# Modelování hydraulických a tepelných systémů

Petr Hušek

# Modelování hydraulických a tepelných systémů

Petr Hušek

husek@fel.cvut.cz

katedra řídicí techniky

Fakulta elektrotechnická

ČVUT v Praze

# Co se dnes dozvíme?

- Jaké základní fyzikální zákony využíváme při modelování hydraulických systémů
- Jak modelovat jednoduché hydraulické systémy – výtok kapaliny z nádoby
- Jaké jsou způsoby přenosu tepla, jaké rovnice je charakterizují
- Jak modelovat jednoduché tepelné systémy – chlazení piva v ledničce

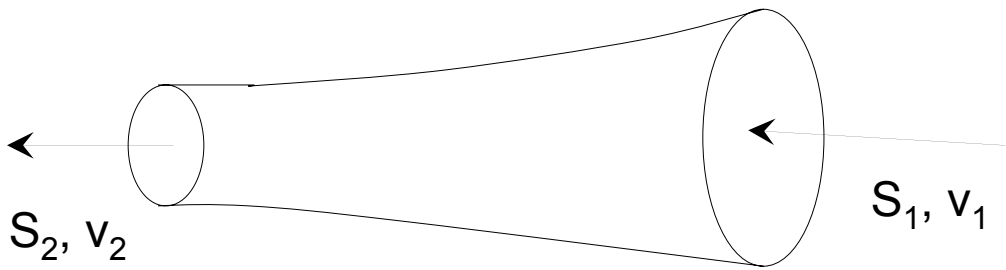
# Modelování hydraulických systémů

## Základní zákony

- rovnice kontinuity

$$\rho \cdot S \cdot v = konst$$

pro ρ = konst: $S \cdot v = konst$




$$Q = S \cdot v = \frac{V}{t}$$

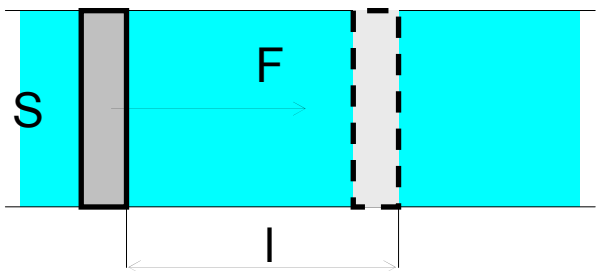
- zákon zachování hmotnosti

- Bernoulliho rovnice
  - zákon zachování energie

$$W_k + W_p + W_h = konst$$

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2$$ – kinetická energie

$$W_p = F \cdot l = p \cdot S \cdot l = p \cdot V = \frac{m \cdot p}{\rho}$$ – tlaková energie



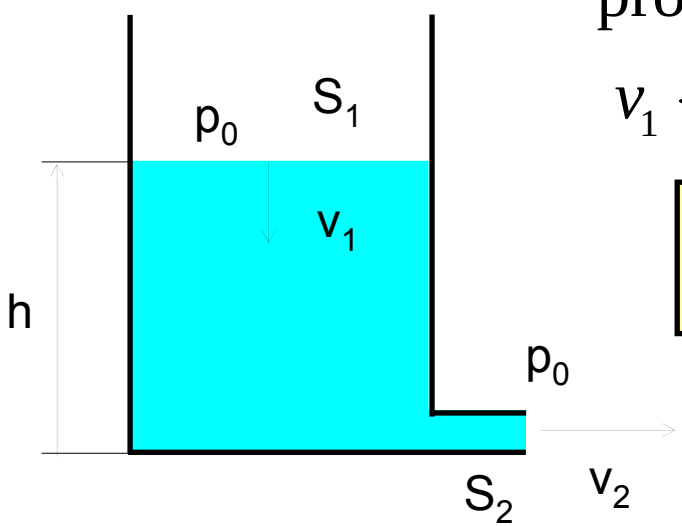

$$W_h = mgh$$ – potenciální energie

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = konst$$ – Bernoulliho rovnice

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + h = konst$$ – výškový tvar

Daniel Bernoulli
(1700-1782)

volný výtok



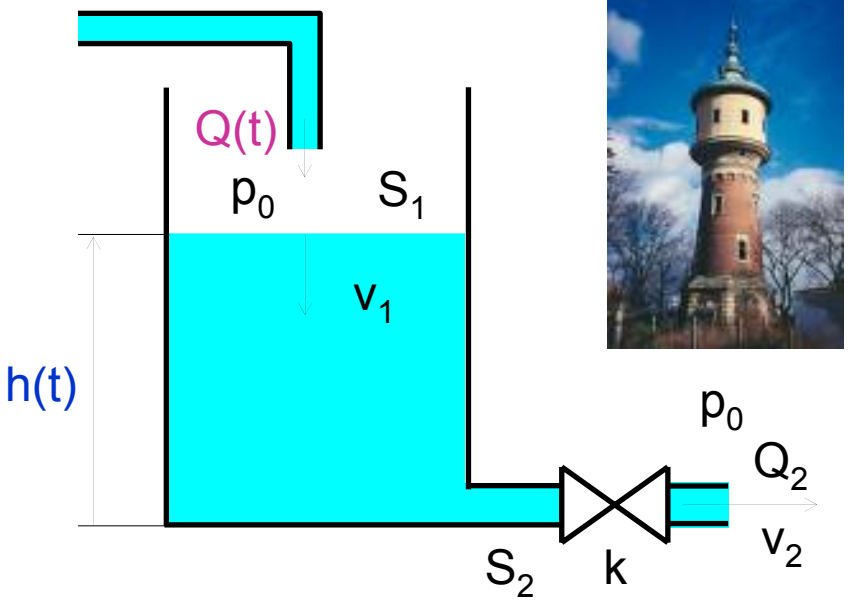

pro $S_1 >> S_2$:

$$v_1 << v_2,\ p_0 = konst$$

$$\boxed{v_2 = \sqrt{2gh}}$$

Evangelista Torricelli
(1608-1647)

# Nádrž s přítokem






vstupní veličina – přítok Q(t)

výstupní veličina – výška hladiny h(t)

konstanta ventilu k∈[0,1] – poruchová veličina

$$S_1 \frac{\Delta h}{\Delta t} = Q - Q_2 = Q - k \cdot S_2 \sqrt{2gh}$$

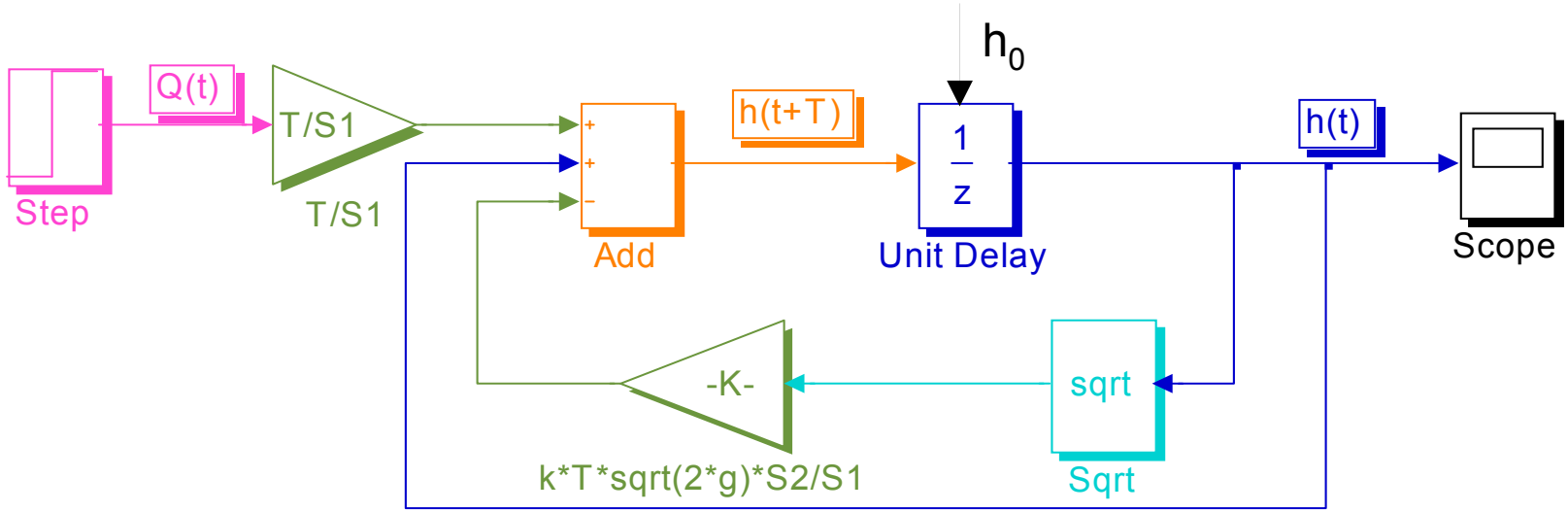
$$h(0) = h_0$$

$$S_1 \frac{\Delta h(t-T)}{\Delta t} = Q(t-T) - k \cdot S_2 \sqrt{2gh(t-T)}, \Delta h(t-T) = \frac{h(t) - h(t-T)}{T}$$

$$\frac{S_1}{T} h(t) + k \cdot S_2 \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h(t-T)} - \frac{S_1}{T} h(t-T) = Q(t-T)$$

$$h(t) = -k \cdot T \cdot \sqrt{2g} \cdot \frac{S_2}{S_1} \sqrt{h(t-T)} + h(t-T) + \frac{T}{S_1} Q(t-T)$$

# model systému



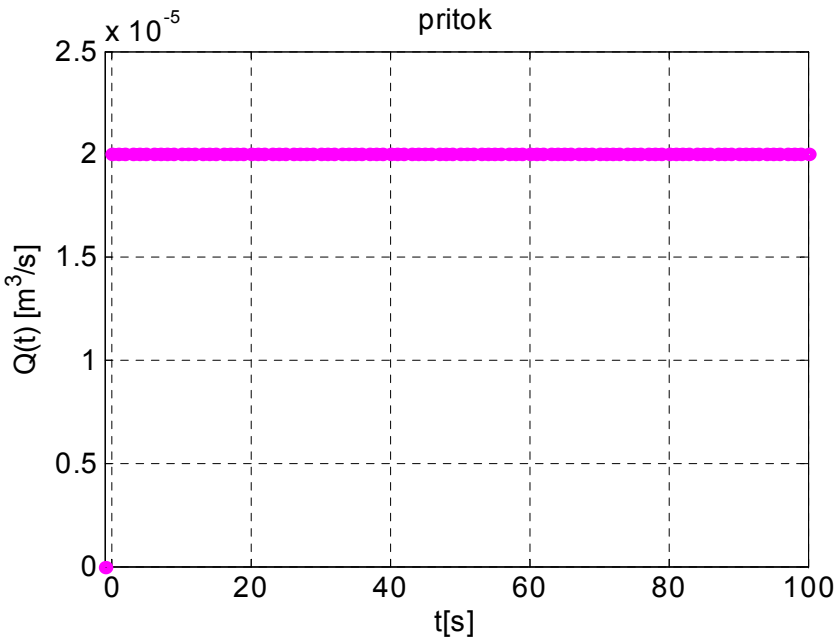

- nelineární systém 1. řádu

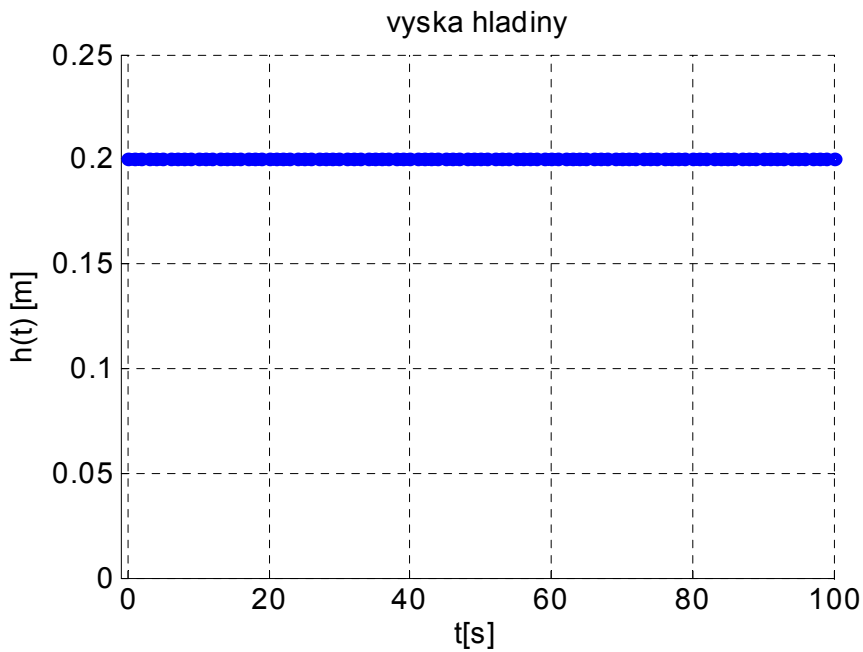
- ustálená výška hladiny (rovnovážný stav) ↔ $\Delta h = 0$:

$$0 = Q(\infty) - k \cdot S_2 \sqrt{2gh(\infty)} \quad \Leftrightarrow \quad h(\infty) = \frac{Q(\infty)^2}{2gk^2 S_2^2}$$

- zesílení $K = \dfrac{h(\infty)}{Q(\infty)} = \dfrac{Q(\infty)}{2gk^2 S_2^2}$

$$S_1 = 25\text{cm}^2 = 25\cdot 10^{-4}\,\text{m}^2, S_2 = 0.1\text{cm}^2 = 1\cdot 10^{-5}\,\text{m}^2, k = 1, T = 1\text{s}$$

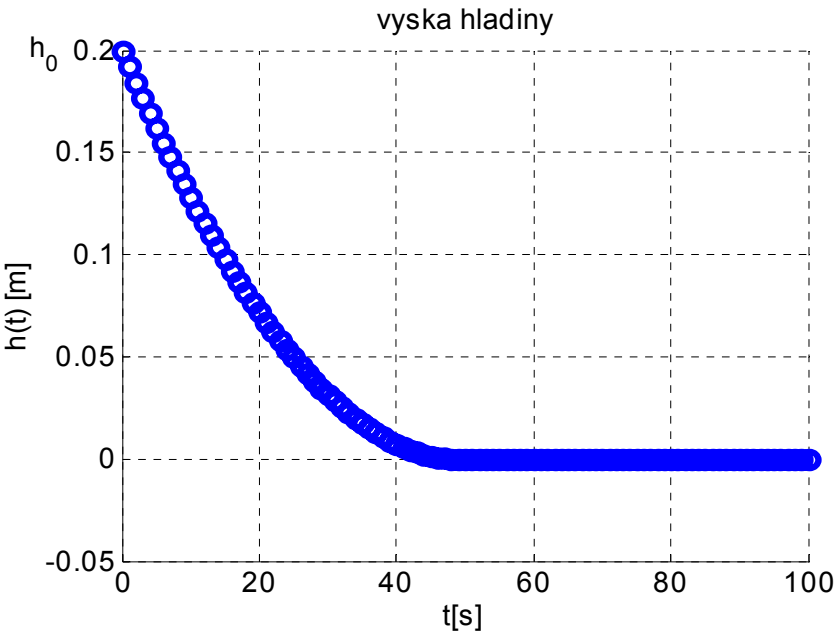


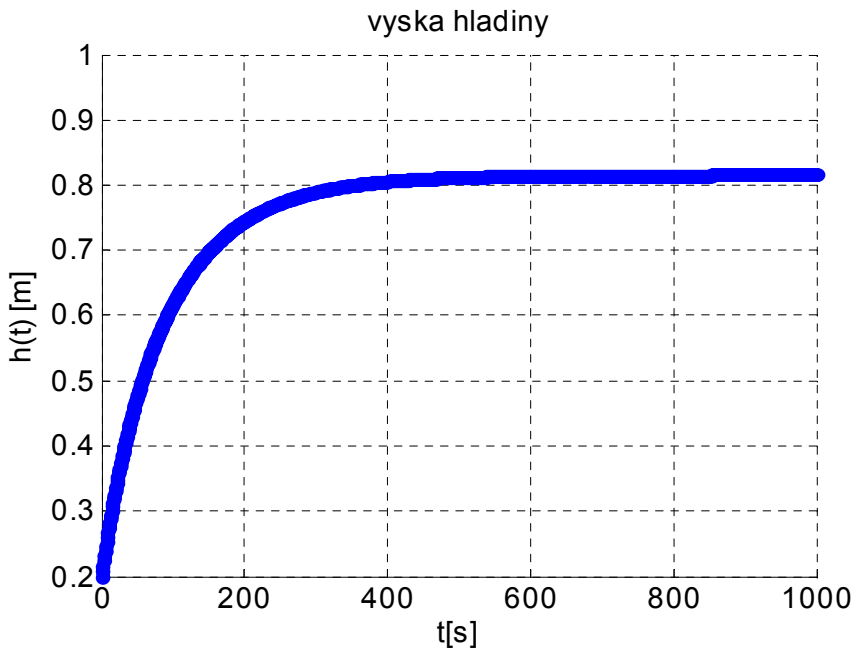

$$Q(\infty) = 2.5\cdot 10^{-5}\,\text{m}^3/\text{s}, h(\infty) = \frac{Q(\infty)^2}{2gk^2S_2^2} \hat{=} 0.2\text{m}$$

- odezva na jednotkový skok

$Q(t) = 0, h(0) = 0.2\text{m}$



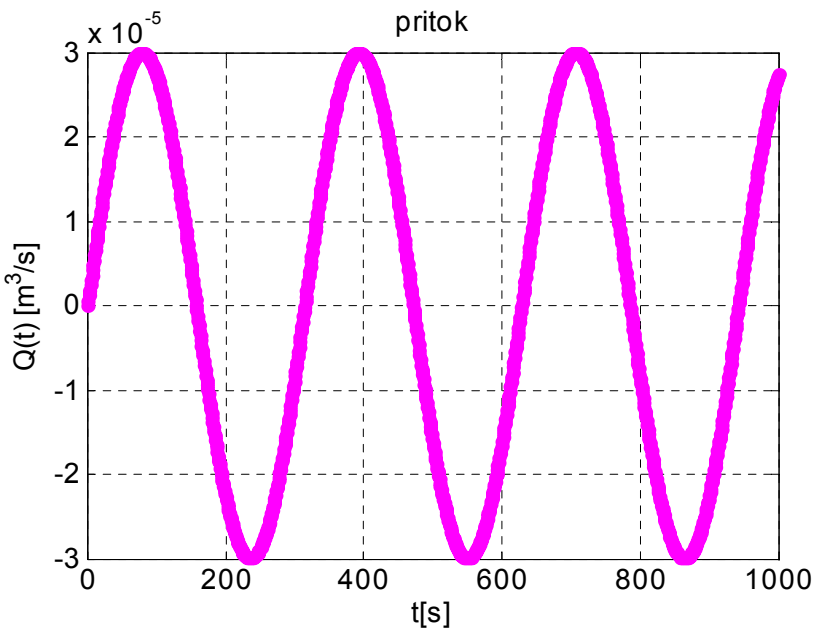

$Q(t) = 4 \cdot 10^{-5} \cdot 1(t)\ \text{m}^3/\text{s}, h(0) = 0.2\text{m}$

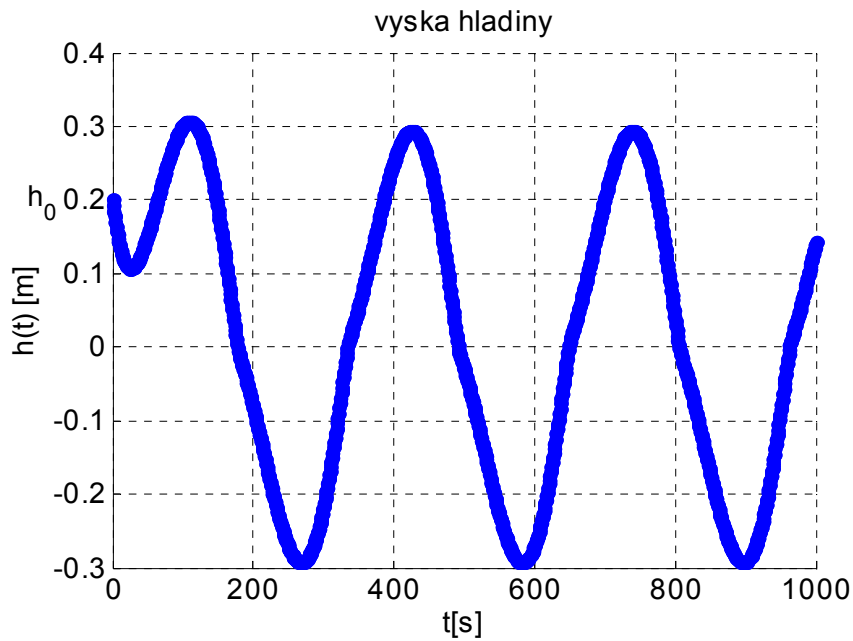



- rozdílná dynamika odezvy na počáteční podmínku a na jednotkový skok

- odezva na harmonický signál

$$Q(t) = 3 \cdot 10^{-5} \sin(0.02t), h(0) = 0.2$$



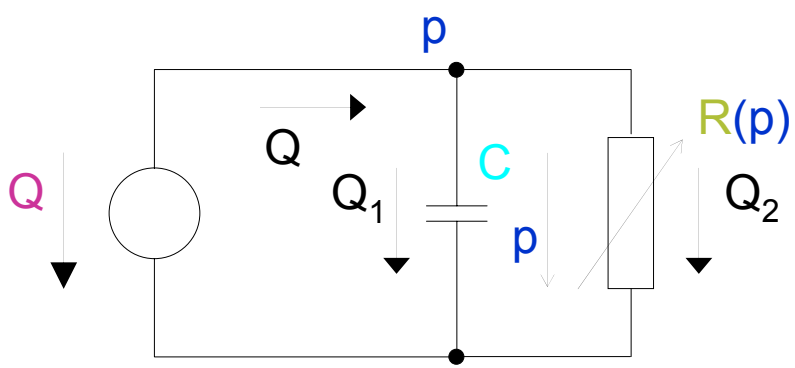

- výstupní průběh není harmonický

- analogický elektrický obvod

Q ~ i, p ~ u, nádrž ~ C, výtok ~ R

$$S_1 \frac{\Delta h}{\Delta t} = Q - k \cdot S_2 \sqrt{2gh} \qquad Q = C\frac{\Delta p}{\Delta t}, Q = \frac{1}{R} \cdot p$$

$$\frac{S_1}{\rho g}\frac{\Delta p}{\Delta t} = Q - \frac{k \cdot S_2 \sqrt{2}}{\sqrt{\rho} \cdot \sqrt{p}} p \quad \Rightarrow \quad C = \frac{S_1}{\rho g}, R(p) = \frac{\sqrt{\rho} \cdot \sqrt{p}}{k \cdot S_2 \sqrt{2}}$$



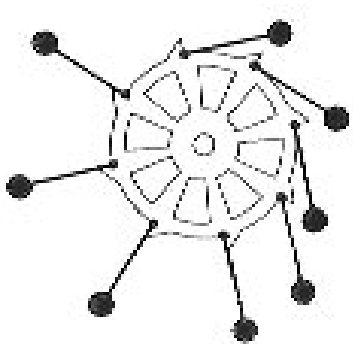
# Modelování tepelných systémů

## Základní zákony

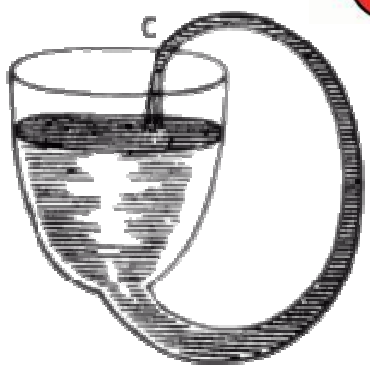
- 1. věta termodynamická

  Celkové množství energie izolované soustavy zůstává zachováno.

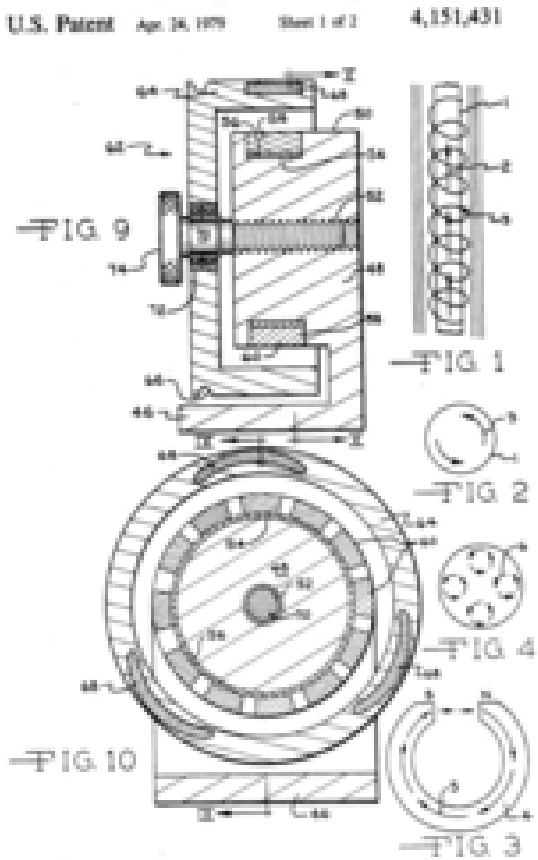
  - perpetuum mobile 1.druhu



Bhaskara II. - 1150



R. Boyle - 1660



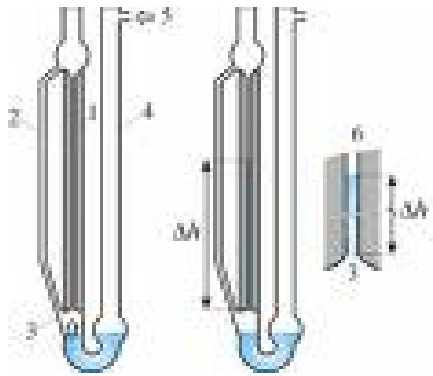

Howard R. Johnson - 1979, U.S. Patent 4,151,431

# 2. věta termodynamická

Teplo nemůže při styku dvou těles samovolně přecházet z tělesa chladnějšího na těleso teplejší.

- perpetuum mobile 2.druhu

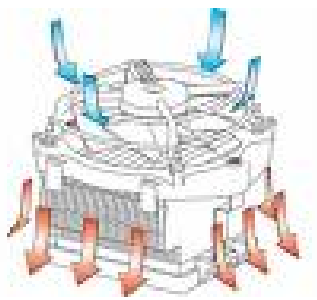
- stroj, který přeměňuje teplo beze ztrát na jiný typ energie



# Způsoby sdílení tepla

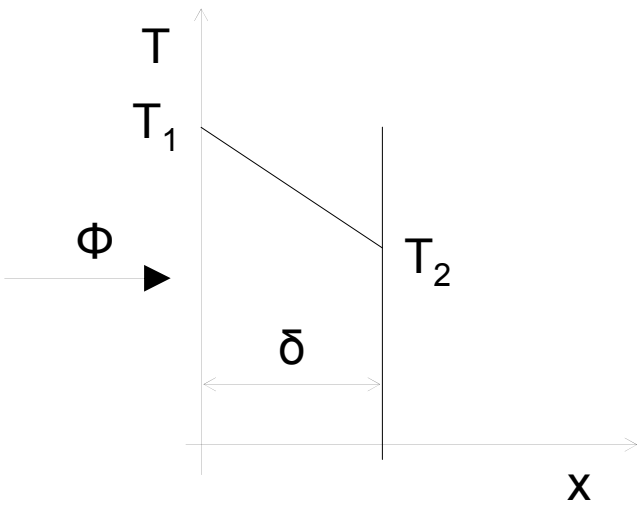
- vedením
  – v pevných látkách, mezi dotýkajícími se tělesy
- prouděním
  – v pohybujících se kapalinách nebo plynech, při mísení
- sáláním
  – elektromagnetické vlnění, i ve vakuu

pasivní chladič



aktivní chladič

# Vedení tepla stěnou




$$\Phi = \frac{\lambda}{\delta} \cdot S \cdot (T_1 - T_2)$$

Φ [W] – tepelný tok

λ [W/mK]– měrná tepelná vodivost

δ [m]– tloušťka stěny

S [m$^2$]– plocha stěny

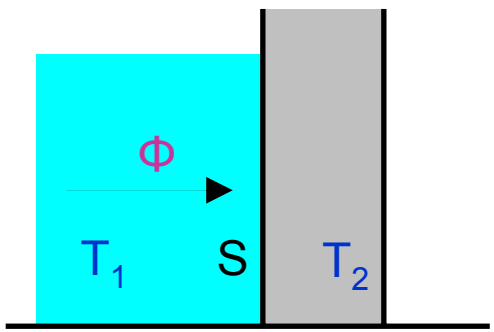
$T_1$,$T_2$ [K] – teplota před a za stěnou

$$\Phi = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Q [J] – teplo

# Proudění mezi stěnou a tekutinou

$$\Phi = \alpha \cdot S \cdot \left(T_1 - T_2\right)$$




Φ [W] – tepelný tok

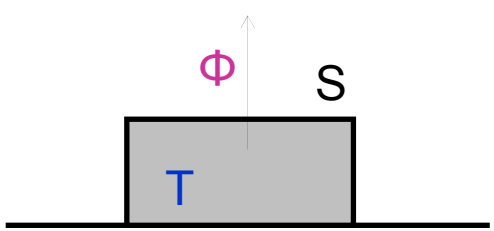
α [W/m²K] – měrná tepelná vodivost

S [m²] – plocha stěny

$T_1$,$T_2$ [K] – teplota před a za stěnou

## Sálání

$$\Phi = \sigma \cdot S \cdot T^4$$




Φ [W] – vyzářený tepelný tok

σ [W/m²K⁴] – Boltzmanova konstanta sálání (pro černé těleso 5.67)

S [m²] – plocha tělesa

T [K] – teplota tělesa

# Tepelná energie proudu kapaliny

$$\Phi = \rho \cdot c_p \cdot Q_v \cdot T$$

$\Phi$ [W] – tepelný tok

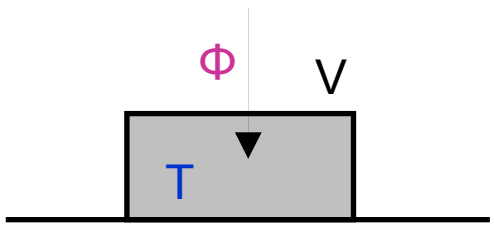
$\rho$ [kg/m$^3$] – hustota kapaliny

$c_p$ [J/kgK] – měrné teplo kapaliny

$Q_v$ [m$^3$/s] – objemový průtok kapaliny

$T$ [K] – teplota kapaliny

# Akumulace tepla




$$\Phi = \rho \cdot c_p \cdot V \cdot \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

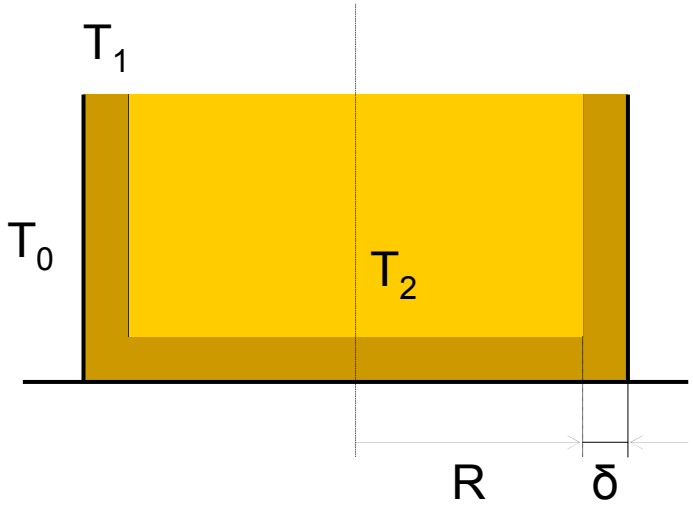
$\Phi$ [W] – tepelný tok

$V$ [m$^3$] – objem tělesa

$\Delta T$ [K] – přírůstek teploty

$\Delta t$ [s] – časový interval

# Chlazení piva v ledničce




vedení tepla stěnou

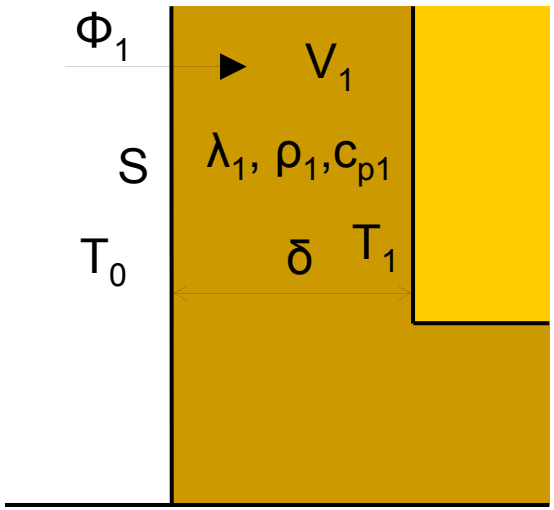
$$\Phi = \frac{\lambda}{\delta} \cdot S \cdot \left(T_0 - T_1\right)$$

akumulace tepla ve stěně

$$\Phi = \rho \cdot c_p \cdot V \cdot \frac{\Delta T_1}{\Delta t}$$

$$\frac{\lambda}{\delta} \cdot S \cdot \left(T_0 - T_1\right) = \rho \cdot c_p \cdot V \cdot \frac{\Delta T_1}{\Delta t}$$

# vedení tepla mezi ledničkou a lahví




$$\rho_1 \cdot c_{p1} \cdot V_1 \cdot \frac{\Delta T_1}{\Delta t} = \frac{\lambda_1}{\delta} \cdot S \cdot \left(T_0 - T_1\right)$$

$$C_{t1} \cdot \frac{T_1(t) - T_1(t-T)}{T} = \frac{1}{R_{t1}} \cdot \left(T_0(t-T) - T_1(t-T)\right)$$

$$C_{t1} = \rho_1 \cdot c_{p1} \cdot V_1 = m_1 \cdot c_{p1}$$

$$R_{t1} = \frac{\delta}{\lambda_1 \cdot S}$$

$C_{t1}$ [J/K] – tepelná kapacita lahve

$R_{t1}$ [K/W] – tepelný odpor lahve

$\rho_1$ [kg/m$^3$] – hustota skla

$c_{p1}$ [J/kgK] – měrné teplo skla

$V_1$ [m$^3$/s] – objem skla

$\lambda_1$ [W/mK] – měrná tepelná vodivost skla

$\delta$ [m] – tloušťka lahve

S [m$^2$] – plocha lahve

$T_0$ [K] – teplota v ledničce

$T_1$ [K] – teplota skla na vnitřní straně

$m_1$ = 380g = 0.38 kg; $c_{p1}$ = 600 J/kgK; $\lambda_1$ = 0.96 W/mK; $\delta$ = 3 mm = 0.003 m

R = 34 mm = 0.034 m – poloměr lahve

h = 26 cm = 0.26 m – výška lahve

$S_v = \pi R^2 + 2\pi R h = 0.059\ m^2 \rightarrow S = 0.05\ m^2$

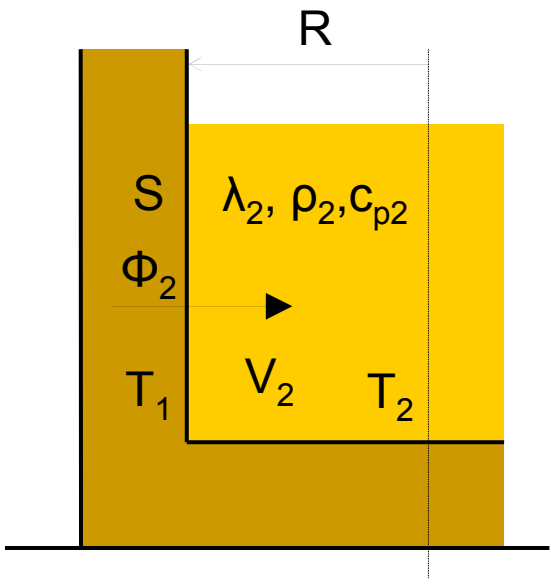
$$C_{t1} \cdot \frac{T_1(t) - T_1(t-T)}{T} = \frac{1}{R_{t1}} \cdot \left(T_0(t-T) - T_1(t-T)\right)$$

$$R_{t1}C_{t1} \cdot T_1(t) + \left(T - R_{t1}C_{t1}\right) \cdot T_1(t-T) = T \cdot T_0(t-T)$$

$$T_1(t) - \frac{R_{t1}C_{t1} - T}{R_{t1}C_{t1}} \cdot T_1(t-T) = \frac{T}{R_{t1}C_{t1}} \cdot T_0(t-T)$$

$$T_1(0) = T_{10}$$

# vedení tepla mezi lahví a pivem




$$\rho_2 \cdot c_{p2} \cdot V_2 \cdot \frac{\Delta T_2}{\Delta t} = \frac{\lambda_2}{R} \cdot S \cdot (T_1 - T_2)$$

$$C_{t2} \cdot \frac{T_2(t) - T_2(t-T)}{T} = \frac{1}{R_{t2}} \cdot \left(T_1(t-T) - T_2(t-T)\right)$$

$$C_{t2} = \rho_2 \cdot c_{p2} \cdot V_2 = m_2 \cdot c_{p2}$$

$$R_{t2} = \frac{R}{\lambda_2 \cdot S}$$

$C_{t2}$ [J/K] – tepelná kapacita piva

$R_{t2}$ [K/W] – tepelný odpor piva

$\rho_2$ [kg/m$^3$] – hustota piva

$c_{p2}$ [J/kgK] – měrné teplo piva

$V_2$ [m$^3$/s] – objem piva

$\lambda_2$ [W/mK] – měrná tepelná vodivost piva

R [m] – poloměr lahve

S [m$^2$] – plocha lahve

$T_1$ [K] – teplota skla na vnitřní straně

$T_2$ [K] – teplota piva v ose lahve

$m_2$ = 0.5 kg; $c_{p2}$ = 4.18·10$^3$ J/kgK; $\lambda_2$ = 0.58 W/mK; R = 34 mm = 0.034 m;

S = 0.05 m$^2$

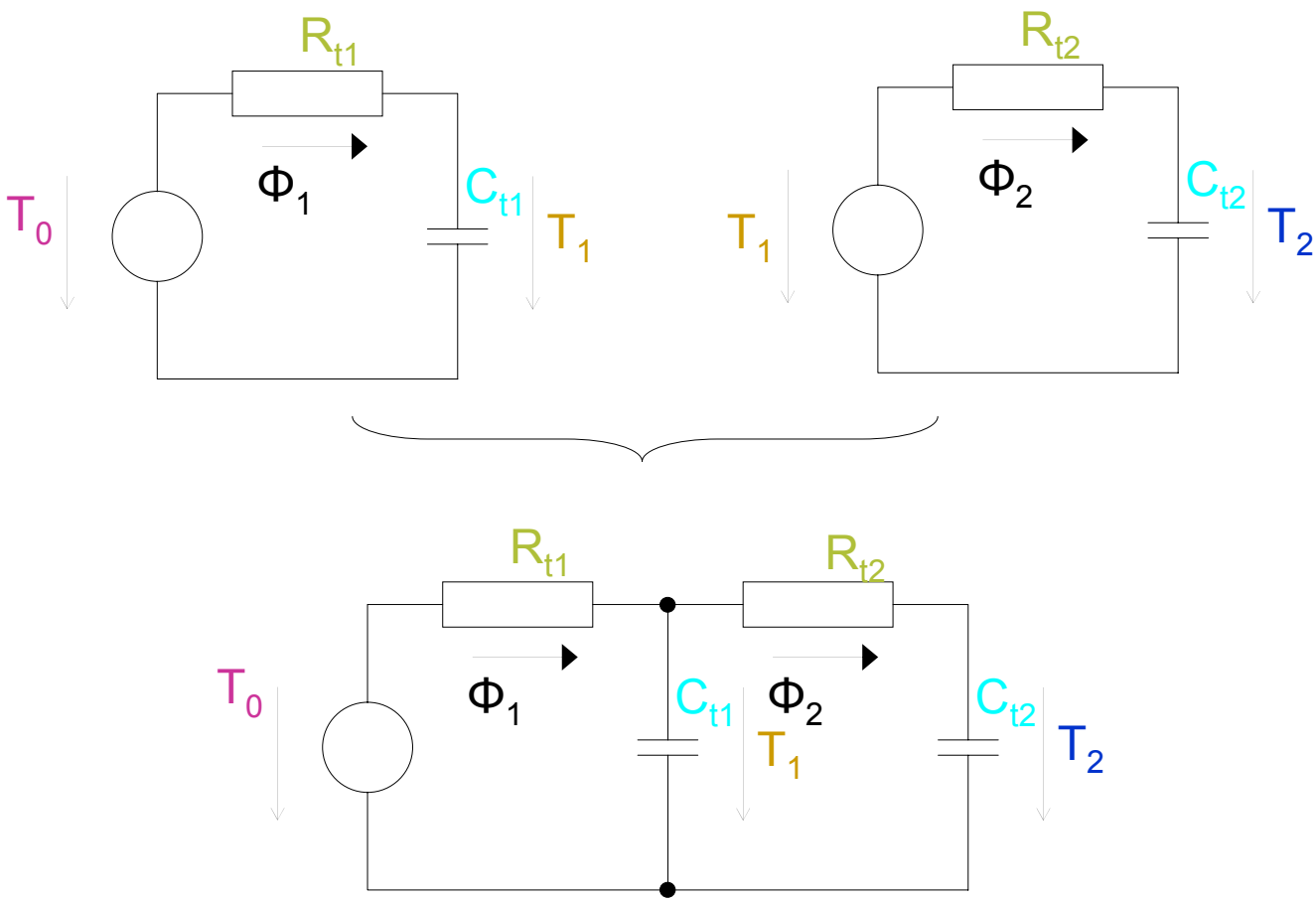
$$T_2(t) - \frac{R_{t2}C_{t2} - T}{R_{t2}C_{t2}} \cdot T_2(t-T) = \frac{T}{R_{t2}C_{t2}} \cdot T_1(t-T)$$

$$T_2(0) = T_{20}$$

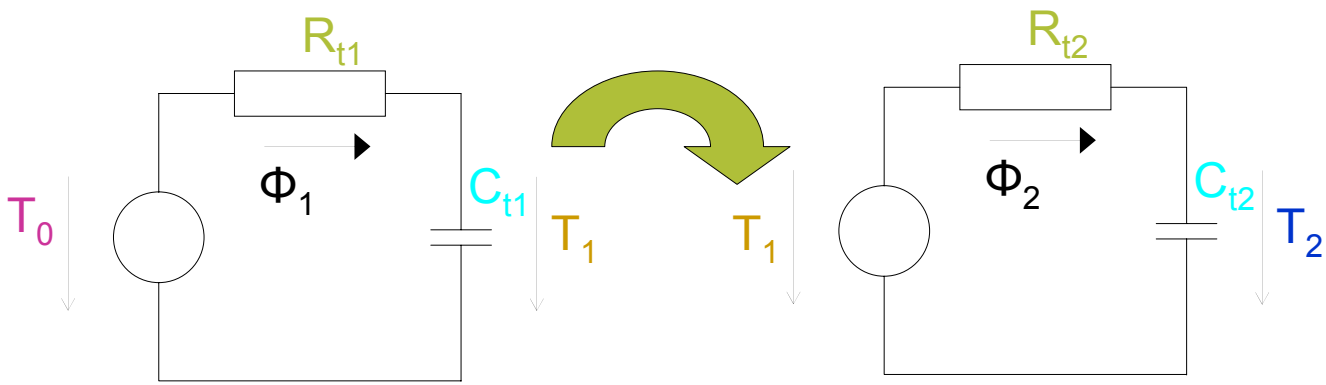
$C_{t1}$ = 228 J/K; $R_{t1}$ = 0.00625 K/W;

$C_{t2}$ = 2090 J/K; $R_{t2}$ = 1.17 K/W;

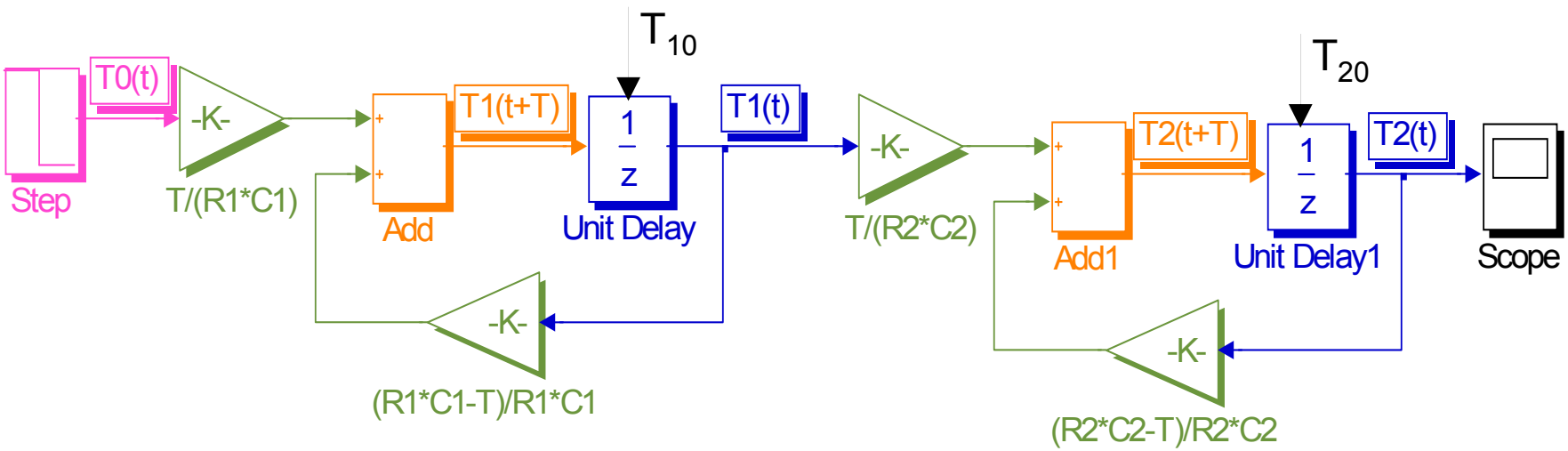
# analogický elektrický systém



za předpokladu $R_{t1} \cdot C_{t1} << R_{t2} \cdot C_{t2} \leftrightarrow R_{t1} \cdot C_{t1} = 14.25 << 2450 = R_{t2} \cdot C_{t2}$

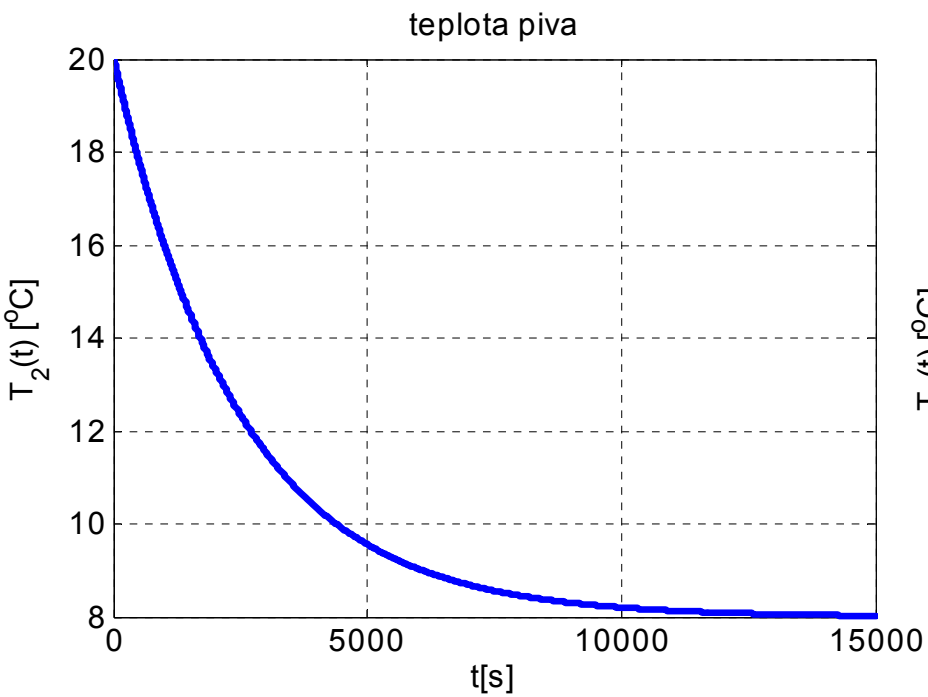


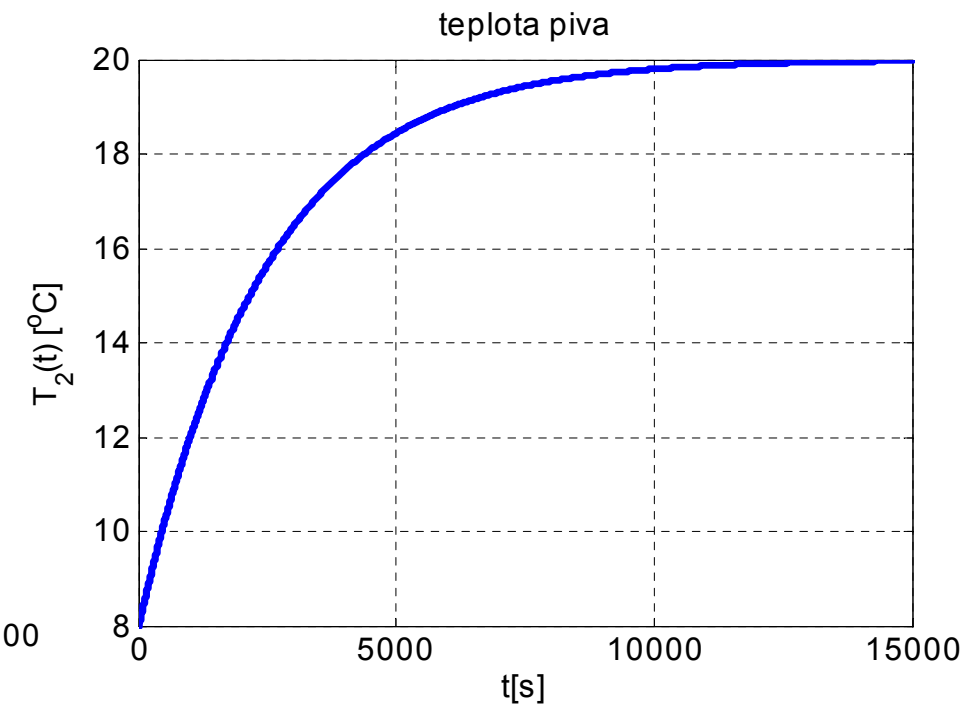

simulační schema



$T_0(t) = 8°C \cdot 1(t), T_1(0) = 20°C,$ $T_0(t) = 20°C \cdot 1(t), T_1(0) = 8°C,$

$T_2(0) = 20°C$ $T_2(0) = 8°C$




doba ustálení 1%:

$$t_{s1} = \frac{\log 0.01}{\log \frac{R_{t1}C_{t1} - T}{R_{t1}C_{t1}}} = 63\text{s} \qquad t_{s2} = \frac{\log 0.01}{\log \frac{R_{t2}C_{t2} - T}{R_{t2}C_{t2}}} = 11282\text{s} \approx 3\text{h}8\text{min}$$

# Kontrolní otázky

- Jaké základní zákony využíváme při modelování hydraulických systémů?
- Diskutujte vliv velikosti otevření ventilu k na dynamiku systému nádrže s přítokem.
- Má velikost průřezu nádrže $S_1$ vliv na rovnovážný stav systému?
- Víte, o kolik vystoupá hladina vody v kapiláře o poloměru 0.1mm?
- Jaké jsou způsoby sdílení tepla?
- Jaký elektrický systém je analogický k přestupu tepla stěnou a jeho akumulace v ní?
- Na čem závisí tepelná kapacita tělesa?
- Skládá-li se systém ze seriové kombinace více podsystémů s různě rychlou časovou odezvou, který z nich je určující pro chování celého systému?
- Zdůvodněte, proč je k výrobě pasivních chladičů vhodnější měď a k výrobě aktivních chladičů hliník.
- Pokuste se namodelovat systém chlazení piva v ledničce, pokud bude uloženo v plastovém obalu, případně v plechovce. Porovnejte dynamiku systémů.

- Myslíte si, že pijící pták je perpetuum mobile? Zdůvodněte.