Stabilita
nelineárních systémů

Stabilita dynamických systémů

- Dlouhá historie
- Mnoho matematiků, fyziků …
- Inspirováno studiem stability *n* těles (stabilita sluneční soustavy)
- Torricelli – nejmenší celková energie
- Laplace, Lagrange – konzervativní a disipativní (energie klesá podél trajektorie) systémy

Stabilita rovnovážného stavu

- Stabilita je vlastnost rovnovážného stavu (ekvilibrum, pracovní bod)

$$\dot{x} = f(x,u)$$

$$\dot{x}^r = 0 \Rightarrow f(x^r) = 0$$

Rovnovážný stav

- Rovnovážný stav = „systém je v klidu“

- Stabilita je invariantní vůči stavové ekvivalenci!!!

Stabilita rovnovážného stavu

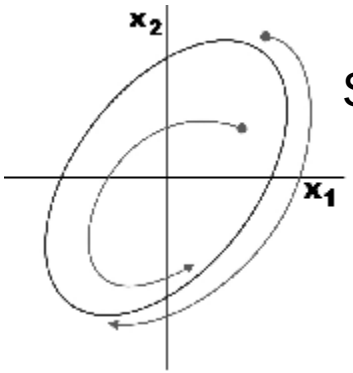
- Stabilita LS je dána strukturou systému a nezávisí na okamžitém stavu

- U NS to tak není
  - rovnovážné stavy
  - mezní (limitní) cykly

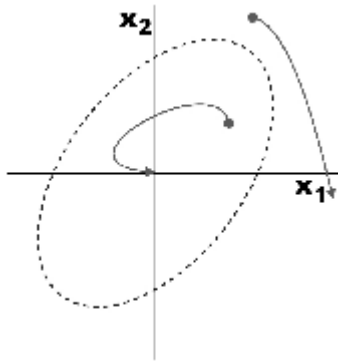
  - závislost stability na počátečních podmínkách,
  - existence mezních (limitních) cyklů,
  - existence více rovnovážných stavů

Mezní (limitní) cykly

Limitní cykly – ukázka pro systémy 2. řádu

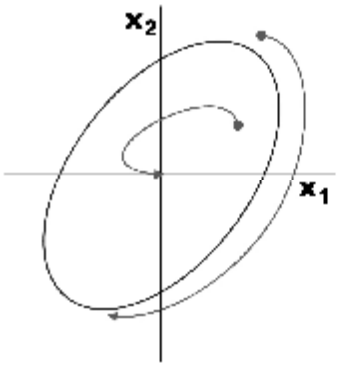


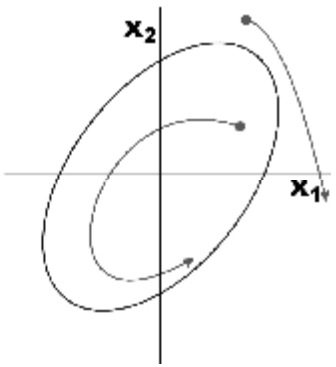
Stabilní mezní cyklus



Nestabilní mezní cyklus

Polostabilní mezní cyklus



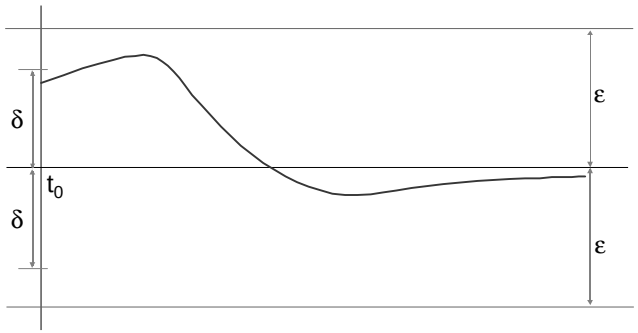


Stabilita ve smyslu Ljapunova

Definice (Stabilita ve smyslu Ljapunova)

Rovnovážný stav x^r je stabilní ve smyslu Ljapunova, jestliže pro $\forall e > 0$ *a čas t_0 existuje takové* $\exists d(e) > 0$, *že:*

$$\left\| x(t_0) - x^r \right\| \le d \;\Rightarrow\; \left\| x(t) - x^r \right\| \le e$$



Definice (Asymptotická stabilita)

Rovnovážný stav x^r je asymptoticky stabilní, jestliže

- *je stabilní a*
- *platí, že* $\lim_{t \to \infty} x = x^r$

Stejnoměrná stabilita

- Rovnovážný stav $x = 0$ je stejnoměrně stabilní jestliže v předchozí definici $d(e)$ nezávisí na t_0 .

- Rovnovážný stav $x = 0$ je stejnoměrně asymptoticky stabilní jestliže
  - je Lyapunovsky stabilní a
  - trajektorie konvergují k 0 stejnoměrně, tj. existuje $d > 0$ a funkce taková, že

$$\forall x_0 : \lim_{t \to \infty} \left| x(t) - x^r \right| = 0$$

Stabilita na oblasti Ω

- Je-li rovnovážný stav asymptoticky stabilní pro $x_0 \in \Omega$, je asymptoticky stabilní na oblasti Ω.

Globální stabilita

- Je-li rovnovážný stav asymptoticky stabilní pro všechny počáteční podmínky $x_0 \in R^n$, je globálně asymptoticky stabilní.
- NS může být globálně stabilní pouze tehdy, má-li jen jeden rovnovážný stav

- Předchozí definice lze použít i pro vyšetření stability mezního cyklu (viz pozdější přednáška), ale je příliš tvrdá => orbitální stabilita

- Otázka je, jak určit zda mezní cyklus existuje (Bendinxonovo kritérium)

Stabilita lineárních systémů

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

- globálně asymptoticky stabilní

$$\forall\, l_i : \mathrm{Re}\, l_i < 0$$

Rovnovážný stav je pouze jeden a je nulový!

- Lyapunovovsky stabilní

$$\forall\, l_i : \mathrm{Re}\, l_i \leq 0$$

Stabilita lineárních systémů - 2

Lineární systém v modálním tvaru

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & & 0 \\ & \mathbf{O} & \\ 0 & & l_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix}$$

Řešení lineárního systému

$$x_i(t) = e^{l_i t} x_{i0}, \; i = 1, \mathbf{K} n$$

=> podmínka na stabilitu $\forall l_i : \mathrm{Re}\, l_i < 0$

Stabilita lineárních systémů - 3

Řešení lineárního systému

$$x_i(t) = e^{l_i t} x_{i0}, i = 1, \mathbf{K} n$$

$\Rightarrow$ podmínka na stabilitu = podmínka konvergence x(t)

$\Rightarrow$ podmínka konvergence x(t) nezávisí na počáteční podmínce

Vyšetření stability LS

- Existuje mnoho metod na vyšetření stability LS
  - Rozložení vlastních čísel
  - Algebraické metody (Hurwitz, Routh, Routh-Shurovo, …)
  - Frekvenční metody (Nyquist, Michailov, …)
  - …

Vyšetření stability NS

- Moc možností nemáme
  - První (nepřímá) Ljapunovova metoda – rychlá, malá platnost
  - Druhá (přímá) Ljapunovova metoda – problém generování funkcí (Ljapunovových) – existuje spoustu metod
  - Metoda Centrální variety
  - Speciální případy – stabilita vstup-výstup
  - Absolutní stabilita
  - A to je skoro vše