

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Hálkova 6, 461 17 Liberec 1, CZ

Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií

Teorie automatického řízení II.

NELINEÁRNÍ SYSTÉMY

Studijní materiály

Doc. Ing. Osvald Modrlák, CSc.



Katedra řídicí techniky

Obsah

Úvod	2
1. Popis nelineárních systémů	2
1.1 Nelineární diferenciální rovnice	2
1.2 Charakteristiky typických nelineárních členů	3
2. Analýza ve fázové rovině	6
2.1 Konstrukce fázové trajektorie	7
2.2 Linearizace a stabilita v malém	10
2.3 Trajektorie ve fázové rovině	13
2.4 Reléové obvody a časově optimální řízení	21
2.4.1 Analýza reléových obvodů ve fázové rovině	22
2.4.2 Časově optimální reléové obvody	26
2.5 Softwarová podpora v MATLABu	27
3. Stabilita nelineárních systémů	31
3.1 Základní definice stability volného systému	31
3.2 Přímá Ljapunovova metoda	32
3.3 Popovovo kritérium stability	35
Literatura	38

Předkládaný text pokrývá problematiku nelineárních systémů tak jak se probírá v základním kurzu Teorie automatického řízení II. Poskytuje jen omezený přehled základů nelineárních systémů a regulace a svým rozsahem odpovídá pouze rozsahu přednášek.

ÚVOD

Již v rámci našeho kurzu při identifikačních měření jsme se setkali se skutečností, že převážná většina laboratorních úloh nespĺňuje v celém rozsahu přísné podmínky kladené na lineární systémy. Tato skutečnost byla již zjištěna při měření statických charakteristik, které jsou zpravidla lineární pouze v určitém rozsahu akční veličiny. Stejný závěr je možno učinit při praktických měřeních v provozech a na technologických zařízeních. Je možno konstatovat, že všechny technicky provozované systémy v různých technologiích jsou ve své podstatě systémy nelineární. Proto je třeba do základního kurzu vložit i část, která se zabývá základy analýzy a syntézy nelineárních systémů.

Nelineární systémy mají odlišné vlastnosti než systémy lineární, což se projevuje především v tom, že

- a) Výstup systému se zásadním způsobem liší pro měnící se amplitudu budícího signálu, a proto **neplatí princip superposice**
- b) Rovnovážné stavy existují také **mimo počátek souřadnic**
- c) Počáteční podmínky **mají vliv na dosažení rovnovážných stavů** autonomních systémů
- d) Vznikají stabilní **samobuzené kmity** (autooscilace) v systému, které mají **jinou frekvenci než je budící frekvence**
- e) Dochází ke **skokovým změnám amplitudy** výstupu při měnící se frekvenci budícího signálu

Zatím byl v různých předmětech hlavním nástrojem při výskytu nelinearit linearizace v okolí pracovních bodů. Cílem této kapitoly je seznámit studenty se základy analýzy nelineárních systémů a ukázat základní přístup návrhu reléových obvodů včetně časově optimálního řízení ve fázové rovině.

1 POPIS NELINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

Popis nelineární dynamických systémů s koncentrovanými parametry s jedním vstupem a jedním výstupem je možno rozdělit do dvou skupin.

- 1) V první skupině jsou nelineární systémy popsány buď nelineární diferenciální rovnicí řádu "n" nebo soustavou "n" nelineárních diferenciálních rovnic prvního řádu.
- 2) Druhou skupinu tvoří modely nelineárních systémů, které jsou složeny z lineární a nelineární části. Nelineární část je charakterizována statickými charakteristikami nelineárních členů.

1.1 NELINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Uvažujme nelineární systém s jedním vstupem a jedním výstupem. Nelineární diferenciální rovnice pak mohou mít tvar

- a) $y'''+3(y')^2 y''+y'\sqrt{y''}+2y=u$
- b) $my''+c_0 y'+c_1 y+c_2 y^3=F\cos\omega t$

Matematický popis nelineárního systému pomocí soustavy nelineárních rovnic prvního řádu získáme z diferenciálních rovnic volbou stavových proměnných. Omezíme se na volbu

fázových stavových proměnných, které dávají stavovým proměnným fyzikální význam: vzdálenost y , rychlost y' , zrychlení y'' atd. Vrchol stavového vektoru pak opisuje ve fázovém prostoru **fázovou trajektorii**. Pro uvedené rovnice a) a b) dostaneme

a) Soustavu tří nelineárních rovnic prvního řádu ve **fázovém prostoru**

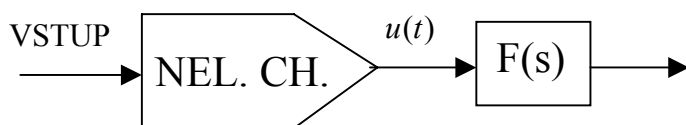
$$\begin{aligned} x_1 = y; \quad \dot{x}_1 = x_2 &= f_1(x_1, x_2, x_3, u) \\ x_2 = y'; \quad \dot{x}_2 = x_3 &= f_2(x_1, x_2, x_3, u) \\ x_3 = y''; \quad \dot{x}_3 = -3(x_2^2) \cdot x_3 - x_2 \sqrt{x_3} - 2x_1 + u &= f_3(x_1, x_2, x_3, u) \end{aligned}$$

b) Nelineární soustavu dvou nelineárních rovnic ve **fázové rovině**.

$$\begin{aligned} x_1 = y \quad \dot{x}_1 = x_2 &= f_2(x_1, x_2, t) \\ x_2 = y' \quad \dot{x}_2 = -(c_0/m) \cdot x_2 - (c_1/m) \cdot x_1 - (c_2/m) \cdot x_1^3 + (F/m) \cos \omega t &= f_2(x_1, x_2, t) \end{aligned}$$

1.2 CHARAKTERISTIKY TYPICKÝCH NELINEÁRNÍCH ČLENŮ

V technické praxi se setkáváme s nelineárními systémy, které je možno rozdělit na část, která je lineární a část, která je nelineární. Tak např. jsou různá technologická zařízení provozována v pracovních bodech, ve kterých je možno dynamiku systému aproximovat lineárním modelem, např. obrazovým přenosem. Nelineární část zařízení je možno aproximovat nelineárními charakteristikami. Např. nelineární charakteristiky akčních členů, ventilů atd. Dynamické vlastnosti těchto systémů je pak



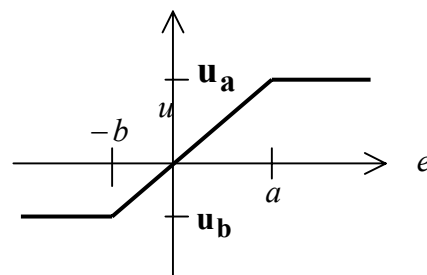
Obr.1.1 Nelineární systém s lineárním a nelineárním členem

možno modelovat lineárním a nelineárním blokem, podobně jak je tomu na obr.1.1. Do nelineárních bloků schématicky zakreslujeme nelineární (statickou) charakteristiku. Na základě praktických zkušeností jsou zavedeny typické nelinearity a jejich charakteristiky, mezi které počítáme: **nasycení, necitlivost, suché a viskózní tření, vůle v převodech, hystereze, relové charakteristiky a obecné nelinearity**.

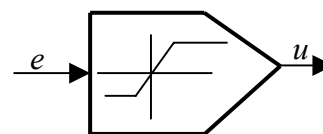
Nelinearita typu nasycení:

Nejčastější typem nelinearity akční veličiny je nasycení, protože není možno dosáhnout libovolně veliké akční veličiny a to jak z technických tak i fyzikálních důvodů. V oblasti kolem počátku je lineární, pro větší hodnoty e se projeví nasycení. Zpravidla se aproximuje přímkovými úseky viz obr 1.2. Výstup z nelineárního členu necitlivost je

$$(1-1) \quad u = \begin{cases} u_a & \text{pro } e \geq a \\ (u_a/a) \cdot e & \text{pro } b < e < a \\ u_b & \text{pro } e \leq -b \end{cases}$$



Obr.1.2 Lineární aproximace nasycení

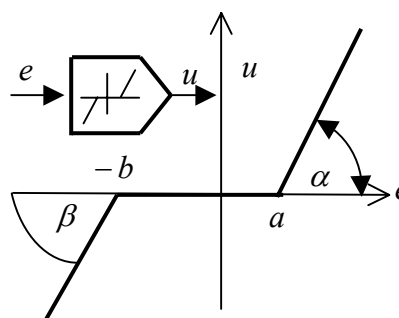


Obr.1.2b Schematická značka nasycení

Nelinearita typu necitlivost:

V mechanických systémech se projevují nedokonalosti v provedení, vůlí v mechanických členech či v pasivních odporech necitlivostí viz obr.1.3. Výstup z nelineárního členu "necitlivost" je

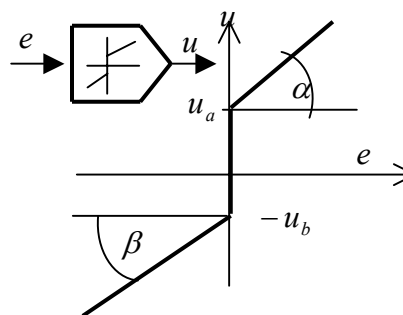
$$(1-2) \quad u = \begin{cases} u = (e - a) \cdot \operatorname{tg} \alpha & \text{pro } e \geq a \\ u = 0 & \text{pro } -b < e < a \\ u = (e + b) \cdot \operatorname{tg} \beta & \text{pro } e \leq -b \end{cases}$$



Obr.1.3 Necitlivost

Nelinearita typu tření: Účinek tření (kombinaci suchého a viskosního tření) vyjádříme aproximovanou nelineární charakteristikou dle obr.1.4, kde u aproximuje třecí síly nebo momenty. Výstup z této nelinearity je roven

$$(1-3) \quad u = \begin{cases} u = u_a + e \cdot \operatorname{tg} \alpha & \text{pro } e \geq 0 \\ u = -u_b - e \cdot \operatorname{tg} \beta & \text{pro } e < 0 \end{cases}$$



Obr.1.4 Nel. charakteristika tření

Nelinearita typu hysterese-vůle v převodech: Může být způsobena např. vůlemi v ozubení nebo u servopohonů s železnými jádry hysterézí železa atd. Na obr.1.5 je její charakteristika, H je šířka pásma hysterese, šipkami je naznačeno, které větve je nutno uvažovat, jestliže vstupní veličina roste nebo klesá. Výstup z tohoto členu zatím nebudeme matematicky zapisovat, protože je nepřehledný a vcelku komplikovaný. Bude popsán v části softwarová podpora v MATLABu.

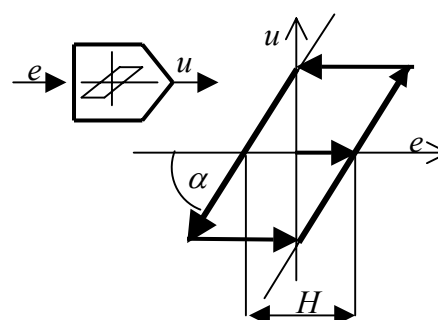
Zvláštní skupinu nelineárních charakteristik tvoří reléové charakteristiky, které popíšeme.

Ideální dvoupolohové relé: Jeho charakteristika je na obr.1.6. Výstup z relé je definován

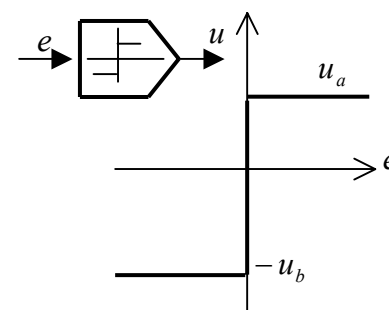
$$(1-4) \quad u = \begin{cases} u_a & \text{pro } e \geq 0 \\ -u_b & \text{pro } e < 0 \end{cases}$$

Je-li $|u_a| = |-u_b|$ pak platí

$$(1-5) \quad u = u_a \cdot \operatorname{sign}(e)$$



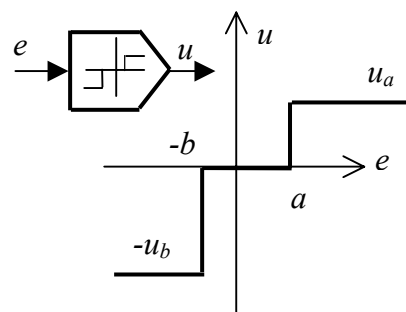
Obr.1.5 Nel. char. hysterese



Obr.1.6 Nel. char. ideálního dvoupolohového relé

Třípolohové relé: Charakteristika třípolohového relé je na obr.1.7. Pásmo necitlivosti je v intervalu $(-b, a)$. Výstup je roven

$$(1-6) \quad u = \begin{cases} u_a & \text{pro } e \geq a \\ 0 & \text{pro } -b < e < a \\ -u_b & \text{pro } e \leq -b \end{cases}$$

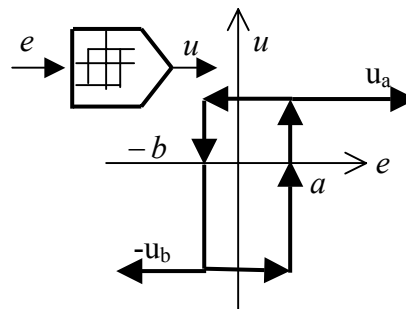


Obr.1.7 Třípolohové relé

Dvoupolohové relé s hysterezí. Charakteristika dvoupolohového relé s hysterezí je na obr.1.8. Šipky označují směr růstu nebo klesání vstupní veličiny. Výstup je roven

$$u = \begin{cases} \dot{e} > 0; u = u_a & \text{pro } e \geq a; u = +u_a & \text{pro } e < a \\ \dot{e} < 0; u = -u_b & \text{pro } e \geq -b; u = -u_b & \text{pro } e < -b \end{cases}$$

(1-7)

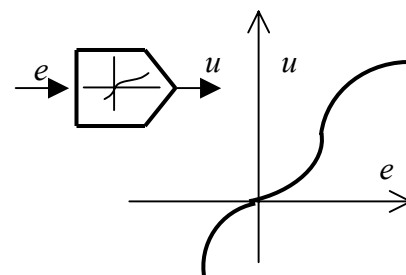


Obr.1.8 Dvoupolohové relé s hysterezí

Obecná nelinearita, její charakteristika je na obr.1.9. Její výstup je obecně nelineární funkce

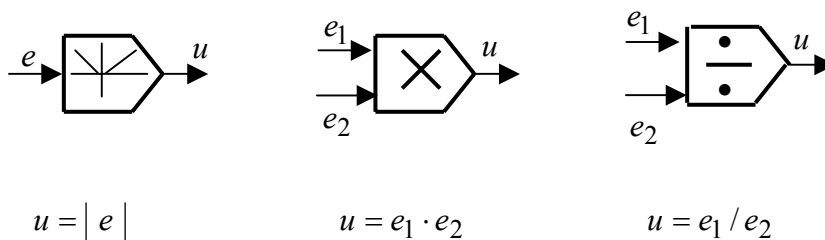
$$(1-8) \quad u = \Phi(e)$$

Do této skupiny se řadí elektronické prvky diody, doutnavky tyristory, nelineární kondensátory, cívky atd. Obecné průběhy charakteristik mají také mnohé snímače fyzikálních veličin.



Obr.1.9 Obecná nelinearita

Mezi nelinearity jsou dále zařazovány funkce **absolutní hodnota, násobení a dělení signálů**. Jejich schématické značky jsou na obr.1.10a,b,c.



Obr.1.10 a) Absolutní hodnota b) Násobení c) Dělení

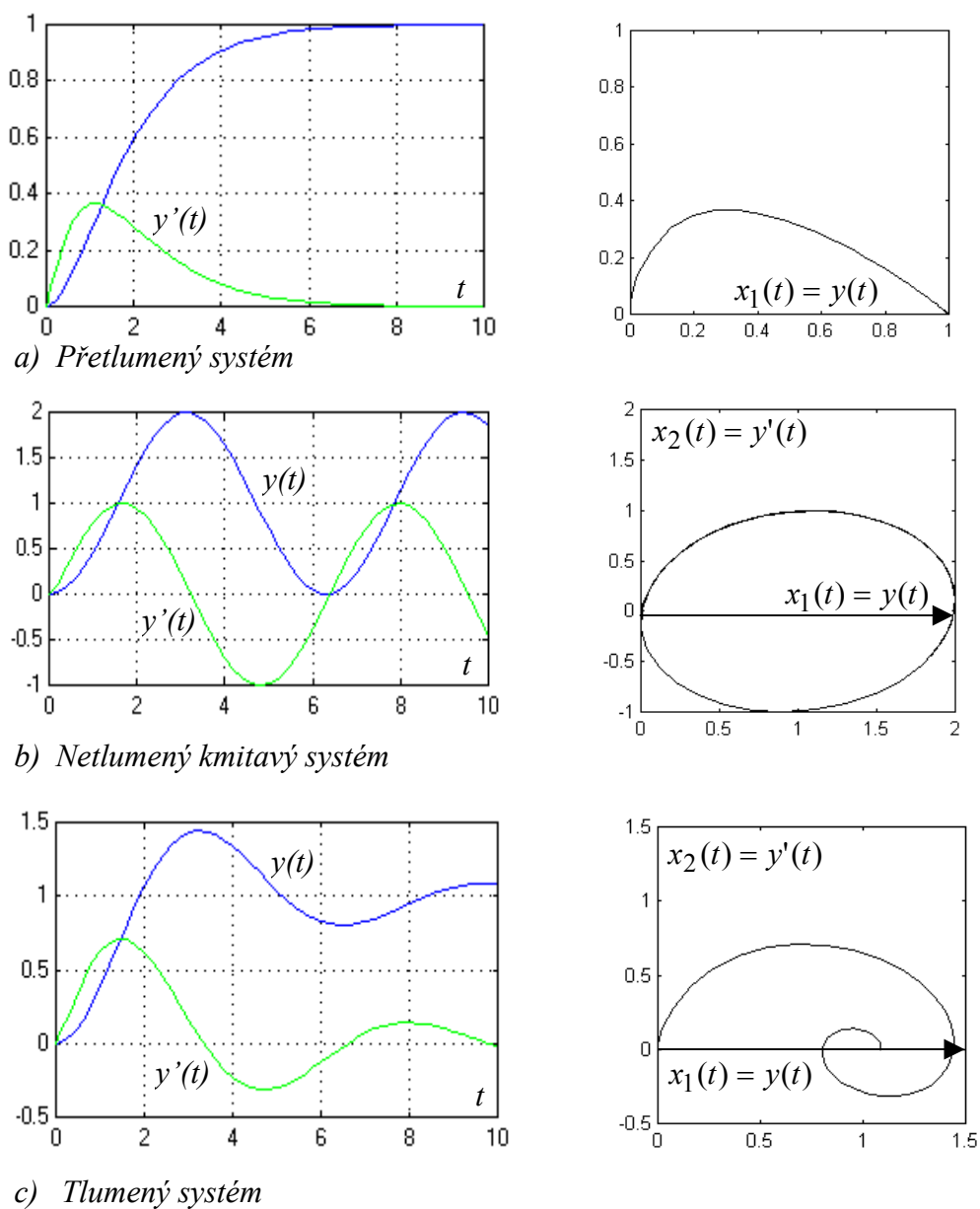
Z technického hlediska dělíme nelinearity na **přirozené**, které označujeme jako **parazitní** a tedy nechtěné a **nelinearity úmyslně zaváděné**. Tyto umožňují konstrukci jednoduchých regulátorů (dvoupolohové regulátory atd.) nebo jsou používány ke zlepšení stupně stability.

2. ANALÝZA VE FÁZOVÉ ROVINĚ

Přestože analýza ve fázové rovině je bezprostředně použitelná jen pro soustavy 2.řádu, existují dva důvody pro její výklad:

- 1) Jedná se o výklad v základním kurzu „Teorie automatického řízení II“, takže posluchači se setkávají s problematikou nelineárních systémů poprvé a právě názorný výklad ve fázové rovině jim usnadní pochopení této problematiky.
- 2) Řada nelineárních technických problémů je skutečně popsána nelineární rovnicí 2. řádu a je tedy možno je analyzovat ve fázové rovině.

Stavový popis nelineárních systémů ve fázovém prostoru a ve fázové rovině byl zaveden v kap.1.1. Na obr.2.1 jsou časové průběhy odezev a fázové trajektorie systému přetlumeného, kmitajícího tlumeného a kmitajícího netlumeného.



Obr.2.1 Časový průběh odezev a jejich fázové trajektorie

Fázové trajektorie je možno určit

- Graficko-početními metodami - jsou historicky překonané
- Analytickým řešením - je možné jen pro nejjednodušší případy
- Simulačními prostředky a výpočty - současný stav

Z praktického hlediska jsou nejvýznamnější simulační software. Celá výuka předmětů AŘ je budována na softwarové podpoře MATLABu a SIMULINKu. Softwarová podpora v MATLABu je zkráceně uvedena v kap.2.5. Analytická řešení jsou ukázána na jednoduchých příkladech. Pro názornější výklad a rychlejší pochopení se používá též graficko-početní technika.

2.1 KONSTRUKCE FÁZOVÉ TRAJEKTORIE

Uvažujme nelineární soustavu druhého řádu, která je popsána rovnicemi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u)\end{aligned}\quad (2.1 - 1)$$

Provedeme-li naznačené dělení

$$\frac{\frac{dx_2}{dt}}{\frac{dx_1}{dt}} = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2, u)}{f_1(x_1, x_2, u)} = S(x_1, x_2, u), \quad (2.1 - 2)$$

dostaneme rovnici tečny fázové trajektorie, která existuje pro každý bod fázové trajektorie vyjma singulárních bodů.

Jak již bylo řečeno, analytické řešení této rovnice je možné pouze pro nejjednodušší případy. Proto je její řešení historicky spojené s graficko-početní metodou nazývanou **metodou izoklín**. Je to metoda sice překonaná, ale je vhodná jako pomůcka pro výklad a pochopení probírané problematiky.

Metoda izoklín

Speciálně pro nelineární diferenciální rovnici 2. řádu tvaru

$$y'' + F(y, y') = \Phi(u) \quad (2.1 - 3)$$

a fázovou rovinu je možno psát

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -F(x_1, x_2) + \Phi(u) \end{bmatrix}.$$

Rovnice fázové trajektorie pak má tvar

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-F(x_1, x_2) + \Phi(u)}{x_2} = S(x_1, x_2, u) = S, \quad (2.1 - 4)$$

kde S je směrnice tečny v daném bodě trajektorie. Jestliže položíme $S_I = konst.$, pak rovnost

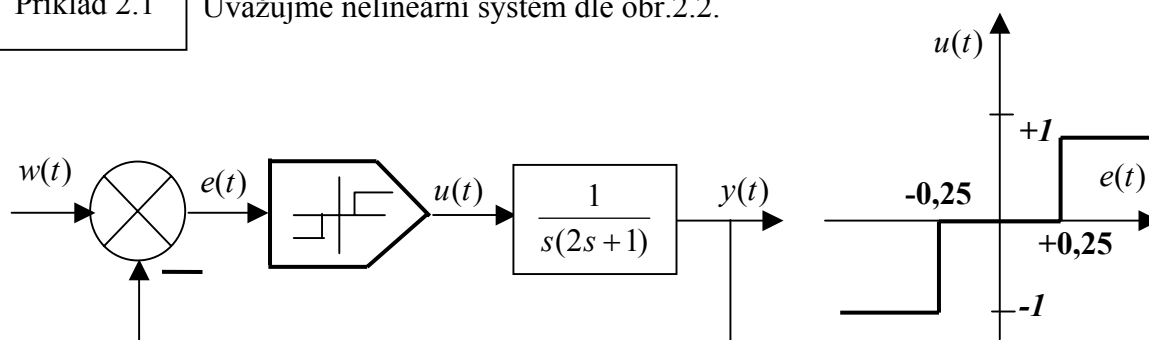
$$S_I \cdot x_2 = -F(x_1, x_2) + \Phi(u), \quad (2.1 - 5)$$

definuje křivku „*izoklínu*“, pro kterou platí, že tečna k fázové trajektorii je konstantní a je rovna právě S_I . Obecně ve stavovém prostoru tato rovnice má tvar

$$f_2(x_1, x_2, u) = S_I \cdot f_1(x_1, x_2, u) \quad (2.1 - 6)$$

Na následujícím příkladě bude demonstrována metoda izoklín.

Příklad 2.1 Uvažujme nelineární systém dle obr.2.2.



Obr.2.2 Regulační obvod s třípolohovým relé

Úkol: Pro zadané parametry třípolohového relé nakreslete množinu izoklín a fázových trajektorií pro $w = I$

Řešení: 1) Z daného obrazového přenosu určíme diferenciální rovnici

$$2 \cdot y'' + y' = u \quad \rightarrow \quad y'' = -0,5 \cdot y' + 0,5u.$$

a stavový popis ve fázové rovině

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -0,5x_2 + 0,5u \end{aligned}$$

Výstup u je definován

$$u = \Phi(e) = \begin{cases} +1 & \text{pro } e > 0,25 \\ 0 & \text{pro } -0,25 \leq e \leq 0,25 \\ -1 & \text{pro } e < -0,25 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 1 - x_1 > 0,25 \rightarrow x_1 < 0,75 \\ 0,75 \leq x_1 \leq 1,25 \\ 1 - x_1 < -0,25 \rightarrow x_1 > 1,25 \end{cases}$$

Přímky $x_1 = 0,75$ a $x_2 = 1,25$, na kterých dochází ke změně polarity akční veličiny - k přepnutí, jsou označovány jako **přepínací přímky** viz obr.2.3.

Tečna k fázové trajektorii je definována rovnicí

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-0,5x_2 + 0,5u}{x_2} = S.$$

Fázová rovina je rozdělena přepínacími přímkami do tří polorovin viz obr.2.3.

Polorovina I. ($u = 1$ a je definováno pro $x_1 < 0,75$; přepínací přímka $x_1 = 0,75$).

Pro tuto oblast je rovnice tečny rovna

$$S = \frac{-0,5x_2 + 0,5}{x_2} \text{ nebo } x_2 = \frac{0,5}{S + 0,5},$$

z čehož vyplývá, že izoklíny jsou přímky rovnoběžné s osou x_1 .

Polorovina II. ($u = 0$ je definováno na intervalu $0,75 \leq x_1 \leq 1,25$).

Pro tuto oblast pak rovnice tečny je rovna

$$S = \frac{-0,5x_2}{x_2} = -0,5.$$

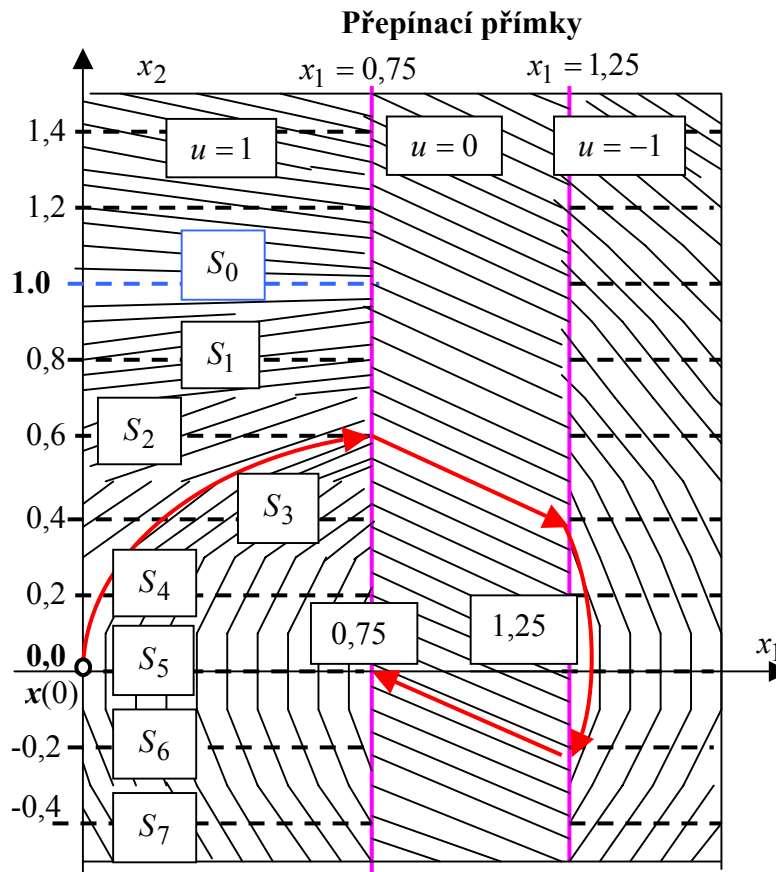
Z této rovnosti vyplývá, že v této oblasti (Polorovina II) jsou trajektorie přímky, jejichž směrnice je $-0,5$.

Polorovina III. ($u = -1$ pro $x_1 > 1,25$; přepínací přímka $x_1 = 1,25$).

Pro tuto oblast je rovnice tečny rovna

$$S = \frac{-0,5x_2 - 0,5}{x_2} \text{ nebo } x_2 = \frac{-0,5}{S + 0,5},$$

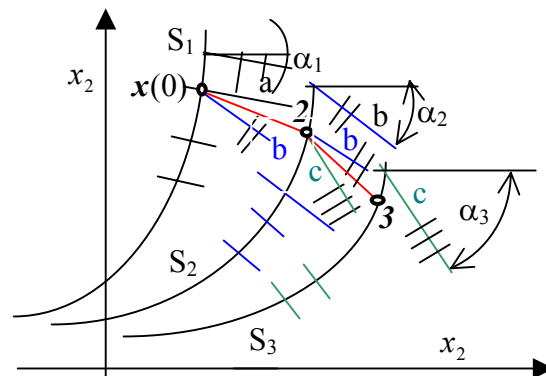
Množina izoklín S_0, S_1, \dots, S_7 je na obr.2.3. Pro názornost je proveden výpočet směrového pole na izoklínách S_0, S_1, \dots, S_7 a je uveden v tab.2.1. Výpočet směrníc dalších izoklín si každý může jednoduše ověřit.



Obr.2.3 Množina izoklín S_i a tečen fázových trajektorií

	x_2	tg
S0	1	0
S1	0,8	0,125
S2	0,6	0,333333
S3	0,4	0,75
S4	0,2	2
S5	0	∞
S6	-0,2	-3
S7	-0,4	-1,75

Tab.2.1



Obr.2.4 Konstrukce fázových trajektorií z izoklin

Fázová trajektorie se vytvoří dle obr.2.4. Na tomto obrázku jsou tři izokliny S_1, S_2, S_3 . Každá izoklina definuje určité směrové pole viz obr.2.4. Trajektorii aproximujeme malými přímkovými úseky mezi jednotlivými izoklinami. Postupuje se z počátečního stavu $x(0)$, který jak předpokládáme, leží na izoklině S_1 . Směrnice přímkového úseku trajektorie z izokliny S_1 se vytvoří tak, že do tohoto bodu zakreslíme směrnicí izokliny S_1 a S_2 (přímky a, b). Směrnice přímky, která aproximuje trajektorii, pak púlí tento úhel, které směrnice a, b vzájemně vytvoří. Přímková část trajektorie, jejíž směrnice je definovaná tímto úhlem končí na izoklině S_2 v bodě 2. Z bodu 2 na izoklinu S_3 se dostaneme obdobným způsobem. Do bodu 2 zakreslíme směrnice izokliny S_2 a S_3 (přímky b, c). Aproximovaná trajektorie přímkou v bodě 2, púlí úhel, který vytvořily směrnice b, c . Trajektorie končí na izoklině S_3 v bodě 3. Tento postup se opakuje, pokud nestrojíme celou trajektorii.

Konec příkladu

2.2 LINEARIZACE A STABILITA V MALÉM

Uvažujme *autonomní* nelineární časově invariantní systém

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.2 - 1)$$

Nelineární systém definovaný rovnicí (2.2 – 1) má dva typy ustálených stavů:

- a) **rovnovážný stav**, který je definovaný ve fázovém prostoru izolovanými **singulárními body** (klidové stavy),
- b) množinou singulárních bodů vytvářející uzavřené trajektorie – **mezní cykly**.

V rovnovážném stavu jsou časové změny všech stavových veličin rovny nule a proto singulární body ${}^i \mathbf{x}_S$ ve fázovém prostoru musí splňovat podmínku

$$f_1({}^i x_{1S}, {}^i x_{2S}, {}^i x_{3S}, \dots, {}^i x_{nS}) = 0$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_S) = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, p \Rightarrow \quad \begin{aligned} f_1(x_{1S}, x_{2S}, x_{3S}, \dots, x_{nS}) &= 0 \\ &\dots \\ f_n(x_{1S}, x_{2S}, x_{3S}, \dots, x_{nS}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2 - 2)$$

kde je p počet řešení.

Podmínka (2.2 – 2) může mít u nelineárních systémů více řešení což znamená, že ji vyhovují ve fázovém prostoru singulární body ${}^1\mathbf{x}_S, {}^2\mathbf{x}_S, {}^3\mathbf{x}_S, \dots, {}^p\mathbf{x}_S$.

Jak izolované singulární body (rovnovážné stavy) tak i mezní cykly mohou být stabilní nebo nestabilní podle toho, zda se zastupující bod ve stavovém prostoru pro $t \rightarrow \infty$ k tomuto bodu blíží nebo se od něho bude vzdalovat. Stabilitu v malém okolí singulárních bodů můžeme vyšetřovat linearizací nelineárního systému v singulárních bodech. Pro každý singulární bod pak získáme náhradní lineární systém a následně pak kontrolujeme jeho stabilitu.

Linearizaci provedeme rozvojem v Taylorovu řadu v okolí singulárních bodů

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_S, \quad \text{kde } \mathbf{x}_S = {}^i \mathbf{x}_S, \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, p,$$

ze které vybereme pouze její lineární části. Protože pro singulární body platí $\mathbf{f}(\mathbf{x}_S) = \mathbf{0}$, má pak Taylorův rozvoj tvar

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x_1 - x_{s1}) &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)_{\mathbf{x}_S} (x_1 - x_{s1}) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)_{\mathbf{x}_S} (x_2 - x_{s2}) + \dots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right)_{\mathbf{x}_S} (x_n - x_{sn}) \\ \frac{d}{dt}(x_2 - x_{s2}) &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)_{\mathbf{x}_S} (x_1 - x_{s1}) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)_{\mathbf{x}_S} (x_2 - x_{s2}) + \dots + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right)_{\mathbf{x}_S} (x_n - x_{sn}) \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d}{dt}(x_n - x_{sn}) &= \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right)_{\mathbf{x}_S} (x_1 - x_{s1}) + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right)_{\mathbf{x}_S} (x_2 - x_{s2}) + \dots + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right)_{\mathbf{x}_S} (x_n - x_{sn}). \end{aligned} \quad (2.2 - 3)$$

Soustavu (2 – 2.3) je možno zapsat maticově

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = J(\mathbf{x}_S) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_S) = J(\mathbf{x}_S) \cdot \Delta \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{x}, \quad (2.2 - 4)$$

kde

$$J(\mathbf{x}_S) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_S}$$

je Jacobiho matice.

Náhradní lineární systém v daném singulárním bodě má matici systému $\mathbf{A} = J(\mathbf{x}_S)$ a jeho stabilitu pak vyšetřujeme metodami používaných v lineárních systémech. Z analýzy soustav ve stavovém prostoru je známo, že charakteristická rovnice je rovna

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \det[s\mathbf{I} - J(\mathbf{x}_S)] = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0, \quad (2.2 - 5)$$

kde n je řád soustavy.

Příklad 2.2.1

Uvažujme nelineární systém, který je popsán rovnicemi

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + x_1 - x_1^2 & &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Nalezněte: 1) Singulární body
2) Náhradní lineární systémy v těchto bodech
3) Rozhodněte o stabilitě v okolí singulárních bodů

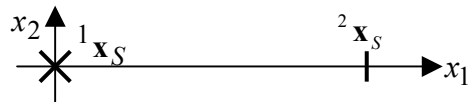
Řešení: 1) Singulární body vyhovují rovnosti

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 & &= f_1(x_1, x_2) \rightarrow x_2 = 0; \\ 0 &= -2x_2 + x_1 - x_1^2 = f_2(x_1, x_2) \rightarrow x_1(1 - x_1) = 0 \rightarrow a) x_1 = 0, b) x_1 = 1 \end{aligned}$$

Podmínku (2.2 - 4) splňují dva singulární body ${}^1\mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; ${}^2\mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$;

Singulární body jsou zobrazeny ve fázové rovině na obr.2.2.1

2) Náhradní lineární systémy



Obr.2.2.1 Singulární body

V souladu s (2.2 - 4) má Jacobiho rovnice tvar

$$J(\mathbf{x}_S) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_S} = \begin{bmatrix} 0 & ; & 1 \\ 1 - 2x_1 & ; & -2 \end{bmatrix}$$

a) Pro singulární bod ${}^1\mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ dostaneme

$$J(^1\mathbf{x}_S) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \det[sE - J(^1\mathbf{x}_S)] = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} = s^2 + 2s - 1$$

Charakteristická rovnice $s^2 + 2s - 1 = 0$ má kořeny

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \rightarrow s_1 = -1 + \sqrt{2} = 0,414; \quad s_2 = -1 - \sqrt{2} = -2,414;$$

Singulární bod $^1\mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ je nestabilní a jeho náhradní lineární systém má rovnici

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = J(^1\mathbf{x}_S) \cdot \Delta \mathbf{x} = \mathbf{A}_1 \cdot \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}.$$

b) Pro singulární bod $^2\mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dostaneme

$$J(^2\mathbf{x}_S) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \det[sE - J(^2\mathbf{x}_S)] = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ +1 & s+2 \end{bmatrix} = s^2 + 2s + 1 \rightarrow s_{1,2} = -1$$

Singulární bod $^2\mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ je stabilní a jeho náhradní lineární systém je

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = J(^2\mathbf{x}_S) \cdot \Delta \mathbf{x} = \mathbf{A}_2 \cdot \Delta \mathbf{x} \rightarrow \begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}.$$

Konec příkladu

2.3 TRAJEKTORIE VE FÁZOVÉ ROVINĚ

Ve fázové rovině je obecně možno zapsat linearizovaný systém ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{bmatrix},$$

$$\text{kde } c = \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}_S}; \quad d = \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}_S}.$$

Charakteristickou rovnici určíme podle (2.2 – 5)

$$\det[sE - \mathbf{A}] = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ -c & s-d \end{bmatrix} = s^2 - ds - c, \quad (2.3-1)$$

a vlastní čísla (kořeny charakteristické rovnice) jsou rovny

$$s_{1,2} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 + 4c}}{2} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{(d/2)^2 + c}.$$

Fázová trajektorie kolem singulárního bodu závisí na kořenech charakteristické rovnice linearizovaného systému, tedy na koeficientech „c“ a „d“. Za předpokladu že kořeny charakteristické rovnice s_1 a s_2 jsou reálné různé můžeme odezvu $x_1(t)$ a $x_2(t)$ vyjádřit ve tvaru

$$x_1(t) = y(t) = C_1 \cdot \exp(s_1 t) + C_2 \cdot \exp(s_2 t), \quad (2.3-2)$$

$$x_2(t) = y'(t) = s_1 C_1 \cdot \exp(s_1 t) + s_2 C_2 \cdot \exp(s_2 t), \quad (2.3-3)$$

kde C_1, C_2 jsou konstanty, které jsou obecně závislé na počátečních podmínkách.

Rovnice fázové trajektorie pak má tvar

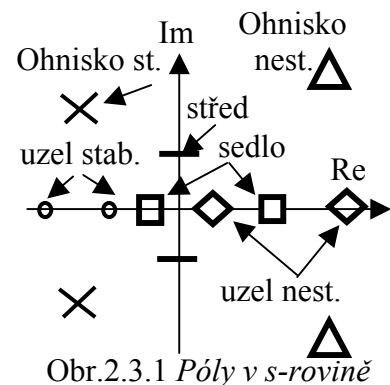
$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{s_1^2 C_1 \cdot \exp(s_1 t) + s_2^2 C_2 \cdot \exp(s_2 t)}{s_1 C_1 \cdot \exp(s_1 t) + s_2 C_2 \cdot \exp(s_2 t)}. \quad (2.3-4)$$

Parametry lineárního (linearizovaného) systému a jim odpovídající kořeny včetně typu singulárního bodu jsou uvedeny v tab.2.1, poloha pólů v s-rovině je na obr.2.3.1.

d^2+4c	c	d	Kořeny	Typ singulárního bodu
≥ 0	< 0	< 0	$s_{1,2} = d/2 \pm \sqrt{(d/2)^2 + c}; \quad s_1 < 0; s_2 < 0$	Uzel stabilní
≥ 0	< 0	> 0	$s_{1,2} = d/2 \pm \sqrt{(d/2)^2 + c}; \quad s_1 > 0; s_2 > 0$	Uzel nestabilní
> 0	> 0	≤ 0	$s_{1,2} = d/2 \pm \sqrt{(d/2)^2 + c}; \quad s_1 > 0; s_2 < 0$	Sedlo
< 0	< 0	$= 0$	$s_{1,2} = \pm i\omega = \pm i\sqrt{ c }$	Střed
< 0	< 0	< 0	$s_{1,2} = \alpha \pm i\omega; \quad \alpha = d/2 < 0; \quad \omega = \sqrt{(d/2)^2 + c}$	Ohnisko stabilní
< 0	< 0	> 0	$s_{1,2} = \alpha \pm i\omega; \quad \alpha = d/2 > 0; \quad \omega = \sqrt{(d/2)^2 + c}$	Ohnisko nestabilní

Tab.2.1 Kořeny a typy singulárních bodů lineárního (linearizovaného) systému 2. řádu

Průběhy fázových trajektorií budou odvozeny v následujícím.



Obr.2.3.1 Póly v s-rovině

Stabilní uzel ($s_1 < 0, s_2 < 0, |s_2| > |s_1|$)

Předpokládejme, že se počáteční podmínky ve vztahu (2.3 – 4) se volí právě tak, že platí

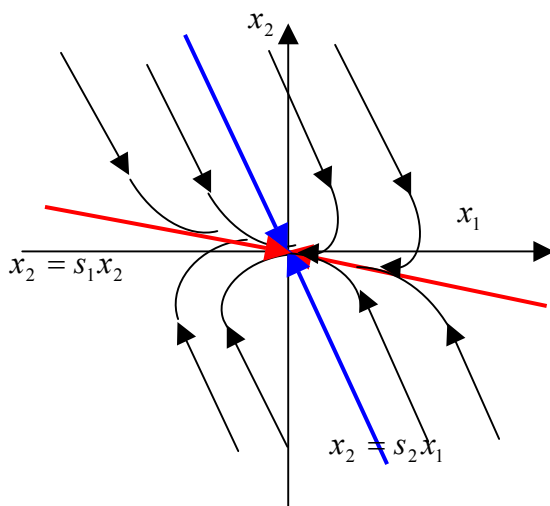
$$C_1 = 0; \frac{dx_2}{dx_1} = s_2 \rightarrow \text{pak fázová trajektorie je rovna přímce } x_2 = s_2 x_1,$$

$$C_2 = 0; \frac{dx_2}{dx_1} = s_1 \rightarrow \text{pak fázová trajektorie je rovna přímce } x_2 = s_1 x_1.$$

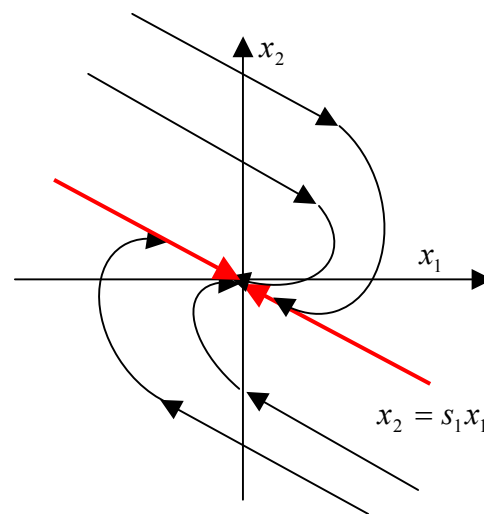
Pro takto zvolené konstanty jsou fázové trajektorie přímky se zápornými směrnici s_1, s_2 . **Fázový portrét** stabilního uzlu je na obr.2.3.2. Pro $t \rightarrow \infty$ členy s větší absolutní hodnotou jdou rychleji k nule a platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dx_2}{dx_1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{s_1^2 C_1 \cdot \exp(s_1 t) + s_2^2 C_2 \cdot \exp(s_2 t)}{s_1 C_1 \cdot \exp(s_1 t) + s_2 C_2 \cdot \exp(s_2 t)} = s_1. \quad (2.3 - 5)$$

Můžeme učinit závěr, že všechny trajektorie, které jsou v dostatečné vzdálenosti od singulárního bodu a od přímky $x_2 = s_1 x_1$, jsou rovnoběžné s trajektorií $x_2 = s_2 x_1$ a pro $t \rightarrow \infty$ se tangenciálně přimykají blíží k fázové trajektorii $x_2 = s_1 x_1$ (účinek dominantní - větší časové konstanty) viz obr.2.3.2. Všechny trajektorie se asymptoticky se blíží k počátku souřadnic – singulárnímu bodu.



Obr.2.3.2 Stabilní uzel $s_1 \neq s_2 < 0$



Obr.2.3.3 Stabilní uzel $s_1 = s_2$

Stabilní uzel ($s_1 = s_2 < 0$)

Za této podmínky (násobný kořen) jsou stavové proměnné rovny

$$\begin{aligned} x_1(t) = y(t) &= C_1 \cdot \exp(s_1 t) + C_2 t \exp(s_1 t) \\ x_2(t) = y'(t) &= s_1 C_1 \cdot \exp(s_1 t) + C_2 \cdot \exp(s_1 t) + s_1 C_2 t \exp(s_1 t) \end{aligned}$$

Rovnice fázové trajektorie pak má tvar

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{s_1^2 C_1 \cdot \exp(s_1 t) + 2s_1^2 C_2 \cdot \exp(s_1 t) + s_1 C_2 t \exp(s_1 t)}{s_1 C_1 \cdot \exp(s_1 t) + C_2 \cdot \exp(s_1 t) + s_1 C_2 t \exp(s_1 t)}. \quad (2.3 - 6)$$

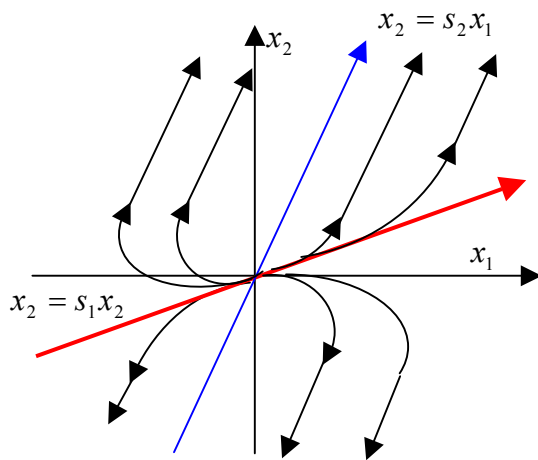
Pro takové počáteční podmínky, že $C_1 = 0$ je rovnice trajektorie rovna $\frac{dx_2}{dx_1} = s_1$ a vlastní trajektorie pro takto definované počáteční podmínky je přímka $x_2 = s_1 x_1$ se směrnici s_1 viz obr.2.3.3. Pro $t \rightarrow \infty$ a libovolnou počáteční podmínku je rovnice fázové trajektorie rovna

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dx_2}{dx_1} = s_1,$$

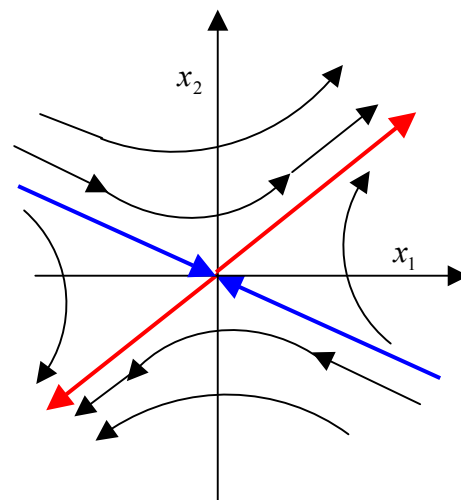
což znamená, že pro $t \rightarrow \infty$ se každá trajektorie tangenciálně blíží k přímce $x_2 = s_1 x_1$ a v dostatečné vzdálenosti od počátku (singulárního bodu) je s touto přímkou rovnoběžná viz obr.2.3.3.

Nestabilní uzel ($s_1 > 0, s_2 > 0, |s_2| > |s_1|$)

Fázový portrét nestabilního uzlu je na obr.2.3.4. Obsahuje dvě přímky $x_2 = s_1 x_1$ a $x_2 = s_2 x_1$, které mají kladné směrnice s_1, s_2 . Pro $t \rightarrow \infty$ jsou trajektorie rovnoběžné s přímkou $x_2 = s_2 x_1$.



Obr.2.3.4 Nestabilní uzel



Obr.2.3.5 Sedlo

Sedlo ($s_1 < 0, s_2 > 0$)

Pro nestabilní lineární systém, který má jeden kořen stabilní a jeden nestabilní, je rovnice fázové trajektorie dána výrazem (2.3 - 4) a (2.3 - 5). Fázový portrét pro různé počáteční podmínky je na obr.2.3.5. Obsahuje dvě přímkové trajektorie $x_2 = s_1 x_1$ a $x_2 = s_2 x_1$. Pro limitní případ $t \rightarrow \infty$ dosazením do (2.3-4) dostaneme

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dx_2}{dx_1} = s_2 \quad (2.3 - 7)$$

Znamená to, že se trajektorie nejdříve pohybují rovnoběžně s přímkou $x_2 = s_1 x_1$ (záporná směrnice) a později pro $t \rightarrow \infty$ jsou rovnoběžné s přímkou $x_2 = s_2 x_1$.

Střed ($s_{1,2} = \pm i\omega = \pm i\sqrt{|c|}$)

Diferenciální rovnice trajektorie pro ryze imaginární kořeny má tvar

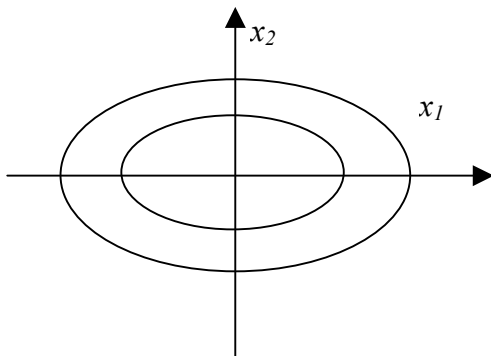
$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{cx_1}{x_2} \rightarrow x_2 dx_2 = cx_1 dx_1. \quad (2.3 - 8)$$

Její integrací dostaneme rovnici trajektorie ve tvaru

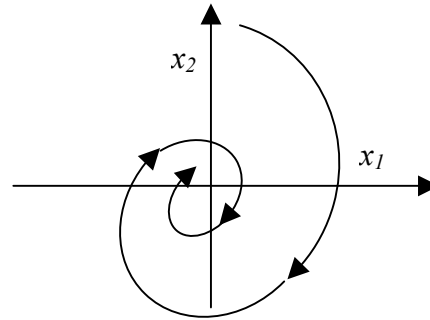
$$x_2^2 - cx_1^2 = K, \quad (2.3 - 9)$$

kde K je integrační konstanta, která je definována počátečními podmínkami.

Fázový portrét trajektorie střed je soustava elips viz obr.2.3.6.



Obr. 2.3.6 Střed ve fázové rovině



Obr. 2.3.7 Stabilní ohnisko

Stabilní ohnisko ($s_{1,2} = \alpha \pm i\omega$; $\alpha = d/2 < 0$; $\omega = \sqrt{(d/2)^2 + c}$;))

Pro kořeny komplexně sdružené je možno stavové proměnné vyjádřit ve tvaru

$$x_1(t) = y(t) = C \cdot \exp(s_1 t) + \bar{C} \cdot \exp(s_2 t) = 2|C| \exp(\alpha t) \cdot \cos(\omega t + \varphi), \quad (2.3 - 10)$$

kde $|C| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $C = a + ib$; $\varphi = \arctg b/a$;

Podobně platí pro

$$x_2(t) = y'(t) = 2|C_2| \exp(\alpha t) \cdot \cos(\omega t + \varphi_2), \quad (2.3 - 11)$$

kde $|C_2|$ je konstanta a φ_2 je fázové zpoždění.

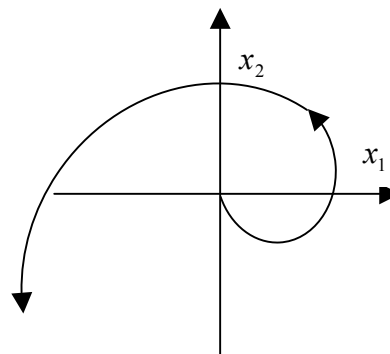
Fázový portrét stabilního ohniska je na obr.2.3.7. Výsledná trajektorie je spirála, jejíž polární souřadnice ρ se periodou $2\pi/\omega$ zmenšuje.

Nestabilní ohnisko

$$(s_{1,2} = \alpha \pm i\omega; \alpha = d/2 > 0; \omega = \sqrt{(d/2)^2 + c};)$$

Fázová trajektorie nestabilního ohniska je na obr.2.3.8. Je to rozvíjející se spirála v kladném smyslu otáčení.

Na následujícím příkladě bude ukázána aplikace fázových portrétů při analýze nelineárního systému.



Obr.2.3.8 Nestabilní ohnisko.

Příklad 2.3.1

Uvažujme nelineární autonomní systém, který je popsán diferenciální rovnicí

$$y'' + 3y' + 4y^3 - y = 0.$$

Úkol: Nalezněte singulární body a rozhodněte o stabilitě v okolí singulárních bodů a pokuste se rozhodnout o globální stabilitě.

Řešení:

1) Fázové rovnice jsou

$$\begin{aligned} x_1 &= y & \dot{x}_1 &= x_2 \\ x_2 &= y' & \dot{x}_2 &= -3x_2 - 4x_1^3 + x_1. \end{aligned}$$

a singulární body určíme z rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 & \rightarrow x_{2S} &= 0 \\ 0 &= -3x_2 - 4x_1^3 + x_1 & \rightarrow x_1(1 - 4x_1^2) = 0 & \left\{ \begin{array}{l} x_{1S} = 0 \\ x_{1S_{1,2}} = \pm 0,5 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Byly nalezeny tři singulární body o souřadnicích viz obr.2.3.9a

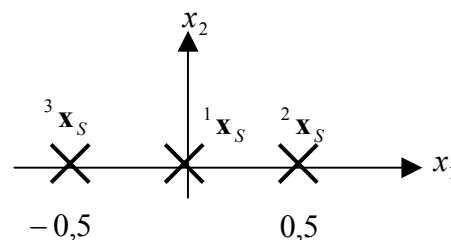
$${}^1\mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^2\mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^3\mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0 \end{bmatrix};$$

2) Linearizace v okolí singulárních bodů

Jacobiho matice je rovna

$$J(\mathbf{x}_S) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 12x_1^2 & -3 \end{bmatrix}.$$

a) Pro singulární bod ${}^1\mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; je charakteristická rovnice linearizovaného systému rovna



$$J(^1\mathbf{x}_S) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{^1\mathbf{x}_S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}; \quad \det[sE - J(^1\mathbf{x}_S)] = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix} = s^2 + 3s - 1$$

a póly jsou rovny

$$s_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \begin{cases} 0,3028 \\ -3,3028 \end{cases}$$

Singulární bod $^1\mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ je nestabilní a podle kořenů charakteristické rovnice je jeho fázovým portrétem sedlo. Stejným způsobem provedeme analýzu v dalších singulárních bodech.

$$\text{b) } ^2\mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad J(^2\mathbf{x}_S) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}; \quad \det[sE - J(^2\mathbf{x}_S)] = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} = s^2 + 3s + 2$$

a póly jsou rovny

$$s_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

Singulární bod $^2\mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}$ je stabilní a jeho trajektorii tvoří stabilní uzel.

$$\text{c) } ^3\mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad J(^3\mathbf{x}_S) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}; \quad \det[sE - J(^3\mathbf{x}_S)] = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} = s^2 + 3s + 2$$

Póly jsou rovny

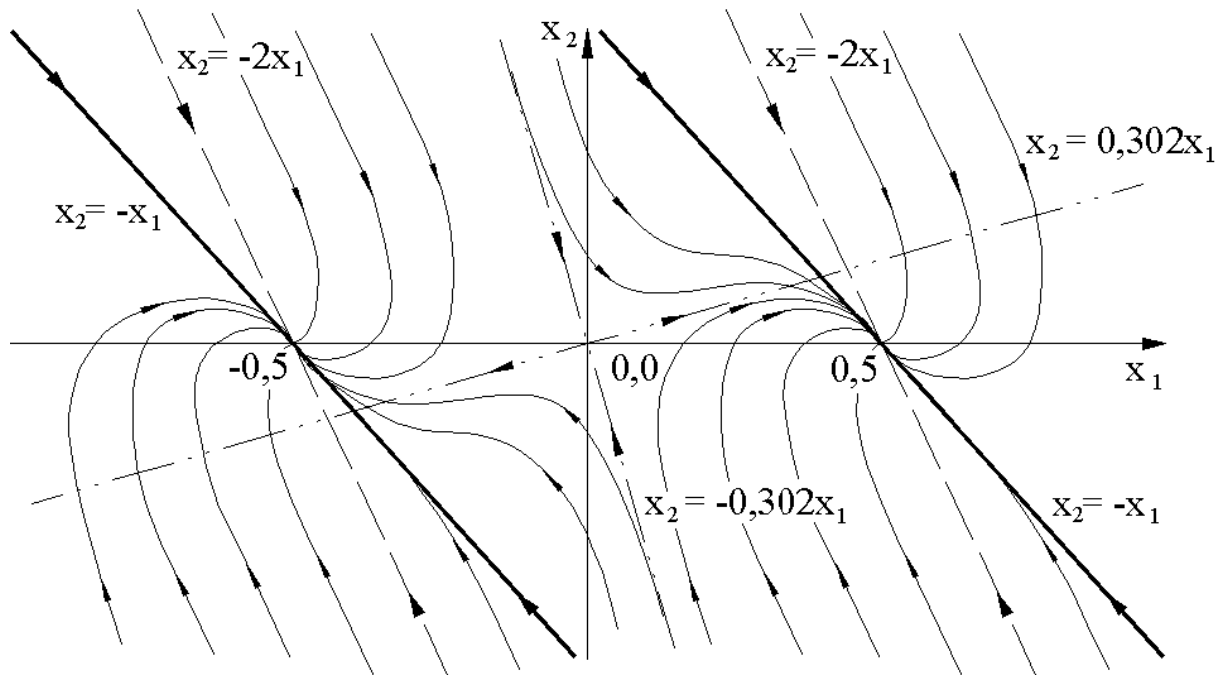
$$s_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

Singulární bod $^3\mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0 \end{bmatrix}$ je stabilní a jeho trajektorii tvoří stabilní uzel.

3) Fázové trajektorie. Aby bylo možno rozhodnout o globální stabilitě, je třeba zakreslit fázové trajektorie v celé fázové rovině viz obr.2.3.9b. Z obrázku je zřejmé, nelineární systém obsahuje dva stabilní singulární body

$$^2\mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad ^3\mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0 \end{bmatrix};$$

ke kterým se asymptoticky blíží všechny trajektorie pro libovolné počáteční podmínky. Nelineární systém je tedy asymptoticky stabilní.



Obr.2.3.9b Singulární body a jejich trajektorie

Příklad 2.3.2

Uvažujme nelineární dynamický systém, jehož stavové rovnice jsou

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(x_1 - 2x_2) \cdot (1 - x_1^2 - 3x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -(x_1 + x_2) \cdot (1 - x_1^2 - 3x_2^2) \end{aligned}$$

Úkol: Nalezněte singulární body a rozhodněte o jejich stabilitě.

1) Singulární body

Singulární body musí splňovat rovnice

$$\begin{aligned} 0 &= -(x_1 - 2x_2) \cdot (1 - x_1^2 - 3x_2^2) \\ 0 &= -(x_1 + x_2) \cdot (1 - x_1^2 - 3x_2^2) \end{aligned}$$

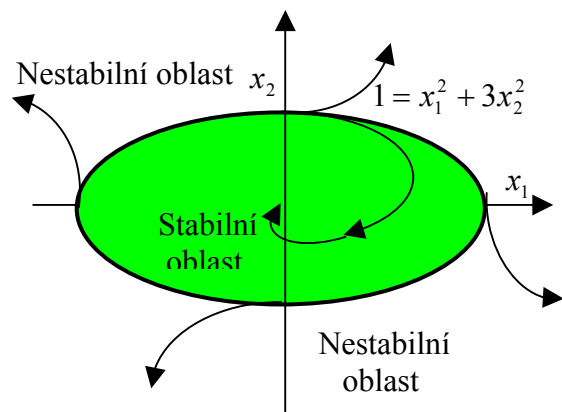
1) Těmto podmínkám vyhovuje izolovaný singulární bod $^1 \mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ a množina singulárních

bodů splňující rovnici $1 = x_1^2 + 3x_2^2$, což je rovnice elipsy viz obr.2.3.9. Trajektorie elipsy je trajektorie mezního cyklu.

2) Stabilita singulárních bodů

Provedeme linearizaci v singulárních bodech. Jacobiho matice je rovna

$$J(\mathbf{x}_s) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_s}$$



Obr.2.3.9 Singulární body

a po provedených derivacích obdržíme

$$J(\mathbf{x}_s) = \begin{bmatrix} -\left[(1-x_1^2-3x_2^2)-2x_1(x_1-2x_2)\right]; & -\left[2(1-x_1^2-3x_2^2)-6x_2(x_1-2x_2)\right] \\ -\left[(1-x_1^2-3x_2^2)-2x_1(x_1+x_2)\right]; & -\left[(1-x_1^2-3x_2^2)-6x_2(x_1+x_2)\right] \end{bmatrix}$$

a) Pro izolovaný singulární bod ${}^1\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ je Jacobiho matice rovna

$$J({}^1\mathbf{x}_s) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}; \quad \det[sE - J({}^1\mathbf{x}_s)] = \det \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} = s^2 + 2s + 3$$

Póly jsou rovny

$$s_{1,2} = \frac{-2 + \sqrt{4-12}}{2} = \begin{cases} s_1 = -1+i\sqrt{2} \\ s_2 = -1-i\sqrt{2} \end{cases}$$

Izolovaný singulární bod je stabilní ohnisko.

b) Pro množinu singulárních bodů, která je definována rovností $1 = x_1^2 + 3x_2^2$, platí

$$J({}^2\mathbf{x}_s) = \begin{bmatrix} 2x_1(x_1-2x_2) & 6x_2(x_1-2x_2) \\ 2x_1(x_1+x_2) & 6x_2(x_1+x_2) \end{bmatrix}$$

Determinant je roven

$$\begin{aligned} \det[sE - J({}^2\mathbf{x}_s)] &= \det \begin{bmatrix} s-2x_1(x_1-2x_2) & -6x_2(x_1-2x_2) \\ -2x_1(x_1+x_2) & s-6x_2(x_1+x_2) \end{bmatrix} = \\ &= [s-2x_1(x_1-2x_2)] \cdot [s-6x_2(x_1+x_2)] - 12x_2(x_1-2x_2)x_1(x_1+x_2) = s[s-2(x_1^2+3x_2^2+x_1x_2)] \end{aligned}$$

Dosadím-li za $1 = x_1^2 + 3x_2^2$ dostaneme

$$\det[sE - J({}^2\mathbf{x}_s)] = s \cdot [s - 2(1 + x_1x_2)]$$

a vlastní čísla linearizovaného systému pro množinu singulárních bodů, splňující podmínku $1 = x_1^2 + 3x_2^2$, jsou $s_1 = 0$; $s_2 = 2(1 + x_1x_2)$.

Protože pro $1 + x_1x_2 > 0$ jsou vlastní čísla kladná tvoří množina bodů $1 = x_1^2 + 3x_2^2$ nestabilní mezní cykl ve tvaru elipsy s poloosami $\langle 1; 1/\sqrt{3} \rangle$ viz obr.2.3.9.

3) Nelineární systém je stabilní v oblasti $1 > x_1^2 + 3x_2^2$, nestabilní v oblasti $1 \leq x_1^2 + 3x_2^2$.

Konec příkladu

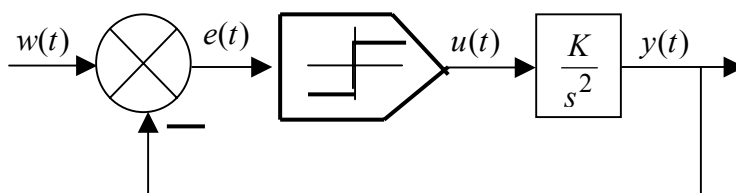
2.4 RELÉOVÉ OBVODY A ČASOVĚ OPTIMÁLÍ ŘÍZENÍ

Reléové obvody jsou regulační obvody nebo servomechanismy, které mají jako regulační orgán zabudován nelineární prvek typu relé. Předností regulačních prvků typu relé jsou jednoduchost, malá hmotnost i rozměrnost a spolehlivost. Bývají zpravidla výrazně levnější než spojité regulátory a jsou velmi často používány při řešení jednoduchých regulačních

problémů. Regulační pochody nejsou ale příliš příznivé, objevují se sklony k nestabilitě a ke vzniku mezních cyklů - autooscilací.

2.4.1 Analýza reléových obvodů ve fázové rovině

V této části základního kurzu se seznámíme s analýzou reléových obvodů ve fázové rovině. Postup bude ukázán na jednotlivých příkladech.



Obr.2.4.1 Regulační obvod s dvupolohovým relé

Ideální dvupolohové relé

Příklad 2.4.1

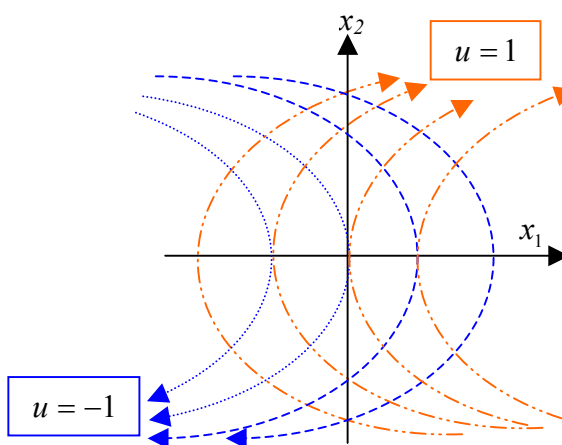
Uvažujme nelineární regulační obvod dle obr.2.4.1. Lineární část je popsána diferenciální rovnicí $y'' = Ku$, stavový popis ve fázové rovině

$$\begin{aligned} x_1 &= y & \dot{x}_1 &= x_2 \\ x_2 &= y' & \dot{x}_2 &= K \cdot u \end{aligned} \rightarrow$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{K \cdot u}{x_2} \rightarrow x_2 dx_2 = K \cdot u \cdot dx_1$$

Integrací levé a pravé strany dostaneme

$$\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^2(0)}{2} = Ku \cdot [x_1 - x_1(0)] \rightarrow x_2(t) = \sqrt{2 \cdot |Ku \cdot [x_1(t) - x_1(0)] + x_2^2(0)} \quad (2.4-1)$$



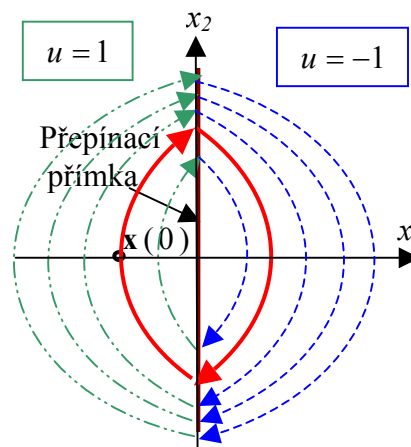
Obr.2.4.2a Fázové trajektorie pro u=1, u=-1

Výsledkem je rovnice (2.4 – 1), která představuje fázové trajektorie jako množinu parabol viz obr.2.4.2a, přičemž počátečními podmínkami je definována konkrétní trajektorie. Znaménkem akční veličiny je definován směr trajektorie (pro kladné u se x_2 zvětšuje se a naopak) . Pro $w = 0$ je akční veličina ve fázové rovině definována následujícím způsobem

$$\begin{aligned} u &= -1 \text{ pro } e < 0, \text{ tedy pro } x_1 > 0, \\ u &= +1 \text{ pro } e > 0, \text{ tedy pro } x_1 < 0. \end{aligned}$$

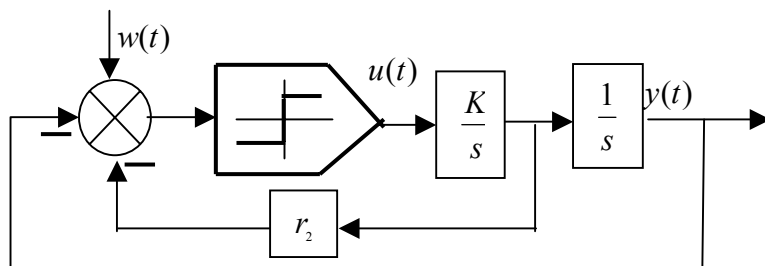
Zákon řízení ve fázové rovině můžeme pro nelineární člen psát ve tvaru

$$u = -\text{sign}(x_1) \quad (2.4 - 2)$$

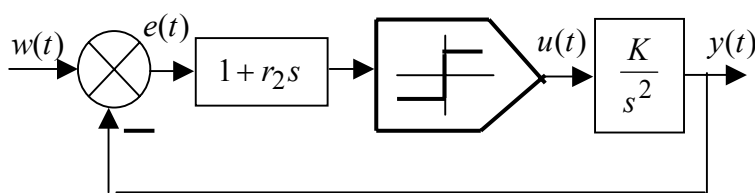


Obr.2.4.2b Fázové trajektorie regulačního obvodu s ideálním dvupolohovým relé

Z fázových trajektorií na obr.2.4.2b je vidět, že v regulačním obvodu s ideálním dvoupolohovým relé, nemá-li regulovaná soustava tlumení, dochází ke vzniku **vynuceného stabilního cyklu**.



Obr.2.4.3a Obvod s rychlostní zpětnou vazbou



Obr.2.4.3b Obvod s derivací regulační odchylky

Cykl obsahuje i výchozí-počáteční stav $x(0)$. Pochopitelně taková regulace je neakceptovatelná a hledají se způsoby, jak tento jev odstranit. Existuje několik možností. Jeden z možných způsobů odstranění mezního cyklu je zavedení **rychlostní zpětné vazby (tachometrická zpětná vazba)** dle obr.2.4.3a nebo zavedením derivace regulační odchylky do nelineárního členu na obr.2.4.3b. Akční veličinu s rychlostní zpětnou vazbou můžeme definovat následujícím způsobem: pro $(w = 0)$ v závis-

losti na regulační odchylce nebo fázových proměnných dostaneme

$$u = -1 \text{ pro } e + r_2 \dot{e} < 0, \text{ tedy pro } x_1 + x_2 r_2 > 0,$$

$$u = +1 \text{ pro } e + r_2 \dot{e} > 0, \text{ tedy pro } x_1 + x_2 r_2 < 0.$$

Zákon řízení nelineárního členu pak je možno vyjádřit rovností

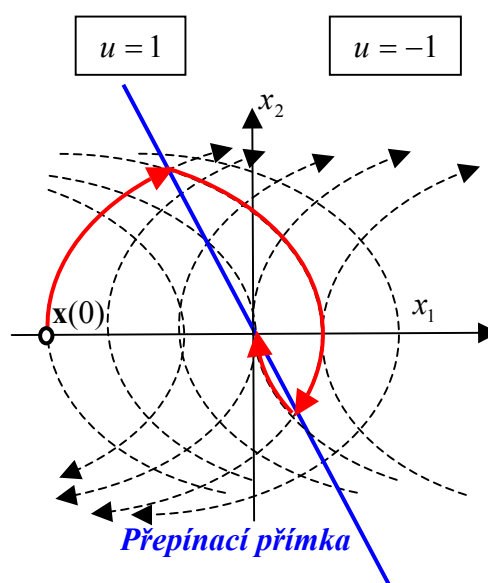
$$u = \text{sign}(e + r_2 \dot{e}) = -\text{sign}(x_1 + r_2 x_2) \tag{2.4-3}$$

K přepínání dochází na přímce

$$x_1 = -r_2 x_2 \rightarrow x_2 = -\frac{1}{r_2} x_1$$

Je zřejmé, má-li přepínací přímka zápornou směrnici, dochází ke stabilizaci obvodu viz. obr.2.4.4, protože přepnutí se posouvá vlevo od přímky x_2 , tedy přepnutí proběhne s „předstihem“. Kladná směrnice přepínací přímky tento obvod destabilizuje.

Ke konci regulačního pochodu nastává u systémů s přepínací přímkou tzv. **klouzavý režim**, při kterém se trajektorie blíží k počátku podél přepínací přímky. Při tomto pohybu relé neustále přepíná s vysokou frekvencí viz. obr.2.4.5.



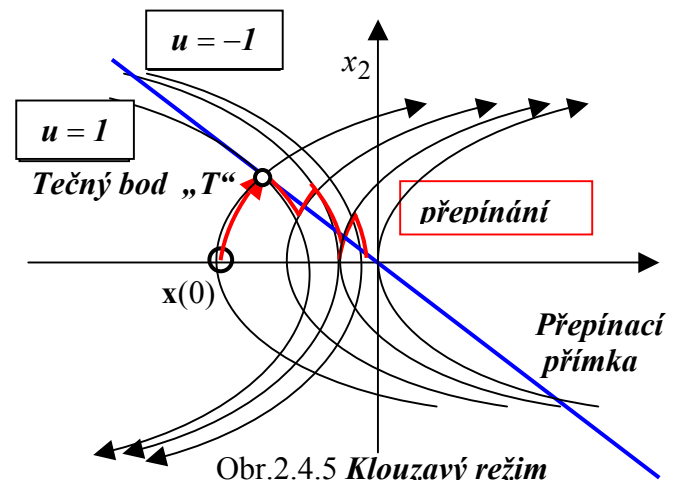
Obr.2.4.4 Fázové trajektorie obvodu s rychlostní zpětnou vazbou a zavedením de/dt

Ke klouzavému režimu dochází na přepínací přímce od bodu „T“ do počátku souřadnic viz obr.2.4.5. Bod „T“ je tečným bodem přepínací přímky a fázové trajektorie.

Neustálé přepínání je způsobeno tím, že obě trajektorie, pro zápornou a kladnou akční veličinu znovu protínají přepínací přímku na téže straně rovnovážného bodu.

Stabilizační účinek *tachometrické vazby* a zavedení *derivace regulační odchylky* do nelineárního členu je stejný.

Konec příkladu



Obr.2.4.5 Klouzavý režim

Jako další příklad uvedeme analýzu ve fázové rovině regulačního obvodu s dvoupolohovým relé s hysterezí.

Příklad 2.4.2 Dvoupolohové relé s hysterezí ($w = 0$)

Uvažujme regulační obvod z Př.2.4.1 ale s tím, že nelineární prvek je dvoupolohové relé s hysterezí viz. obr.2.4.6. Dvoupolohové relé s hysterezí respektuje růst nebo klesání regulační odchylky. Je proto nutné při popisu akční veličiny ve fázové rovině uvažovat dvě základní možnosti:

- 1) růst regulační odchylky $\dot{e} > 0$,
- 2) klesání regulační odchylky $\dot{e} < 0$.

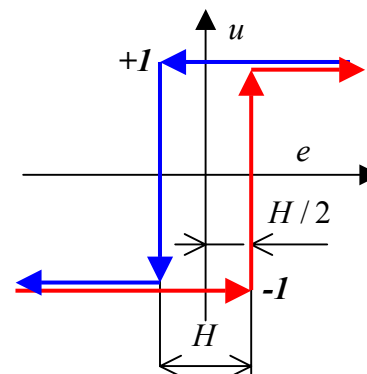
1) Pro $\dot{e} > 0$ platí

$$\dot{e} > 0; \frac{d}{dt}(w - y) = -\frac{dy}{dt} = -x_2 \rightarrow x_2 < 0;$$

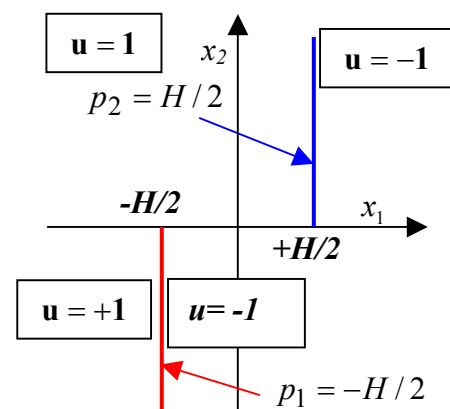
$$a) u = -1 \text{ pro } e < \frac{H}{2}; -x_1 < \frac{H}{2}; \rightarrow x_1 > -\frac{H}{2};$$

$$b) u = +1 \text{ pro } e > \frac{H}{2}; -x_1 > \frac{H}{2}; \rightarrow x_1 < -\frac{H}{2}.$$

Ze vztahů a) b) plyne, že fázová polovina je pro $\dot{e} > 0$ rozdělena vzhledem k akční veličině přepínací polopřímkou $x_1 = -H/2$ na dvě části viz obr.2.4.7.



Obr.2.4.6 Dvoupolohové relé s hysterezí



Obr.2.4.7 Přepínací přímky dvoupolohového relé s hysterezí

2) Pro $\dot{e} < 0$ platí

$$\dot{e} < 0; \frac{d}{dt}(w - y) = -\frac{dy}{dt} = -x_2 < 0; \rightarrow x_2 > 0; a) u = -1 \text{ pro } e < -\frac{H}{2}; -x_1 < -\frac{H}{2}; \rightarrow x_1 > +\frac{H}{2};$$

$$b) u = +1 \text{ pro } e > -\frac{H}{2}; -x_1 > -\frac{H}{2}; \rightarrow x_1 < +\frac{H}{2}.$$

Fázová polorovina pro $\dot{e} < 0$ je podle těchto vztahů je vzhledem k akční veličině rozdělena přepínací polopřímkou $p_2 = x_1 = H/2$ na dvě části viz obr.2.4.7. Ze vztahů vypočtených v 1) a 2) můžeme zákon řízení nelineárního členu vyjádřit funkcí

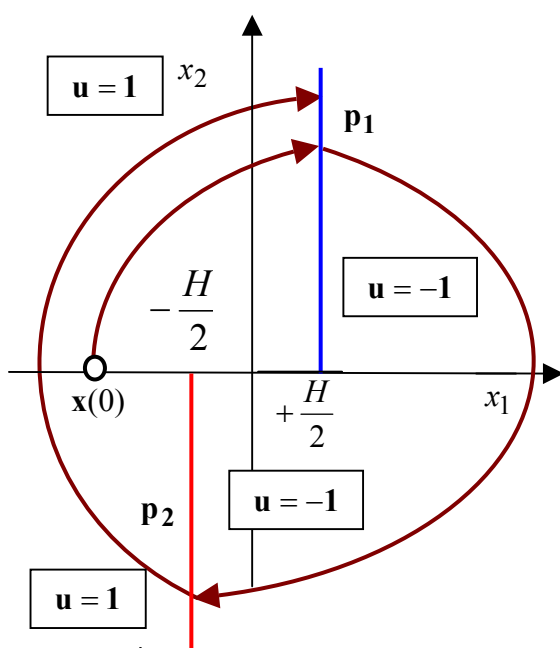
$$u = -\text{sign}\left[x_1 - \text{sign}(x_2) \cdot H/2\right]. \quad (2.4 - 4)$$

Trajektorie regulačního pochodu pro počáteční podmínky $\mathbf{x}(0)$ jsou na obr.2.4.8. Je zřejmé, že regulační pochod s dvoupolohovým relé s hysterezí je nestabilní, pro soustavu 2. řádu bez tlumení. Hystereze má zřejmý destabilizující účinek.

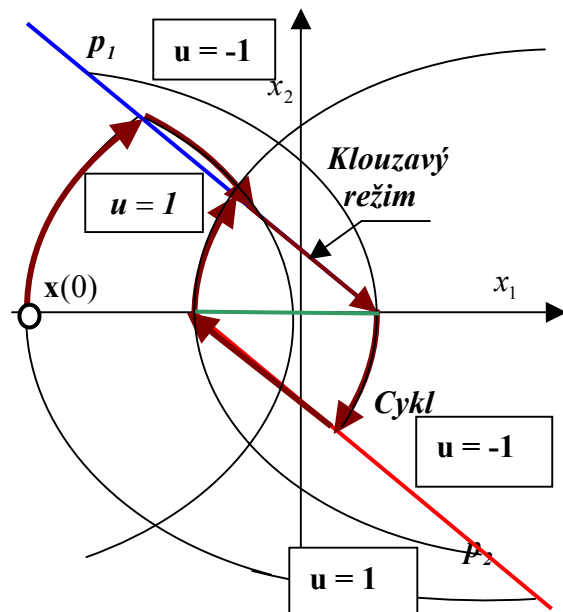
Je třeba provést stabilizaci zavedením derivace regulační odchylky nebo rychlostní zpětné vazby. Přepínací přímky p_1, p_2 pak musí splňovat rovnice (viz. obr.2.4.9)

$$p_1 : x_2 > 0; x_1 + \frac{H}{2} + r_2 x_2 = 0; \quad p_2 : x_2 < 0; x_1 - \frac{H}{2} + r_2 x_2 = 0; \quad (2.4 - 5)$$

Zákon řízení nelineárního členu je pak možno zapsat do tvaru



Obr.2.4.8 Nestabilní trajektorie regulačního pochodu



Obr.2.4.9 Trajektorie regulačního pochodu s dvoupolohovým relé s hysterezí a s rychlostní stabilizací

$$u = -\text{sign}\left[x_1 - \text{sign}(x_2) \cdot \frac{H}{2} + r_2 x_2\right].$$

(2.4 - 6)

Trajektorie regulačních pochodů s dvoupolohovým relé s hysterezí a rychlostní stabilizací jsou zobrazeny včetně přepínacích polopřímek jsou na obr.2.4.9.

Z obr.2.4.9 lze vidět stabilizační účinek rychlostní zpětné vazby. Obvod je stabilizován, ale vznikají oscilace - cykly, které jsou způsobeny přepínáním. Část trajektorie cyklu tvoří trajektorie, kterou je označována jako klouzavý režim, tedy přepínání akční veličiny s velkou frekvencí.

Konec příkladu

2.4.2 Časově optimální reléové obvody

Úlohy, v nichž se požaduje minimalizace doby přechodu řízeného objektu z počátečního stavu do koncového stavu, se nazývají **t-optimální úlohy**. První řešení úlohy tohoto typu předložil J.Bernoulli v roce 1696. Řešení bylo navrženo pomocí variačního počtu.

Řešení úlohy t-optimálního řízení lineárních stacionárních systémů a tedy i reléových obvodů je možno provádět variačním počtem, metodou dynamického programování nebo Pontrjaginovým principem minima, maxima viz. [5,6,7,13]. Aplikace těchto metod však přesahuje rámec základního kurzu a výklad soustředíme na demonstraci časově t-optimálního řízení na zvoleném příkladě.

Příklad 2.4.3

Uvažujme nelineární regulační obvod z Př.2.4.1, jehož fázové trajektorie jsou na obr.2.4.2a. Zjednodušeně lze říci, aby bylo dosaženo časově optimálního řízení, tj. aby bylo dosaženo minimální doby přechodu, je třeba **minimalizovat počet přepnutí**. Minimální počet přepnutí ve fázové rovině je rovno jednomu přepnutí. Jedno přepnutí zajistíme tehdy, jestliže bude přepínání realizováno na přepínacích křivkách, kterými jsou **trajektorie končící v počátku souřadnic**. Tuto podmínku splňují rovnice křivek

$$\begin{aligned} a) \text{ pro } x_1 < 0; x_2^2 &= -2 \cdot x_1, & \text{nebo } \frac{1}{2}|x_2| \cdot x_2 &= -x_1 \\ b) \text{ pro } x_1 > 0; x_2^2 &= +2 \cdot x_1 \rightarrow x_{2,p} = \sqrt{2|x_1|}; & \text{nebo } \frac{1}{2}|x_2| \cdot x_2 &= +x_1. \end{aligned}$$

Pro akční veličinu platí podmínkové rovnice

$$a) u_{opt} = +1 \text{ pro } x_2 < \sqrt{2|x_1|},$$

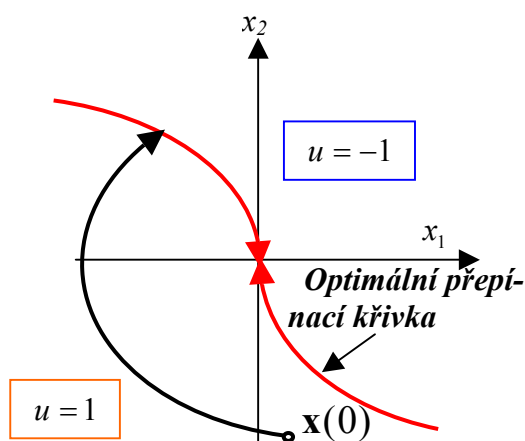
$$b) u_{opt} = -1 \text{ pro } x_2 > \sqrt{2|x_1|}.$$

Zákon řízení pak může mít tvar

$$u_{opt} = -\text{sign}\left[x_2 + \text{sign}(x_1) \cdot \sqrt{2|x_1|}\right] \quad (2.4 - 5a)$$

nebo v jednodušším tvaru

$$u_{opt} = -\text{sign}\left(\frac{1}{2}|x_2|x_2 + x_1\right) \quad (2.4 - 5b)$$



Obr.2.4.2a Fázové trajektorie pro t-optimální časové řízení

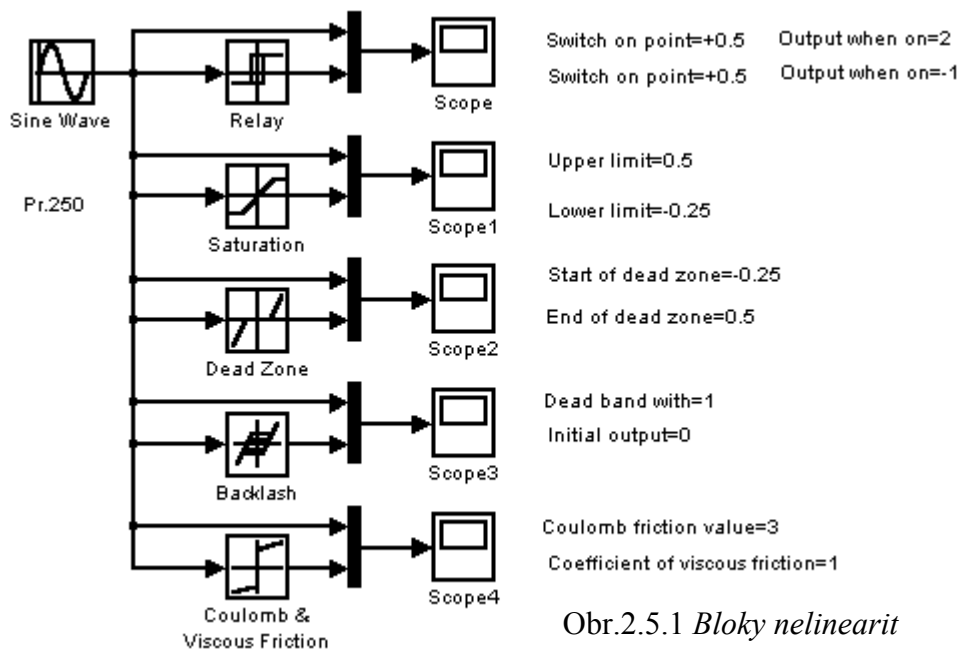
Konec příkladu

2.5 SOFTWAREVÁ PODPORA V MATLABU

Soustředíme se na softwarovou podporu MATLABu ve vazbě na nelineární bloky, které jsou k dispozici v menu SIMULINKu. Aplikace budou ukázány na jednoduchých příkladech.

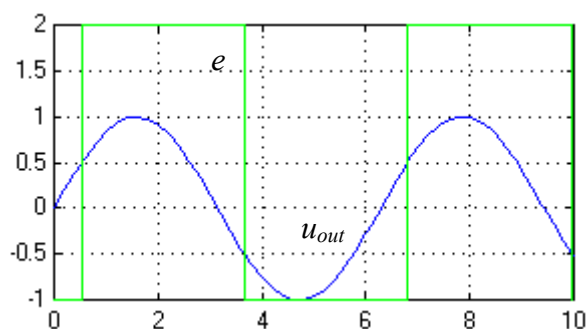
Příklad 2.5.1

Zakreslete časový výstup průběhu z relé, nasycení, třípolehového relé, hystereze a tření, je-li vstupní signál funkce $\sin(t)$. Funkční bloky a parametry nelinearit jsou na obr.2.5.1.

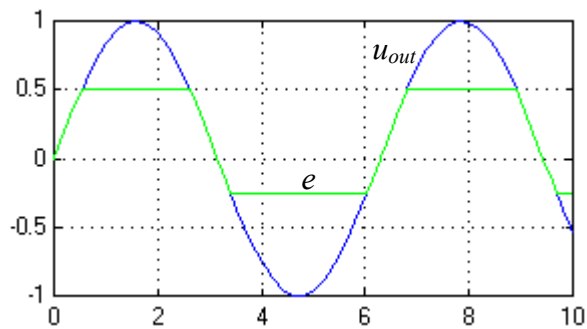


Obr.2.5.1 Bloky nelinearit

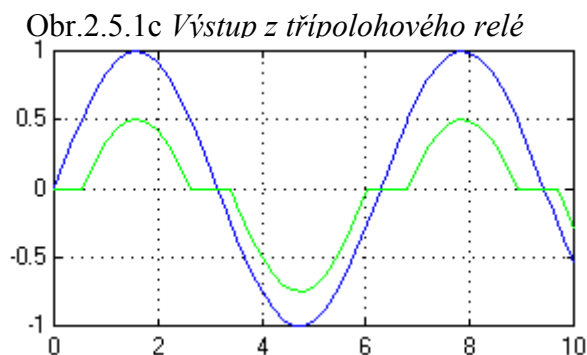
Časové průběhy vstupů a výstupů jsou na obr.2.5.1a,b,c,d,e.



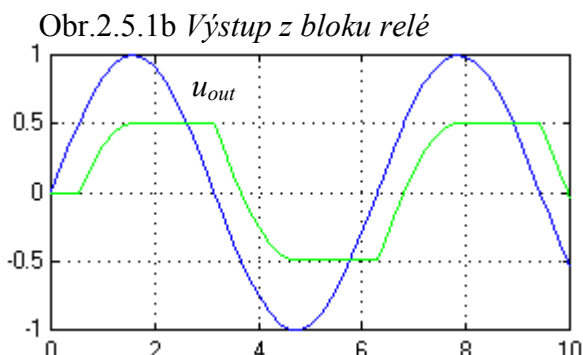
Obr.2.5.1a Výstup z relé



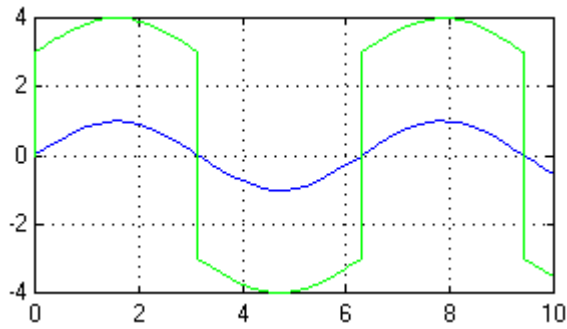
Obr.2.5.1b Výstup z nelinearity – nasycení



Obr.2.5.1c Výstup z třípolehového relé



Obr.2.5.1b Výstup z bloku relé

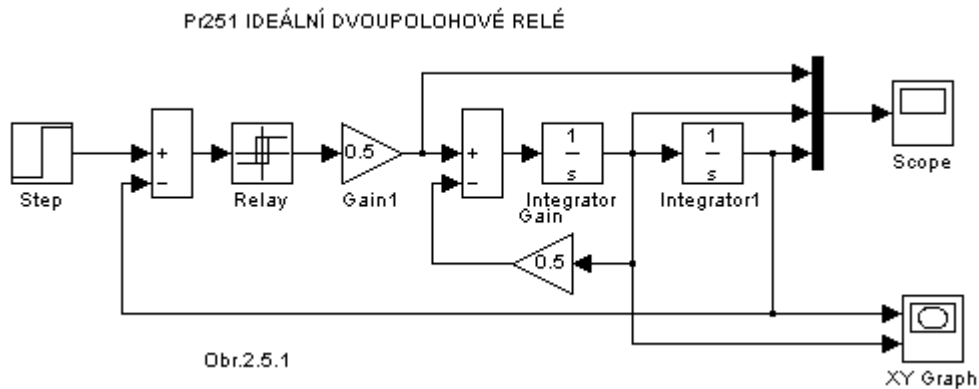


Obr.2.5.1e Výstup z bloku tření

Příklad 2.5.2

Nakreslete simulační schéma regulačního obvodu s třípolohovým relé a průběh trajektorie ve fázové rovině včetně časového průběhu regulačních pochodů soustavy s přenosem $F=1/s(2s+1)$ a skok žadané hodnoty.

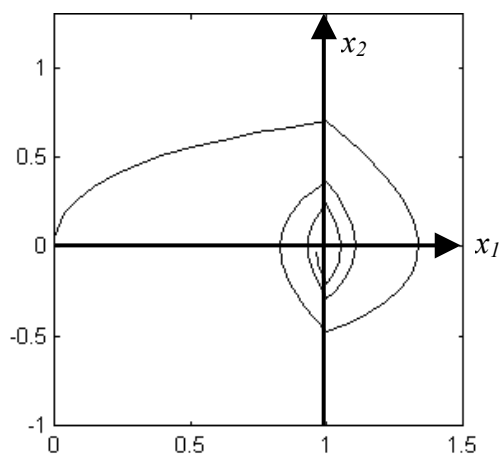
Řešení: Simulační schéma je na obr.2.5.2, trajektorie ve fázové rovině na obr.2.5.2a.



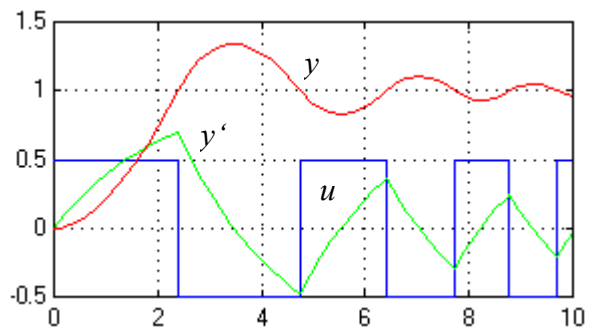
Obr.2.5.1

Obr.2.5.2 Simulační schéma s ideálním relé

Průběh regulačních pochodů v čase včetně derivace výstupního signálu a akční veličiny je na obr.2.5.2b.



Obr.2.5.1a Fázové trajektorie



Obr.2.5.2b Regulační pochody v čase

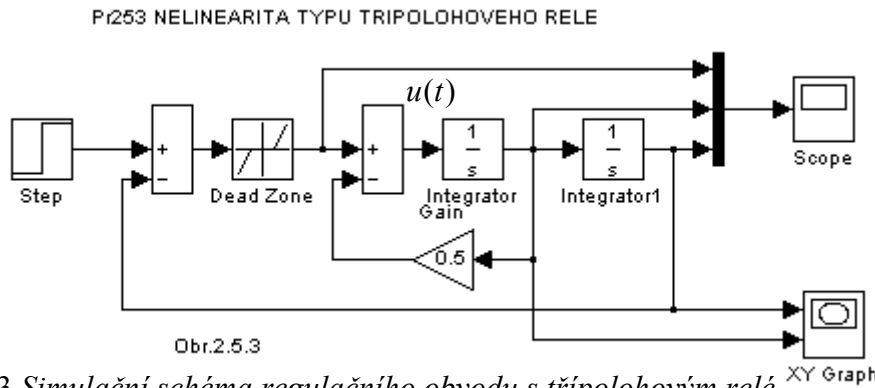
Konec příkladu

Z průběhu fázové trajektorie je vidět, že obvod je stabilní.

Příklad 2.5.3

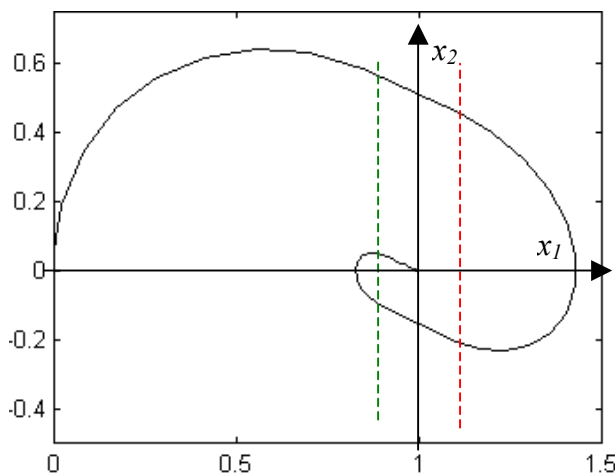
Nakreslete simulační schéma regulačního obvodu s třípolohovým relé a průběh trajektorie ve fázové rovině včetně časového průběhu regulačních pochodů soustavy s přenosem $F=1/s(s+0,5)$. Uvažujme skok žadané hodnoty a pásmo necitlivosti je v intervalu $\langle -0,1; 0,1 \rangle$.

Řešení: Simulační schéma je na obr.2.5.3, trajektorie ve fázové rovině na obr.2.5.3a.

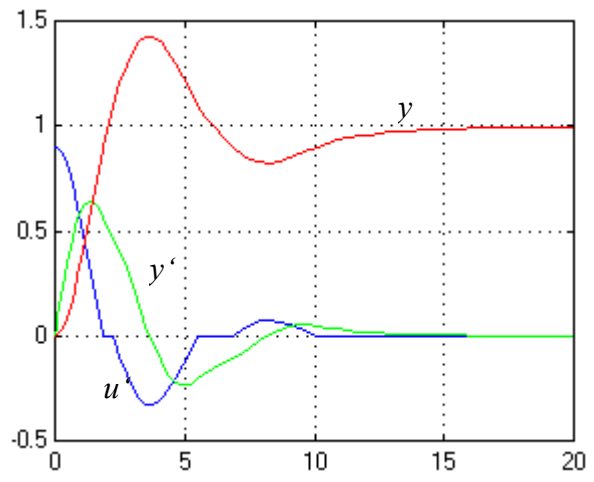


Obr.2.5.3 Simulační schéma regulačního obvodu s třípolohovým relé

Průběh fázové trajektorie a regulačních pochodů v čase včetně derivace výstupního signálu a akční veličiny je na obr.2.5.3a,b. Z obrázků je zřejmá stabilizace obvodu. Zajímavý je také průběh akční veličiny $u(t)$. Výsledky jsou v souladu s naším očekáváním.



Obr.2.5.3a Fázové trajektorie



Obr.2.5.3b Regulační pochody v čase

Konec příkladu

V této kapitole byly studenti seznámeni s elementárními možnostmi a bloky SIMULINKu pro simulaci nelineárních systémů s nelineárními prvky. Je třeba upozornit, že tyto bloky umožňují definovat i vícerozměrové výstupy. Složitější aplikace jistě vyžadují hlubší studium manuálů viz /10/ a dalších toolboxů.

3. STABILITA NELINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

Stabilita nelineárních systémů se zásadním způsobem liší od stability lineárních systémů. Stabilita lineárních systémů je definována jako schopnost systému vrátit se do rovnovážného stavu, jestliže přestane působit příčina, která vychýlení z rovnovážného stavu způsobila. Je vlastností pouze systému a nezávisí na počátečních podmínkách. Rovnovážný stav je pouze jeden a to v počátku souřadnic.

Z předcházejících kapitol je již známo, že nelineární systém může mít několik rovnovážných stavů a i mezní cykly. Je zřejmé, že definice stability lineárních systémů nevyhovuje požadavkům nelineárních systémů a je proto nutno ji nově zformulovat. Základní práce a přístupy ke stabilitě nelineárních systémů zformuloval ruský matematik A. M. Ljapunov.

3.1 ZÁKLADNÍ DEFINICE STABILITY VOLNÉHO SYSTÉMU

Z velkého počtu definic stability ve stavovém prostoru budou uvedeny pouze nejdůležitější. Uvažujme autonomní, časově invariantní systém ve tvaru

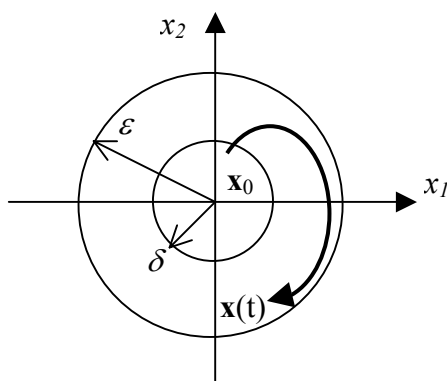
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}); \text{ pro } t_0 = 0 \text{ píšeme } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.1 - 1)$$

kde $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ je počáteční vektor. Do počátku souřadnic $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ je možno transformovat vyšetřované rovnovážné stavy.

Definice 1. Stabilita ve smyslu Ljapunovova-stabilita v malém: Rovnovážný stav $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ autonomního systému (3.1 – 1) je stabilní ve smyslu Ljapunova, jestliže pro každé reálné číslo $\varepsilon. > 0$ existuje reálné číslo $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, že při $\|\mathbf{x}(0)\| \leq \delta(\varepsilon)$ je splněna podmínka $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \varepsilon$ pro $t > 0$.

Euklidova norma je definována délkou vektoru stavu $\mathbf{x}(t)$ (vzdáleností od počátku)

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i(t)^2}. \quad (3.1 - 2)$$



Tato definice říká, že rovnovážný stav je stabilní, jestliže po malém vychýlení z tohoto stavu, zůstane trajektorie systému v ε -okolí rovnovážného stavu viz obr.3.1. Jinými slovy, jestliže zvolím ε -okolí pro které existuje δ -okolí, ze kterého vyberu počáteční stav \mathbf{x}_0 a trajektorie systému zůstane pro $t > 0$ v ε -okolí, pak systém je Ljapunovsky stabilní. Tato definice nepožaduje, aby pro $t \rightarrow \infty$ bylo dosaženo rovnovážného stavu ale pouze aby setrvala dostatečně blízko. Protože oblast počátečních podmínek δ -okolí musí být malá, označujeme tuto stabilitu jako **lokální** nebo **stabilitu v malém**.

Obr.3.1 Oblast stability

Definice 2. Asymptotická stabilita: Rovnovážný stav $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ autonomního systému (3.1 – 1) je asymptoticky stabilní, je-li stabilní ve smyslu definice 1 a jestliže všechny trajektorie, které jsou dostatečně blízké rovnovážnému stavu konvergují do bodu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pro $t \rightarrow \infty$.

Myšlenku stability v Ljapunovově smyslu vysvětlíme na jednoduchém příkladě. Předpokládáme, že nelineární systém je popsán rovnicí (3.1 – 1) a že počáteční vychýlení z rovnovážného stavu je \mathbf{x}_0 . Vyjádříme-li v libovolném okamžiku t vzdálenost bodu trajektorie $\mathbf{x}(t)$ od počátku souřadnic stavového prostoru, pak tato je rovna výrazu

$$r(t) = \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)\| = \sqrt{x_1(t, \mathbf{x}_0)^2 + x_2(t, \mathbf{x}_0)^2 + \dots + x_n(t, \mathbf{x}_0)^2}, \text{ pro } t > 0. \quad (3.1 - 3)$$

Skutečnost, že se vzdálenost $r(t)$ s rostoucím časem zvětšuje nebo zmenšuje, poskytuje informace o tom, zda se trajektorie vzdaluje nebo přibližuje k rovnovážnému stavu. Aby se trajektorie přibližovala k rovnovážnému stavu, je třeba aby derivace funkce $r(t)$ byla klesající nebo alespoň nerostoucí. Musí tedy být splněna podmínka

$$\frac{d}{dt} r(t) \leq 0, \text{ pro } t > 0. \quad (3.1 - 4)$$

Dosazením (3.1 – 3) do (3.1 – 4) dostaneme

$$\frac{d}{dt} r(t) = \frac{x_1(t, \mathbf{x}_0) \cdot dx_1 / dt + x_2(t, \mathbf{x}_0) \cdot dx_2 / dt + \dots + x_n(t, \mathbf{x}_0) \cdot dx_n / dt}{\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)\|} \leq 0$$

Dosazením za $dx_i / dt = f_i(\mathbf{x})$ do (3.1 – 4) dostaneme

$$\frac{d}{dt} r(t) = \frac{x_1 \cdot f_1(\mathbf{x}) + x_2 \cdot f_2(\mathbf{x}) + \dots + x_n \cdot f_n(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)\|} \leq 0. \quad (3.1 - 5)$$

Nerovnost (3.1 – 5) je v našem případě speciální podmínkou stability a její zvláštnost spočívá v požadavku, aby se vzdálenost od počátku zmenšovala nebo alespoň neztvětšovala. Její aplikaci ukážeme na následujícím příkladě.

Příklad 3.1

Rozhodněte o stabilitě dynamického systému jehož stavové rovnice jsou:

$$\dot{x}_1 = -ax_2 - b^2 x_1^5 = f_1(\mathbf{x})$$

$$\dot{x}_2 = +ax_1 - c^2 x_2^5 = f_2(\mathbf{x}).$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} r(t) &= \frac{x_1 \cdot f_1(\mathbf{x}) + x_2 \cdot f_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \cdot [x_1(-ax_2 - b^2 x_1^5) + x_2(+ax_1 - c^2 x_2^5)] = \\ &= -\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \cdot [b^2 x_1^6 + c^2 x_2^6] < 0 \quad \text{pro libovolný vektor } \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Protože funkce $r(t)$ je klesající funkce ($\dot{r}(t) < 0$, norma $\|\mathbf{x}\| > 0$, čitatel je v sudých mocninách), pak pro $t \rightarrow \infty$ je $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}\| = 0$ a je možno učinit závěr, že nelineární systém je

asymptoticky stabilní. Dále je z tohoto příkladu vidět, že norma ve jmenovateli neposkytuje informaci o stabilitě, protože je vždy kladná.

Konec příkladu

Na uvedeném speciálním příkladě byla funkce $r(t)$ definována jako Euklidovská norma stavového vektoru \mathbf{x} . Takto zvolenou funkcí může být ověřována stabilita v počátku jen těch nelineárních systémů, jejichž stavová trajektorie se blíží k rovnovážnému bodu monotónně pro $t > 0$.

Je známo, viz kap.2.3, že stabilní uzel nebo ohnisko jsou asymptoticky stabilní, ale jejich zastupující bod fázové trajektorie se neblíží k rovnovážnému stavu monotónně, ale po eliptické spirále (postupně se přibližuje a vzdaluje). Je tedy zřejmé, že naznačený postup principiálně splňuje naše požadavky ale je třeba volit nějakou jinou, vhodnější funkci $V(\mathbf{x})$ než je Euklidova norma $r(\mathbf{x})$ - vzdálenost od počátku.

Spojitou funkce $V(\mathbf{x}) = V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je třeba volit nebo hledat takovou, aby její derivace podle času pro stabilní rovnovážný bod byly funkce monotónně klesající, pro všechny počáteční vektory \mathbf{x}_0 . Takovou funkci pak nazýváme Ljapunovovu funkci a tato metoda je nazývána přímou Ljapunovova metoda.

3.2 PŘÍMÁ LJAPUNOVOVA METODA

Přímá Ljapunovova metoda umožňuje rozhodnout o stabilitě systému v malém i ve velikém v případě, že *bude nalezena vhodná Ljapunovova funkce* $V(\mathbf{x}) = V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, která splňuje předepsané podmínky. Podle vlastností této funkce a její derivace podle času pak posuzujeme stabilitu rovnovážného stavu kolem počátku. Derivace podle času je rovna

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}) = \frac{dV(x_1, x_2, \dots, x_n)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} \dots$$

Dosadím-li do této rovnosti za dx_i/dt z (2.2 – 1) pak dostaneme

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot f_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \cdot f_n. \quad (3.3 - 1)$$

Formulace Ljapunovových vět o stabilitě v nejjednodušším tvaru jsou uvedena v následujících teorémech.

Teorém 1. Stabilita v malém: Uvažujme dynamický systém $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Jestliže lze najít skalární funkci $V(\mathbf{x})$ takovou, že pro každé reálné číslo $\varepsilon > 0$ a pro všechna \mathbf{x} z oblasti $\|\mathbf{x}\| < \varepsilon$ splňuje podmínky

- a) $V(\mathbf{x}) > 0$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- b) $V(\mathbf{0}) = 0$
- c) Má spojité parciální derivace
- d) $\frac{dV}{dt} \leq 0$,

pak systém je **stabilní kolem počátku**.

Teorém 2. Asymptotická stabilita: Jsou-li splněny podmínky Teorému 1 a podmínka d) se nahradí podmínkou $\frac{dV}{dt} < 0$, (dV/dt je negativně definitní skalární funkce), pak systém je *asymptoticky stabilní (v počátku)*.

Teorém 3. Asymptotická stabilita v definované oblasti. Jsou-li splněny podmínky Teorému 2 v nějaké uzavřené oblasti Ω , pak je systém asymptoticky stabilní v oblasti Ω .

Teorém 4: Asymptotická stabilita ve velkém - globální: Jsou-li splněny podmínky Teorému 2 a platí-li ještě podmínka $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$, jestliže $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$, pak je systém *asymptoticky stabilní (v počátku) ve velkém*.

Příklad 3.2

Uvažujme nelineární systém, který je popsán rovnicemi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -(x_1 - 2x_2)(1 - x_1^2 - 3x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -(x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - 3x_2^2).\end{aligned}$$

Úkol: určete oblast ve které je nelineární systém stabilní v počátku.

Řešení:

- 1) Zvolíme za Ljapunovovu funkci skalární funkci ve tvaru

$$V(x_1, x_2) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2; \quad a_1, a_2 > 0$$

Je možno se přesvědčit, že tato funkce splňuje podmínky a), b), c) Teorému 1. Koeficienty a_1, a_2 nejsou zatím určeny.

- 2) Derivací podle času dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= 2a_1 x_1 \dot{x}_1 + 2a_2 x_2 \dot{x}_2 = 2a_1 x_1 \left[-(x_1 - 2x_2)(1 - x_1^2 - 3x_2^2) \right] + 2a_2 x_2 \left[-(x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - 3x_2^2) \right] = \\ &= -2(1 - x_1^2 - 3x_2^2) \left[a_1 x_1^2 - 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_2 x_1 x_2 \right]\end{aligned}$$

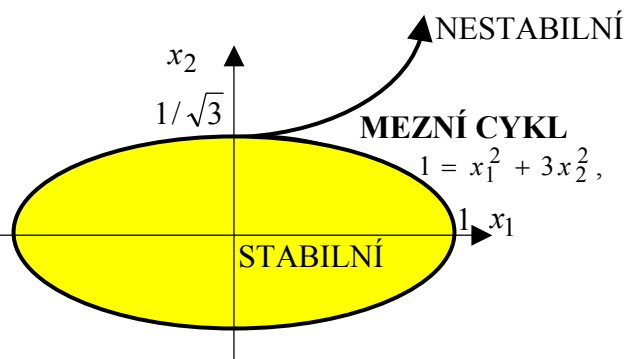
Jestliže zvolíme koeficient $a_2 = 2a_1$, pak se členy se součinem $x_1 \cdot x_2$ v hranaté závorce vykrátí. Derivace Ljapunovovy podle času je rovna

$$\frac{dV}{dt} = -2(1 - x_1^2 - 3x_2^2) [a_1 x_1^2 + 2a_1 x_2^2]$$

a) V oblasti, která je definována nerovností

$$1 > x_1^2 + 3x_2^2,$$

(což je elipsa s poloosou 1 na souřadnici x_1 a poloosou $1/\sqrt{3}$ na souřadnici x_2), je systém vzhledem k počátku souřadnic



Obr.3.2 Oblast stability

asymptoticky stabilní (negativně definitní funkce) viz obr.3.

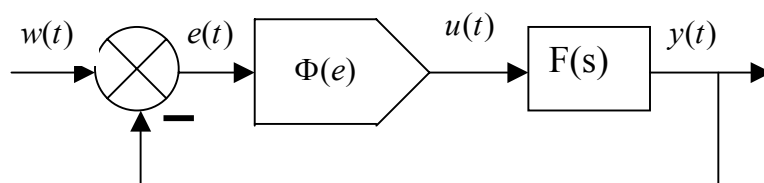
b) V oblasti, která je definována nerovností $1 < x_1^2 + 3x_2^2$, je naopak systém nestabilní.

c) Mezní nestabilní cykl je definován rovností $1 = x_1^2 + 3x_2^2$,

Konec příkladu

3.3 POPOVOVO KRITERIUM STABILITY

V roce 1959 bylo publikováno V. M. Popovem nové kritérium stability nelineárních systémů. Nelineární systém byl rozdělen na lineární a nelineární část viz obr.3.3. Popovovo



Obr.3.3 Struktura nelineárního obvodu

kritérium je výhodné pro praxi, protože využívá jednoduše modifikovaných frekvenčních charakteristik lineární části obvodu. Kritérium bylo rozpracováno dalšími autory pro obvody se spojitými i nespojitými, s časově proměnnými nelinearitami a i pro obvody s větším počtem nelinearit. V našem výkladu se omezíme na nelineární autonomní obvody s jednou časově invariantní nelinearitou, (která je definována její statickou charakteristikou) a s lineární částí, která je aproximována obrazovým přenosem $F(s)$.

a) **Vlastnosti nelinearity $\Phi(e)$**

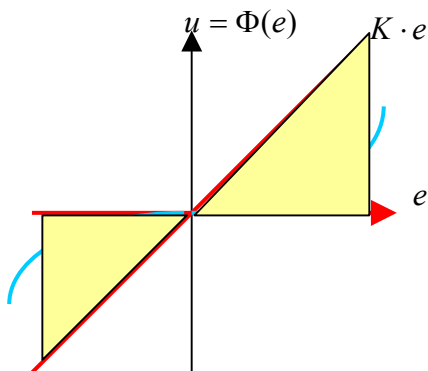
Statická charakteristika nelinearity $\Phi(e)$ splňuje tyto podmínky:

$$1) \quad \Phi(e) = 0 \text{ pro } e = 0, \quad (3.3 - 1)$$

$$2) \quad 0 \leq \frac{\Phi(e)}{e} \leq K, \quad (3.3 - 2)$$

kde $0 \leq K \leq \infty$ a K je směrnice přímky, pod kterou leží statická charakteristika nelinearity.

Podmínkami (3.3 – 1,2) je definována celá třída nelinearit, které leží v prvním a třetím kvadrátu statické charakteristiky viz obr.3.4 a jsou ohraničeny osami a přímkou procházející počátkem se směrnici K .



Je třeba zdůraznit, že pomocí Popovova kritéria je vyšetřována stabilita nelineárního autonomního systému pro obecnou nelinearitu – třídu nelinearit, které jsou definovány podmínkami (3.3 – 1,2). Toto je velká výhoda, protože v provozech technická zařízení pomalu stárnou a není často možno nelineární charakteristiky přesně určit.

Přímka $K \cdot e$, která spolu s osou „ e “ tvoří segment, ve kterém musí ležet třída nelinearit, určuje maximální přípustné zesílení akční veličiny pro dané „ e “.

Má-li přenos $F(s)$ póly na imaginární ose, je nutno podmínku (3.3 – 2) upravit do tvaru $0 < \frac{\Phi(e)}{e} \leq K$

Obr.3.4 Přípustné segmenty

b) Popovovo kritérium stability

Teorém 5. Popovovo kritérium stability: Nelineární systém dle obr.3, jehož lineární část $F(s)$ má všechny póly v levé části Gaussovy roviny a nelinearita vyhovuje podmínce (3.3 – 1) je asymptoticky stabilní ve velkém, existuje-li reálné číslo q , při němž je pro všechny $\omega \geq 0$ splněna nerovnost

$$\operatorname{Re}[(1 + i\omega q) \cdot F(i\omega)] + \frac{1}{K} > 0. \quad (3.3 - 3)$$

Podmínka (3.3 – 3) je podmínkou postačující, nikoliv nutnou. Analytické řešení nerovnosti je téměř nemožné a numerické řešení je také velmi obtížné. Je možno však ukázat grafickou interpretaci tohoto kritéria, které pak získává podobu frekvenčních kritérií.

c) Grafická formulace Popovova kritéria v komplexní rovině

Rozepíšeme-li nerovnost (3.3 – 3) dostaneme

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[(1 + i\omega q) \cdot F(i\omega)] &= \operatorname{Re}\{(1 + i\omega q) \cdot [\operatorname{Re}\{F(i\omega)\} + i\operatorname{Im}\{F(i\omega)\}]\} = \\ &= \operatorname{Re}[\operatorname{Re}\{F(i\omega)\} + i\omega q \cdot \operatorname{Re}\{F(i\omega)\} + i\operatorname{Im}\{F(i\omega)\} - \omega q \cdot \operatorname{Im}\{F(i\omega)\}] = \\ &= \operatorname{Re}\{F(i\omega)\} - \omega q \cdot \operatorname{Im}\{F(i\omega)\} = X - qY, \end{aligned}$$

kde $X = X(\omega) = \operatorname{Re}\{F(i\omega)\}$ (3.3 – 4)

a

$$Y = Y(\omega) = \omega \cdot \operatorname{Im}\{F(i\omega)\}. \quad (3.3 - 5)$$

Nerovnost (3.3 – 3) pak je ve tvaru

$$X - qY + \frac{1}{K} > 0. \quad (3.3 - 6)$$

Rovnice

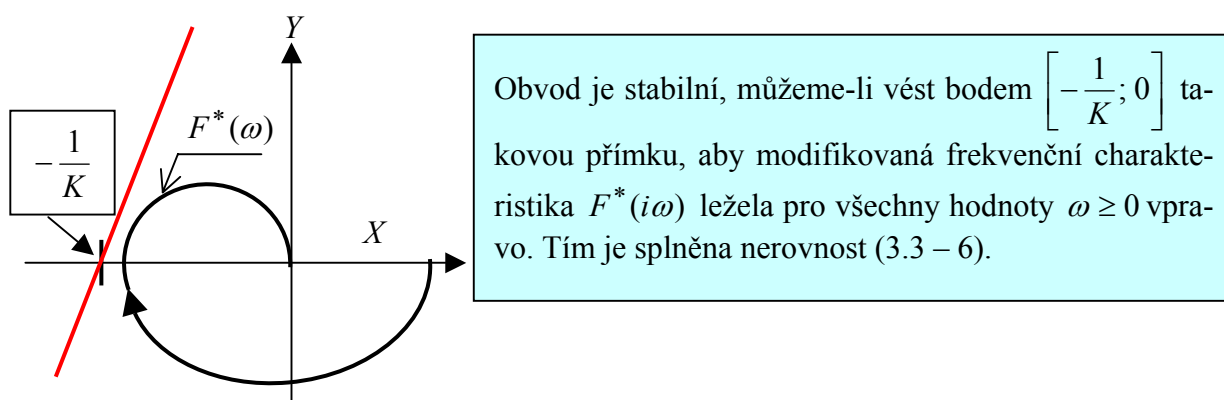
$$X - qY + \frac{1}{K} = 0 \rightarrow Y = \frac{1}{q}X + \frac{1}{qK}, \quad (3.3 - 7)$$

je rovnicí přímky tzv. **Popovovy přímky** v souřadnicích X, Y , která prochází bodem $-1/K$ na reálné ose a má sklon $1/q$. Nerovnost (3.3 – 6) říká, že pro každé $\omega \geq 0$ musí $X(\omega), Y(\omega)$ ležet vpravo od této přímky.

Vlastní rozhodování o stabilitě spočívá v nakreslení tzv. **modifikované frekvenční charakteristiky**

$$F^*(i\omega) = X(\omega) + iY(\omega). \quad (3.3 - 8)$$

Reálná část modifikované frekvenční charakteristiky $X(\omega)$ je stejná jako u $F(i\omega)$ a imaginární část $Y(\omega)$ je rovna imaginární části frekvenční charakteristiky $F(i\omega)$ s tím, že je násobena frekvencí ω viz obr. 3.5.



Obr. 3.5 Popovova přímka a $F^*(\omega)$

Příklad 3.3

Uvažujme nelineární obvod dle obr.3.3 s nelinearitou dle obr.3.4. Lineární část má obrazový přenos $F(s)$ ve tvaru

$$F(s) = \frac{1}{(s^3 + 2s^2 + s + 1)s}.$$

Určete, pro jaké K je tento nelineární obvod stabilní, jestliže obecná nelineární funkce $\Phi(e)$ leží v I. a ve III. kvadrátu.

Řešení: Reálná a imaginární část frekvenční charakteristiky je rovna

$$X(\omega) = \operatorname{Re}\{F(i\omega)\} = \frac{(\omega^2 - 1)}{\omega^2(\omega^2 - 1)^2 + (1 - 2\omega)^2}, \quad \operatorname{Im}\{F(i\omega)\} = \frac{-(1 - 2\omega)}{\omega \cdot [\omega^2(\omega^2 - 1)^2 + (1 - 2\omega)^2]}.$$

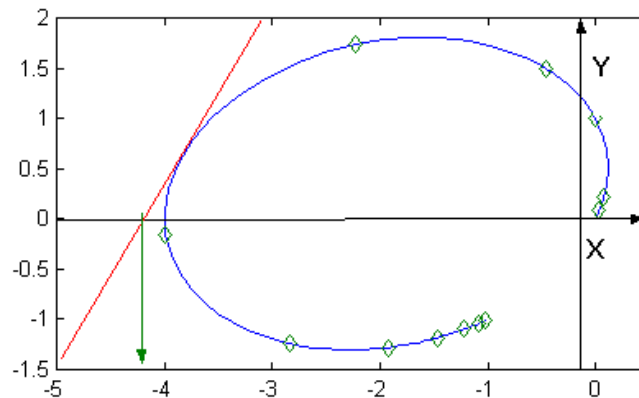
Funkce $Y(\omega)$ je rovna

$$Y(\omega) = \omega \cdot \operatorname{Im}\{F(i\omega)\} = \frac{-(1-2\omega)}{[\omega^2(\omega^2-1)^2 + (1-2\omega)^2]}.$$

Pro zvolené hodnoty ω jsou vypočítané hodnoty funkcí $X(\omega)$, $\operatorname{Im}\{F(i\omega)\}$ a $Y(\omega)$ uvedeny v tab.3.1. Výpočet byl proveden pomocí programu **zpr6.m**, jehož výpis je součástí výkladu. Modifikovaná frekvenční charakteristika lineární části je na obr.3.5.

w	X	Im{F}	Y
0,1	-1,02	-10,101	-1,0101
0,2	-1,09	-5,207956	-1,04159
0,3	-1,22	-3,659429	-1,09783
0,4	-1,46	-2,955001	-1,182
0,5	-1,92	-2,56	-1,28
0,6	-2,83	-2,066213	-1,23973
0,7	-3,99	-0,223478	-0,15643
0,8	-2,23	2,169278	1,735422
0,9	-0,46	1,665427	1,498884
1	0	1	1
1,5	0,079	0,148001	0,222002
2	0,035	0,041176	0,082353

Tab. 3.1



Obr.3.5 Modifikovaná frekvenční charakteristika



zpr6.m

```
clear all
close all
%F=tf([10],[8 12 6 1 0]);
F=tf([1],[1 2 1 1 0]);
wP=[0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1 1.5 2];
[REP,IMP]=nyquist(F,wP);
for k=1:length(IMP);
    YP(k)=wP(k)*IMP(:, :, k);
    XP(k)=REP(:, :, k);
end

w=0.1:0.01:10;
[RE,IM]=nyquist(F,w);
for k=1:length(IM);
    Y(k)=w(k)*IM(:, :, k);
    X(k)=RE(:, :, k);
end
plot(X,Y,XP,YP, 'd')
```

Z obr.3.5 vyplývá, že je možno bodem -4,2 na reálné ose vésti přímku tak, že modifikovaná frekvenční charakteristika leží pro všechna $\omega \geq 0$ vpravo od této přímky. Směrnice přímky splňuje rovnici

$$-\frac{1}{K} = -4,2 \rightarrow K = 1/4,2.$$

Konec příkladu

LITERATURA

- [1] Balda, M.-Hanuš, B., a kolektiv : Základy technické kybernetiky. SNTL/ALFA Praha 1986
- [2] Hanuš, B., Balátě, J., Švarc, I., Zikeš, F.: Teorie automatického řízení I. I.část. Skripta Liberec, 1982
- [3] Kotek, Z., Kubík, S., Razim, M.: Nelineární dynamické systémy. SNTL/ALFA Praha 1973
- [4] Kubík, S., Kotek, Z., Strejc, V., Štecha J.: Teorie automatického řízení I. Nelineární a nelineární systémy. SNTL, Praha 1982
- [5] Razim M., Štecha J.: Nelineární systémy. Skripta, ČVUT Praha, 1997
- [6] Isidori, A.: Nonlinear Control Systems. 3.vyd., Springer Verlag, Berlin 1995
- [7] Henson, M. A., Seborg, D., E.: Nonlinear Process Control. Prentice-Hall, Inc 1997
- [8] Modrlák, O.: Theory of Control I. (Continuous systems). Skripta, Liberec, 1994.
- [9] Gulley, N., Jang, R.: Fuzzy Logic Toolbox. For Use with MATLAB. The Math Works, Inc. 1995
- [10] Grace, A., Laub, J.A., Little, J.N., Thompson, C.M.: Control System Toolbox. For Use with MATLAB. User's Guide. The Math Works, Inc. 1995
- [11] Vysoký, P.: Fuzzy řízení. Skripta, ČVUT Praha, 1997
- [12] Passino, K., M., Yurkovich, S.: Fuzzy Control. Addison Wesley Longman, Inc., Menlo Park, California, 1998
- [13] Kubík, S., Kotek, Z., Hrušák, J., Wachtj, J., Chalupa, V.: Optimální systémy automatického řízení. SNTL Praha 1972