Vyšetřování stability - metody

Aproximativní linearizace nelineárních systémů

$$\dot{x} = F\left(x, u\right)$$

$F : X \times U \to X$, třídy $C^k \left(k \geq 2\right)$

rovnovážný stav: $\left(x^r, u^r\right) : F\left(x^r, u^r\right) = 0$

Poznámka:

- Je-li $\dot{x} = f\left(x\right) + g\left(x\right)u$, potom $u^r = 0;\ \ x^r : f\left(x^r\right) = 0.$

Taylorův rozvoj

$$T_{n,a} f(x) = f(a) + \frac{(x-a) f'(a)}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{k!}$$

$$F(x,u) = F(x^r, u^r) + \left.\frac{\partial F(x,u)}{\partial x}\right|_{(x,u)=(x^r,u^r)} \cdot (x - x^r) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} \left.\frac{\partial^{(k)} F(x,u)}{\partial x^{(k)}}\right|_{(x,u)=(x^r,u^r)} \cdot \frac{(x - x^r)^k}{k!} +$$

$$+ \left.\frac{\partial F(x,u)}{\partial u}\right|_{(x,u)=(x^r,u^r)} \cdot (u - u^r) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} \left.\frac{\partial^{(k)} F(x,u)}{\partial u^{(k)}}\right|_{(x,u)=(x^r,u^r)} \cdot \frac{(u - u^r)^k}{k!}$$

- zanedbání vyšších členů Taylorova rozvoje a $F\left(x^r, u^r\right) = 0$
- pro každý rovnovážný stav x^r, u^r

- **Aproximativně linearizovaný model nelineárního systému v malém okolí rovnovážného stavu** $\left(x^r, u^r\right)$**:**

$$\Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u$$

$$\Delta x = x - x^r$$

$$\Delta u = u - u^r$$

$$A = \left.\frac{\partial F(x,u)}{\partial x}\right|_{(x,u)=\left(x^r,u^r\right)}$$

$$B = \left.\frac{\partial F(x,u)}{\partial u}\right|_{(x,u)=\left(x^r,u^r\right)}$$

Nelineární systém kauzálně-separabilní

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

- rovnovážný stav: $u^r = 0;\ \ x^r : f(x^r) = 0$

- linearizovaný model nelineárního systému v malém okolí rovnovážného stavu

$$\Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u$$

$$\Delta x = x - x^r$$

$$\Delta u = u - u^r$$

$$A = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x = x^r},\ \ B = \left. g(x)\right|_{x = x^r}$$

Výstupní rovnice:

$$y = H\left(x,u\right)$$

$$\Delta y = C\,\Delta x + D\,\Delta u$$

$$\Delta x = x - x^r$$

$$\Delta u = u - u^r$$

$$C = \left.\frac{\partial H\left(x,u\right)}{\partial x}\right|_{\left(x,u\right)=\left(x^r,u^r\right)}$$

$$D = \left.\frac{\partial H\left(x,u\right)}{\partial u}\right|_{\left(x,u\right)=\left(x^r,u^r\right)}$$

Event. výstupní rovnice:

$$y = h(x)$$

$$\Delta y = C\,\Delta x$$

$$\Delta x = x - x^r$$

$$C = \left.\frac{\partial h(x)}{\partial x}\right|_{x = x^r}$$

Ljapunovova první (nepřímá) metoda

Nelineární systém

$$\dot{x} = f\left(x\right)$$

(pro vyšetřování stability vstup $u \equiv 0$)

rovnovážný stav $x^r : f\left(x^r\right) = 0$

Ljapunovova první (nepřímá) metoda – 2

Aproximativní linearizace v „malém“ okolí rovnovážného stavu

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x$$

$$\Delta x = x - x^r$$

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x = x^r}$$

Množina vlastních čísel $s(A)$ matice A:

$$s(A) = \{\det(l I - A) = 0\}$$

Ljapunovova první (nepřímá) metoda - 3

Věta:

Uvažujme nelineární systém $\dot{x} = f(x)$ a jeho linearizovaný model platný v okolí rovnovážného stavu x^r popsaný maticí $A = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x = x^r}$.

Mají-li všechna vlastní čísla $l_i \in s(A)$ ($i = 1, \mathbf{K}\, n$) zápornou reálnou část, potom je rovnovážný stav x^r asymptoticky stabilní. Má-li alespoň jedno vlastní číslo $l_i \in s(A)$ kladnou reálnou část, potom rovnovážný stav je nestabilní.

Ljapunovova první (nepřímá) metoda - 4

Poznámka:

- pokud $\mathrm{Re}\{l_i\} \leq 0, \;\; i = 1, \mathbf{K}\, n$

  potom **nelze o stabilitě touto metodou rozhodnout**.

  O dynamice nelineárního systému rozhodují **zanedbané** členy Taylorova rozvoje.

Příklad:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = bx_1 - cx_1^3 - ax_2$$

$$a, b, c > 0$$

rovnovážné stavy:

$$x^r = [0;0] \qquad x^r = \left[+\sqrt{\frac{b}{c}};0\right] \qquad x^r = \left[-\sqrt{\frac{b}{c}};0\right]$$

Taylorův rozvoj

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} x_2 \\ bx_1 - cx_1^3 - ax_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b - 3cx_1^2 & -a \end{bmatrix}$$

První rovnovážný stav $x^r = [0;0]$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b - 3cx_1^2 & -a \end{bmatrix}\Bigg|_{x = x^r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & -a \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & -a \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

charakteristická rovnice: $l^2 + a\,l - b = 0$

$$\Downarrow$$

rovnovážný typ x^r je nestabilní (typu sedlo)

Rovnovážný stav $x^r = \left[\sqrt{\frac{b}{c}}; 0 \right]$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b - 3cx_1^2 & -a \end{bmatrix} \Bigg|_{x = x^r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2b & -a \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

charakteristická rovnice: $l^2 + a\,l + 2b = 0$

$$\Downarrow$$

rovnovážný typ x^r je stabilní (typu ohnisko nebo uzel)

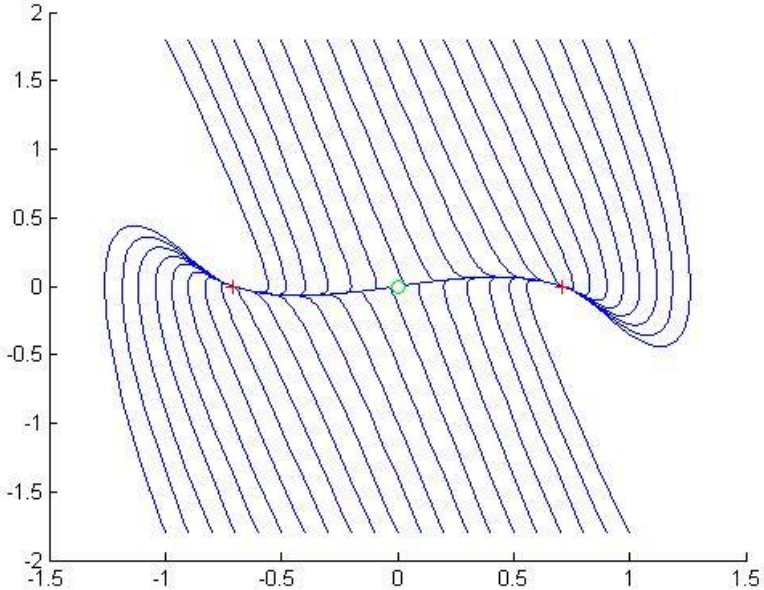
Rovnovážný stav $x^r = \left[-\sqrt{\frac{b}{c}}; 0 \right]$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b - 3cx_1^2 & -a \end{bmatrix} \Bigg|_{x = x^r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2b & -a \end{bmatrix}$$

- stejné jako v předchozím případě

Simulace:

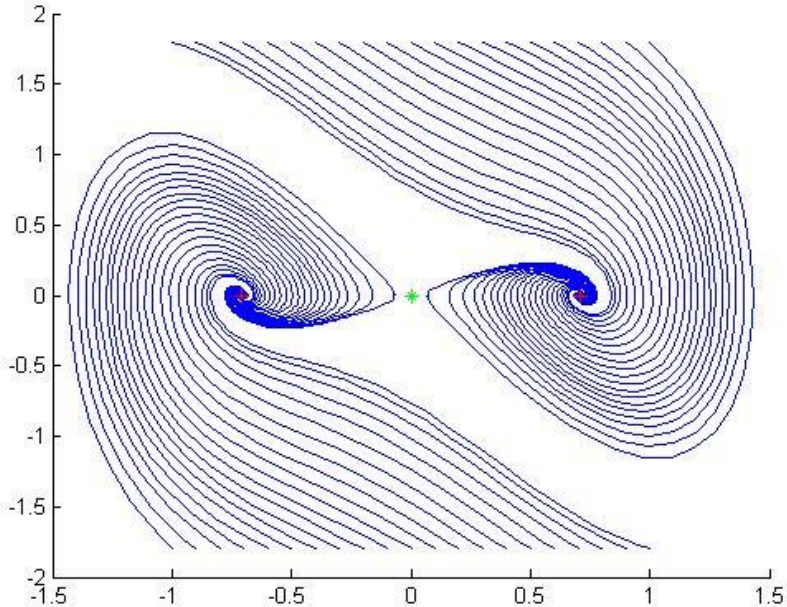
$a = 4, b = 1, c = 2$



sedlo $[0;0]$

uzel $\left[-2^{-\frac{1}{2}};0\right], \left[+2^{-\frac{1}{2}};0\right]$

$a = 1, b = 1, c = 2$



sedlo $[0;0]$

ohnisko $\left[-2^{-\frac{1}{2}};0\right], \left[+2^{-\frac{1}{2}};0\right]$

Vznik bifurkací (kvalitativní změna):

Pro $b = 0$:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -cx_1^3 - ax_2$$

$a, c > 0$

Pouze jeden rovnovážný stav!!!

$$x^r = [0;0]$$

Taylorův rozvoj

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} x_2 \\ -cx_1^3 - ax_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3cx_1^2 & -a \end{bmatrix}$$

rovnovážný stav $x^r = [0;0]$

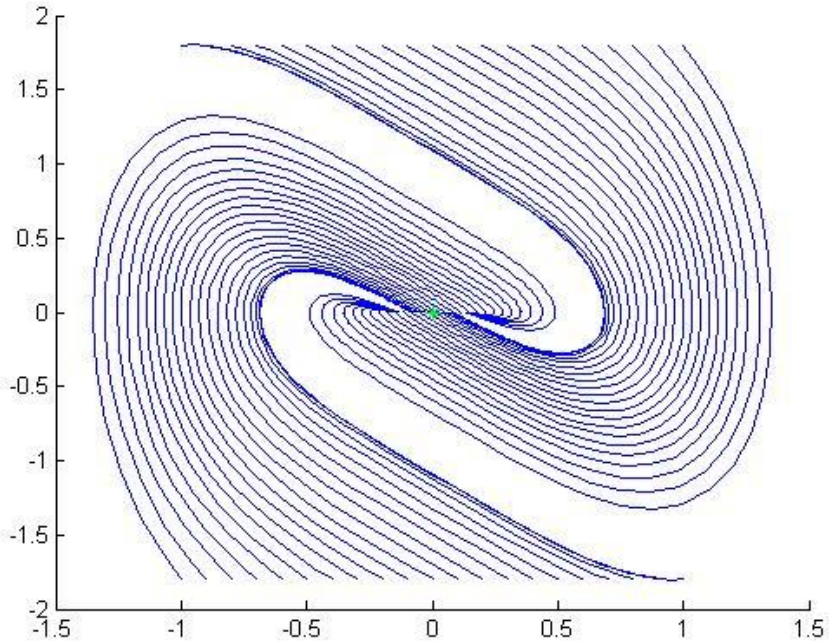
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3cx_1^2 & -a \end{bmatrix}\Bigg|_{x = x^r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$$

Charakteristická rovnice: $l^2 + a\,l = 0 \Rightarrow l = 0,\ l = -a$

O stabilitě rovnovážného stavu x^r nelze touto metodou rozhodnout!!!

Simulace:

$a = 4,\ c = 2$



Ze simulace je zřejmé, že rovnovážný stav je v oblasti definované $-1 \le x_1 \le 1$, $-1{,}8 \le x_2 \le 1{,}8$ stabilní.

Jinde ??????????????????

Parametr $b < 0$

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -|b|\, x_1 - c x_1^3 - a x_2$$

$a, c > 0,\ b < 0$

jeden rovnovážný stav!!! $x^r = [0;0]$

Taylorův rozvoj

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} x_2 \\ -|b| - cx_1^3 - ax_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -|b| - 3cx_1^2 & -a \end{bmatrix}$$

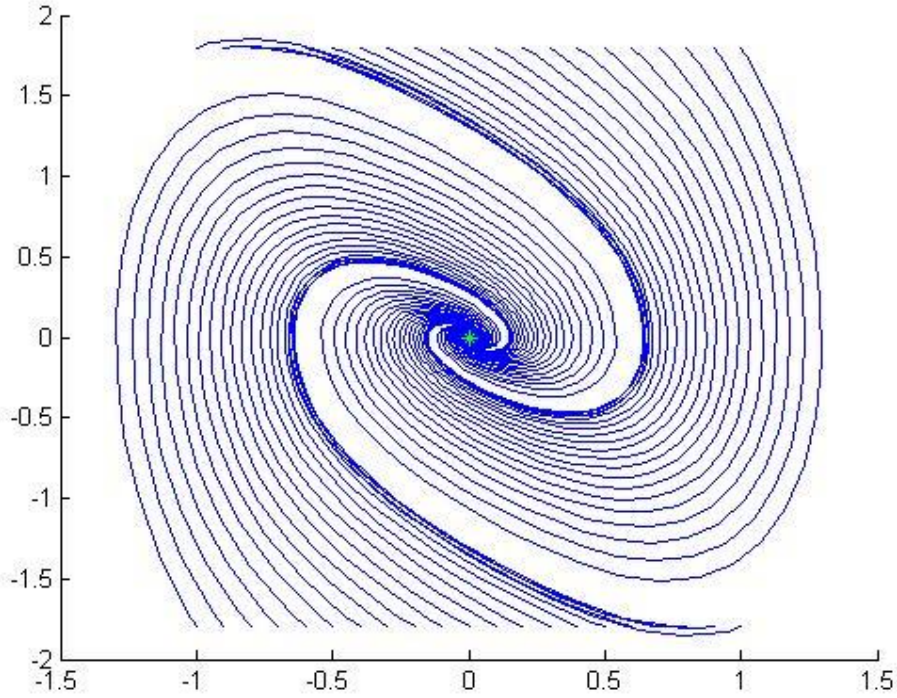
rovnovážný stav $x^r = [0;0]$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -|b| - 3cx_1^2 & -a \end{bmatrix}\Bigg|_{x = x^r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -|b| & -a \end{bmatrix}$$

Charakteristická rovnice: $l^2 + a\,l + |b| = 0 \Rightarrow$ stabilní (uzel, ohnisko)

Simulace:

$a = 1, b = -1, c = 2$



Druhá (přímá) Ljapunovova metoda

- metoda pro posouzení v malém i velkém okolí
- není potřeba řešit diferenciální rovnice
- jedná se o matematicky zobecněný fyzikální princip – celková energie izolovaného disipativního systému se při pohybu po trajektorii zmenšuje, minima dosáhne v rovnovážném stavu

Nelineární systém

$$\dot{x} = f(x), \; x^r = 0$$

Definice (Ljapunovova funkce)

Funkci $V(x): R^n \to R$ nazveme Ljapunovovou funkcí, splňuje-li podmínky:

- Funkce $V(x)$ je spojitá a spojitá je i její derivace $\dfrac{\partial V(x)}{\partial x}$
- $V(x) = L_f^0 V > 0$
- $\dot{V}(x) = \left.\dfrac{dV(x)}{dt}\right|_{\Re(S)} = \dfrac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = grad_x V(x) \cdot f(x) < 0$

Derivace podél trajektorie

Věta

Nulový rovnovážný stav x^r je asymptoticky stabilní, pokud existuje diferencovatelná Ljapunovova funkce $V(x): R^n \to R$ vyhovující podmínkám:

- $V(x) = L_f^0 V > 0$ pro $x \neq 0$
- $V(x) = L_f^0 V = 0$ pro $x = 0$
- $\dot{V}(x) = L_f^1 V < 0$ pro $x \neq 0$
- $\dot{V}(x) = L_f^1 V = 0$ pro $x = 0$

Věta:

Je-li $V(x)$ pozitivně definitní a $\dot{V}(x)$ negativně definitní v celém stavovém prostoru a $V(x) \to \infty$ pro $\|x\| \to \infty$, je nulový rovnovážný stav globálně stabilní.

Poznámka:

- Existence více rovnovážných stavů a-priori vylučuje možnost globální stability!

Poznámky:

- Je-li $\dot{V}(x) = L_f^1 V \leq 0$ (semidefinitní) jedná se o stabilitu.
- Druhá Ljapunovova metoda dává pouze **postačující** podmínky => to že zvolená funkce nesplňuje podmínky znamená pouze špatnou volbu Ljapunovovy funkce (**nikoli nestabilitu** rovnovážného stavu)
- Pro systém může existovat mnoho Ljapunovových funkcí. Je-li $V(x)$ Ljapunovova funkce, pak i např. rV^b je Ljapunovova funkce stejného systému
- Pokud $\dot{V}(x) > 0$ nelze říci, že nulový rovnovážný stav je nestabilní! Je-li oblast stability Ω, pak nemůžeme tvrdit, že oblast nestability je $\bar{\Omega} = R - \Omega$, protože nelze s určitostí zaručit, že při jiné Ljapunovově funkci nebude oblast Ω větší.

Věta (První Ljapunovova věta o nestabilitě)

Nulový rovnovážný stav je nestabilní, existuje-li na oblasti Ω kolem počátku spojitě diferencovatelná klesající skalární funkce $V(x)$ taková, že platí:

- $V(0) = 0$
- $V(x) > 0$ nabývá kladných hodnot libovolně kolem počátku
- $\dot{V}(x)$ je pozitivně definitní v Ω

Věta (Četajevova věta o nestabilitě)

Nulový rovnovážný stav je nestabilní, existuje-li na oblasti Ω kolem počátku spojitě diferencovatelná skalární funkce $V(x)$ a existuje-li oblast $\Omega_1 \subseteq \Omega$ a platí:

- $V(x)$ a $\dot{V}(x)$ jsou pozitivně definitní v Ω_1
- počátek je hraničním bodem Ω_1
- v hraničních bodech oblasti Ω_1 je $V(x) = 0$

Generování Ljapunovovy funkce pro LS

$$\dot{x} = Ax$$

Ljapunovova funkce $V(x) = x^T P x,\ P = P^T > 0$

potom derivace Ljapunovovy funkce

$$\dot{V}(x) = x^T \left(A^T P + PA\right) x \overset{def}{=} -x^T Q x$$

$$A^T P + PA = -Q$$

Ljapunovova rovnice

Lemma

Je-li možné nalézt Ljapunovovu funkci ve tvaru kvadratické formy $V\left(x\right) = x^T P x$, kde P je symetrická, pozitivně definitní matice taková, že vyhovuje Ljapunovově rovnici a matice Q je pozitivně definitní, pak lineární systém je **globálně asymptoticky stabilní**.

Ljapunovova rovnice

$$A^T P + PA = -Q$$

Možnosti řešení Ljapunovovy rovnice

Volba P

- $Q > 0 \Rightarrow$ as. stabilní
- $Q \leq 0 \Rightarrow$ nevíme, je potřeba zvolit jinou matici P

Volba Q

- $P > 0 \Rightarrow$ as. stabilní
- alespoň jedno vlastní číslo matice P nemá zápornou reálnou část => nestabilní
- řešení neexistuje nebo není jednoznačné => není as. stabilní

Zajímavý příklad

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

volba: $V(x) = x_1^2 + x_2^2$

derivace: $\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -4x_2^2$

=> podle věty je pouze stabilní (ve smyslu Ljapunova), ne asymptoticky stabilní!!!

Generování Ljapunovovy funkce na základě fyzikální analogie

$$\dot{x} = Ax$$

$$y = Cx$$

řešení

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 \;\; => \;\; y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0$$

$$E(x) = \int_{t_0}^{\infty} y^T(t)\,y(t)\,dt = \int_{t_0}^{\infty} x^T(t)\,C^T C x(t)\,dt =$$

$$= x_0^T \underbrace{\int_0^t e^{A^T t} C^T C e^{At}}_{W_0} x_0$$

Porovnáním $E(x)$ s Ljapunovovou funkcí $V(x) = x^T P x$

$$\left.\begin{aligned} V(x) &= x^T P x \\ E(x) &= x_0^T W_0 x_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow W_0 = P \Bigg|_{Q \overset{def}{=} -C^T C}$$

Motivační příklad (kyvadlo bez tření)

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin\left(x_1\right)$$

rovnice fázové roviny:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-\frac{g}{l}\sin\left(x_1\right)}{x_2} \Rightarrow \underbrace{\frac{x_2^2}{2}}_{E_k} + \underbrace{\frac{g}{l}\left(1-\cos\left(x_1\right)\right)}_{E_p} = konst$$

$$E_k + E_p = konst$$

Volba $V(x)$ jako $E(x)$, tj.

$$V(x) = \frac{x_2^2}{2} + \frac{g}{l}\left(1 - \cos(x_1)\right) > 0 \text{ pro } x \neq 0$$

$$V(0) = 0$$

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2} 2 x_2 \dot{x}_2 + \frac{g}{l} \sin x_1 \cdot \dot{x}_1 = 0 \text{ pro } x \neq 0$$

$$\dot{V}(0) = 0$$

Nulový rovnovážný stav je stabilní ve smyslu Ljapunova, což je logické pro konzervativní systém!!!

Motivační příklad (kyvadlo s třením)

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin\left(x_1\right) - \frac{k}{m}x_2$$

Zvolíme $V\left(x\right)$ analogicky s předchozím příkladem

$$V\left(x\right) = \frac{x_2^2}{2} + \frac{g}{l}\left(1 - \cos\left(x_1\right)\right) > 0 \text{ pro } x \neq 0$$

$$V\left(0\right) = 0$$

Derivace podél trajektorie systému

$$\dot{V}(x) = -\frac{k}{m} x_2^2 < 0 \text{ pro } \forall x_1, x_2 \neq 0$$

$$\dot{V}(0) = 0$$

Nulový rovnovážný stav je stabilní ve smyslu Ljapunova, což již není úplně logické pro disipativní systém!!! Zvolíme novou funkci $V(x)$, např.

$$V(x) = x^T P x + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) > 0 \text{ pro } x \neq 0$$

Lurjeho metoda generování V(x)

Lurjeho metoda generování Ljapunovovy funkce

Ljapunovova funkce je zvolena jako součet kvadratické formy $x^T Px$ a integrálu nelineární funkce $f(s)$, tj.

$$V(x) = x^T P x + \int f(s)\,ds$$

Řešení je velmi náročné a vede na soustavu n algebraických rovnic, jejich analytické řešení není jednoduché.

Další metody generování $V(x)$

Krasovského metoda, Changova metoda, metoda variabilního gradientu ...

Metoda založená na exaktní linearizaci při stavové ekvivalenci

Formulace

Uvažujme reprezentaci $\Re(S)$

$$\Re(S):\ \dot{x} = f(x)$$

a stavově ekvivalentní reprezentaci $\bar{\Re}(S)$

$$\bar{\Re}(S):\ \dot{\bar{x}} = A\bar{x}$$

Difeomorfní zobrazení $\bar{x} = T(x)$

$$A = \left[\frac{\partial T(x)}{\partial x} f(x)\right]\Bigg|_{x = T^{-1}(\bar{x})}$$

Lemma

Je-li rovnovážný stav ekvivalentní LS reprezentace $\overline{\mathfrak{R}}(S)$ as. stabilní, stabilní, nestabilní, potom i rovnovážný stav NS reprezentace $\mathfrak{R}(S)$ je as. stabilní, stabilní, nestabilní (stabilita je invariantní vůči stavové ekvivalenci).