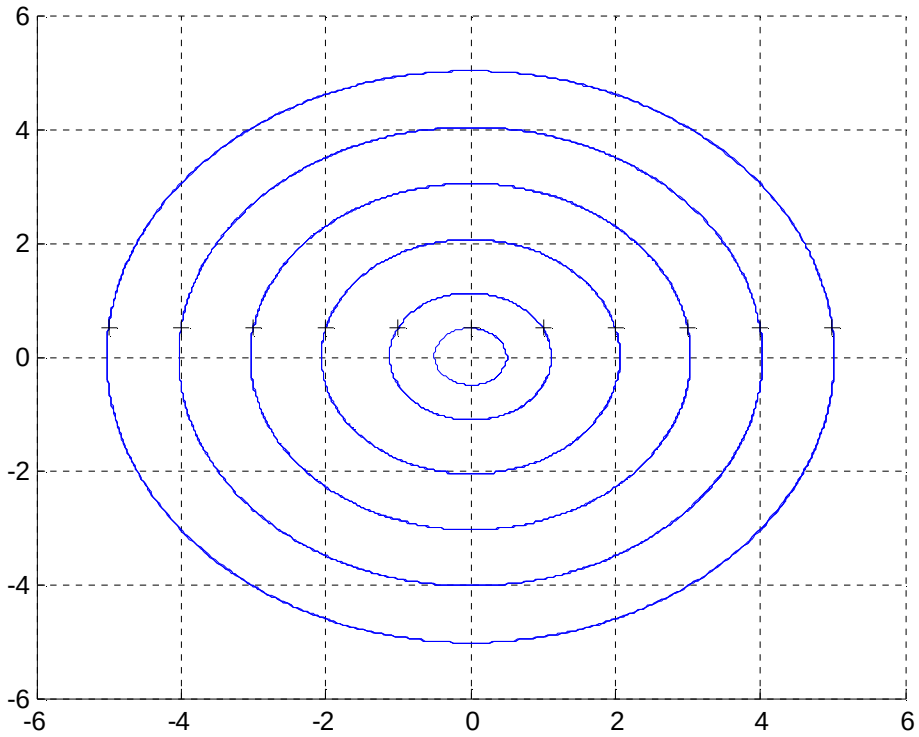




Oscilace LS není mezní cyklus

$$y'' + w_0^2 y = 0$$

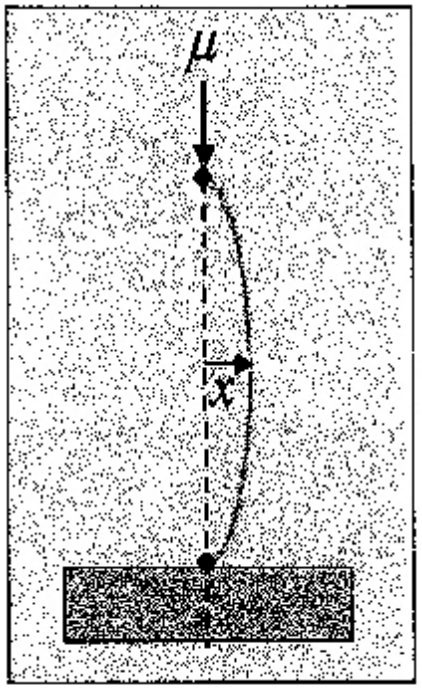
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -w_0^2 x_1$$
$$y = x_1$$



Bifurkace

Leonhard Euler – netlumený nosník

$$mx'' + dx' - mx + l\,x + x^3 = 0$$



d … tlumení

m … zatížení

$l\,x + x^3$ … pružná síla nosníku

! poměr m a l => různé množství rovnovážných stavů

$$m \le l$$

$$x_2 = 0$$

$$-\frac{1}{m}x_1^3 - \frac{l}{m}x_1 + \frac{m}{m}x_1 - \frac{d}{m}x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{m}x_1\left(x_1^2 + l - m\right) = 0$$

$$x_1^r = 0,\ x_2^r = 0$$

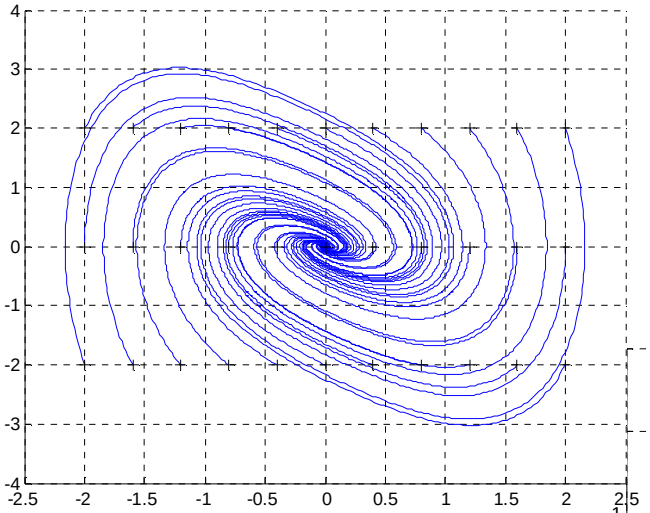
$$m \le l$$

$$x_2 = 0$$

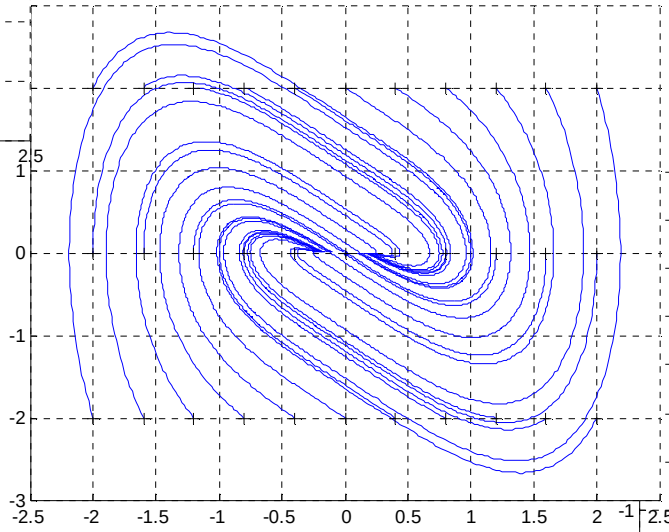
$$-\frac{1}{m}x_1^3 - \frac{l}{m}x_1 + \frac{m}{m}x_1 - \frac{d}{m}x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{m}x_1\left(x_1^2 + l - m\right) = 0$$

$$x_1^r = \left[0, \pm\sqrt{m - l}\,\right],\ x_2^r = 0$$

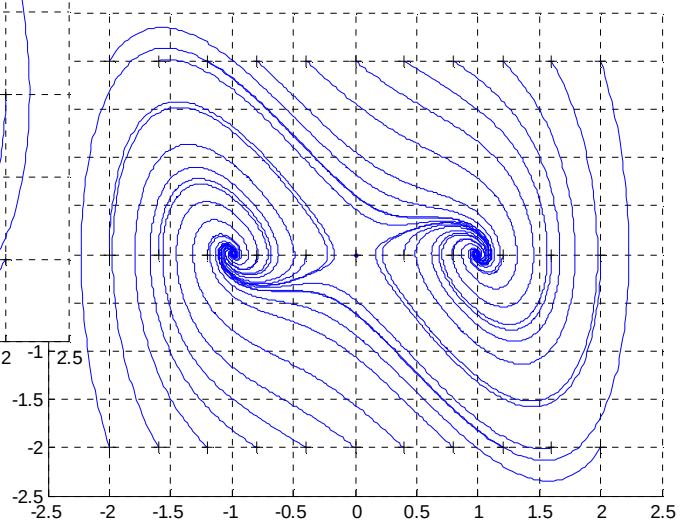
$m < l$


4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5

$m = l$


1
0
-1
-2
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5

$m > l$


-1
-1.5
-2
-2.5
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5

Chaos – Lorenzův atraktor

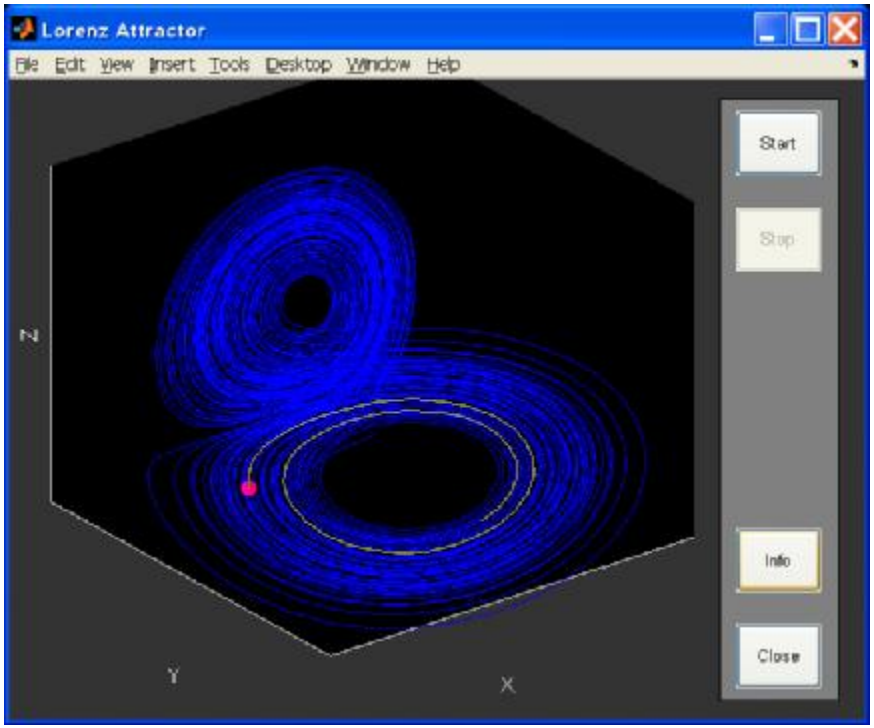
$$\dot{x}_1 = s\left(x_2 - x_1\right)$$
$$\dot{x}_2 = rx_1 - x_2 - x_1x_3$$
$$\dot{x}_3 = -bx_3 + x_1x_2$$

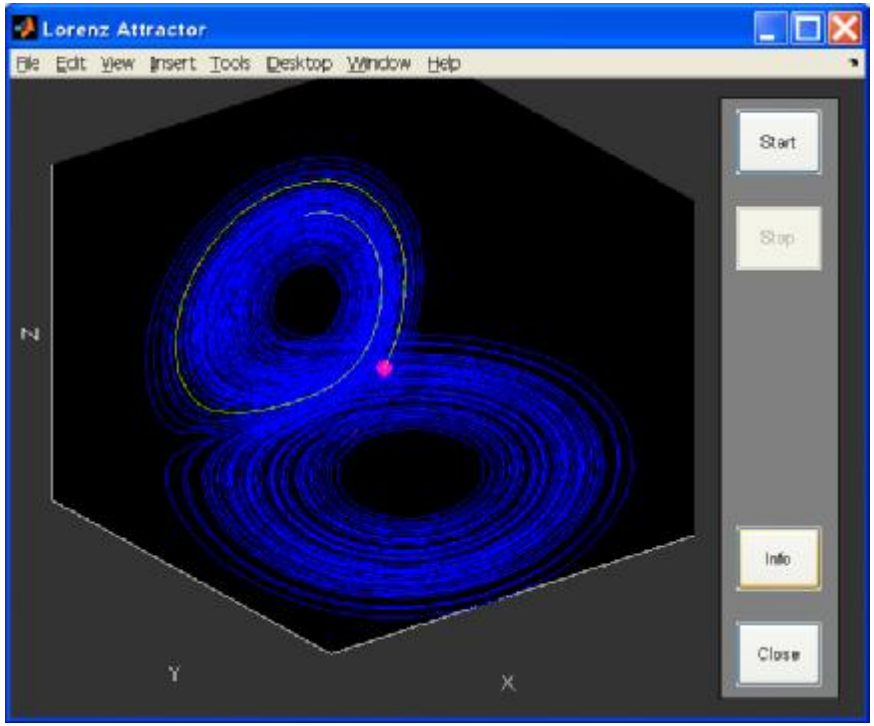
x_1 - časová závislost proudové funkce tekutiny

x_2 - rozdíl teploty stoupajících a klesajících proudů

x_3 - odchylka teploty od lineární křivky v závislosti na výšce

Lorenzův atraktor – příklady simulací



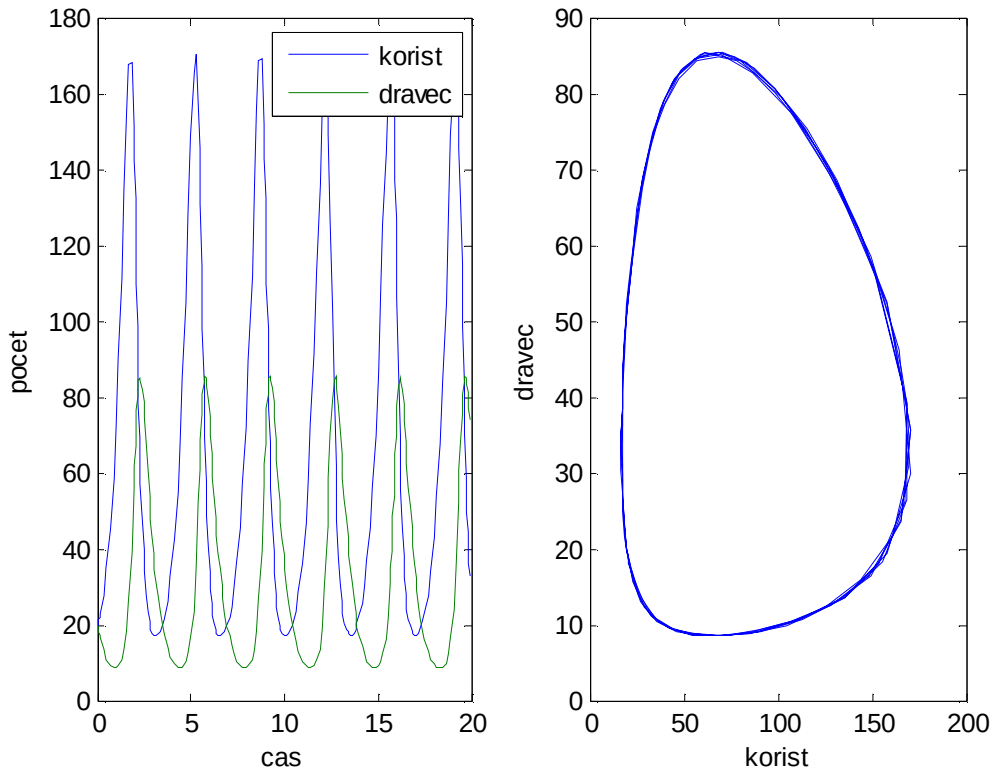


Populační rovnice – Lotka Volterra

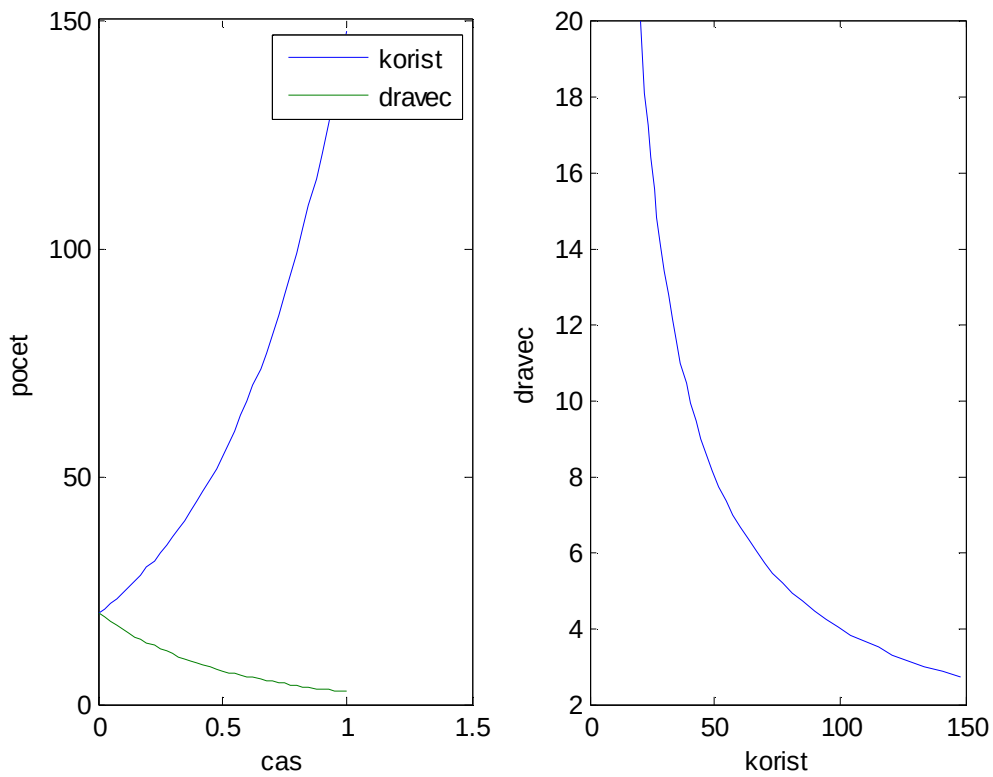
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 - bx_1x_2 \\ -cx_2 + dx_1x_2 \end{bmatrix}$$

x_1 = kořist

x_2 = dravec



Extrémy:

bez dravců: $x_1(t) = x_1(t_0)e^{at}$

bez kořisti: $x_2(t) = x_2(t_0)e^{-ct}$