Regulace a řízení II

Ing. Pavel Václavek, Ph.D.

Obsah

Cíl předmětu

- Seznámení s vlastnostmi nelineárních systémů
- Možnosti řízení nelineárních systémů
- Pokročilé metody řízení
  - Řízení v klouzavém režimu
  - Časově optimální reléové řízení

1. Opakování, stavový popis lineárních dynamických systémů
2. Popis nelineárních systémů, podstatné rozdíly mezi lineárními a nelineárními systémy, základní nelinearity, linearizace
3. Stavová trajektorie nelineárních systémů, rovnovážné stavy, typické stavové trajektorie systémů prvního a druhého řádu
4. Fázová trajektorie, určení času na fázové trajektorii, indexové teorémy existence mezního cyklu
5. Harmonická linearizace, metoda harmonické rovnováhy
6. Stabilita nelineárních systémů, možnosti pojetí stability nelineárních systémů

Náplň přednášek

7. Ljapunovova metoda určení stability
8. Popovovo kritérium stability, věty o nestabilitě. Lineární řízení nelineárních systémů, wind-up jev.
9. Lineární řízení nelineárních systémů - gain scheduling, zpětnovazební linearizace
10. Reléové systémy - polohový servomechanismus, systémy s proměnnou strukturou, časově optimální reléové řízení. Řešitelnost soustavy nelineárních diferenciálních rovnic
11. Identifikace dynamických systémů
12. Rezerva, zopakování vybraných částí BRR2

Literatura

- Šolc,Václavek,Vavřín: Regulace a řízení II, ET FEKT, 2005
- Razim, Štecha: Nelineární systémy, skripta ČVUT, 1997
- Khalil:Nonlinear Systems, Prentice-Hall, 1996

Podmínky zkoušky a zápočtu

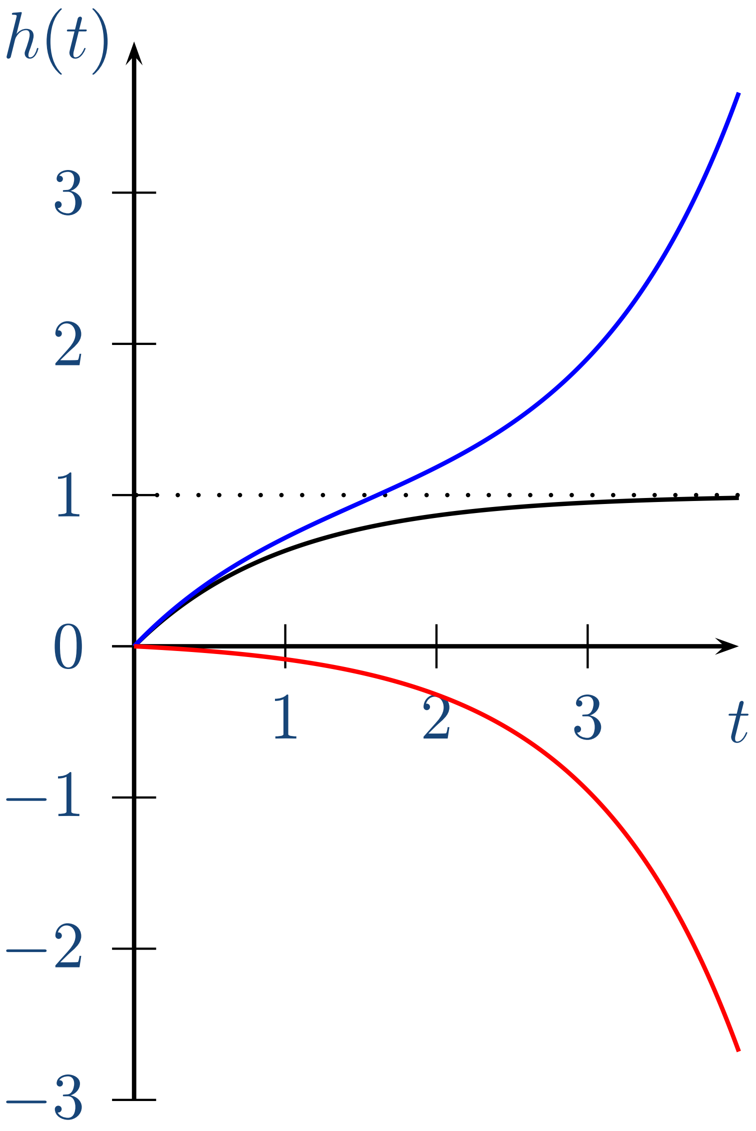
- 70 bodů písemná zkouška + 30 bodů cvičení
- 3 projekty
  - 2 na počítačovém cvičení
  - 1 na numerickém cvičení
  - 6 bodů řešení na cvičení + 4 body vypracování dokumentace
- Podmínky zápočtu
  - účast na cvičeních
  - získání alespoň 10 bodů ze cvičení

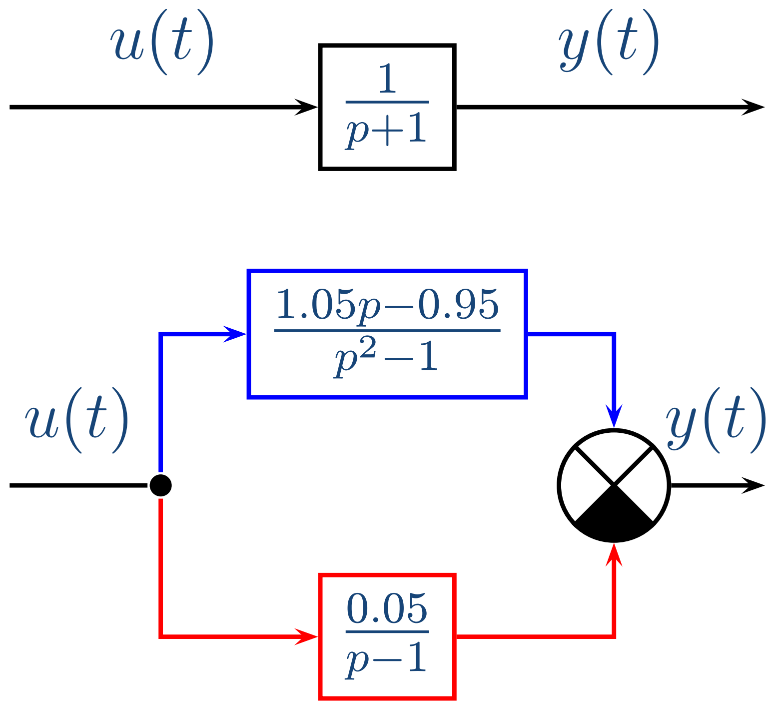
Stavový popis lineárních dynamických systémů

Vnější popis

- Popisuje závislost mezi vstupem a výstupem systému
- Nezohledňuje vnitřní strukturu ani děje uvnitř systému
- Způsoby popisu
  - diferenciální rovnice
  - operátorový přenos
  - frekvenční přenos
  - frekvenční charakteristika
  - přechodová charakteristika, impulsová charakteristika

Vnější popis





- systém je stabilní z vnějšího pohledu
- je složen ze dvou nestabilních systémů
- potřeba zkoumat i vnitřní strukturu

Každou lineární diferenciální rovnici n-tého řádu lze zapsat jako soustavu lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + b_{12}u_2(t) + \ldots + b_{1m}u_m(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) + b_{21}u_1(t) + b_{22}u_2(t) + \ldots + b_{2m}u_m(t)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) + b_{n1}u_1(t) + b_{n2}u_2(t) + \ldots + b_{nm}u_m(t)$$

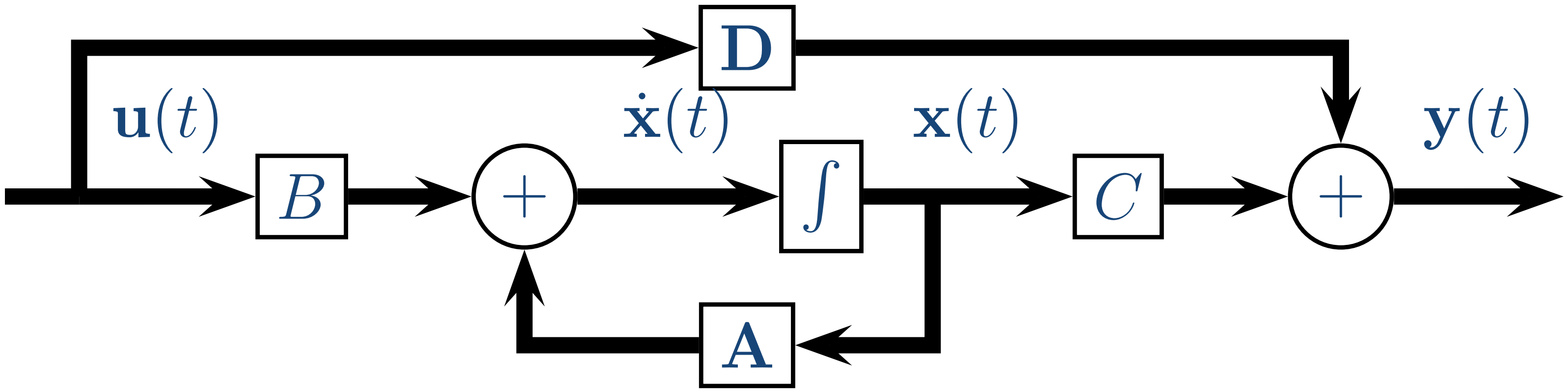
$$y_1(t) = c_{11}x_1(t) + c_{12}x_2(t) + \ldots + c_{1n}x_n(t) + d_{11}u_1(t) + d_{12}u_2(t) + \ldots + d_{1m}u_m(t)$$
$$y_2(t) = c_{21}x_1(t) + c_{22}x_2(t) + \ldots + c_{2n}x_n(t) + d_{21}u_1(t) + d_{22}u_2(t) + \ldots + d_{2m}u_m(t)$$
$$\vdots$$
$$y_r(t) = c_{r1}x_1(t) + c_{r2}x_2(t) + \ldots + c_{rn}x_n(t) + d_{r1}u_1(t) + d_{r2}u_2(t) + \ldots + d_{rm}u_m(t)$$

kde n je řád systému (počet stavových proměnných), m počet vstupů systému, r počet výstupů systému

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \dots & d_{rm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned}\right\} \text{stavové rovnice}$$

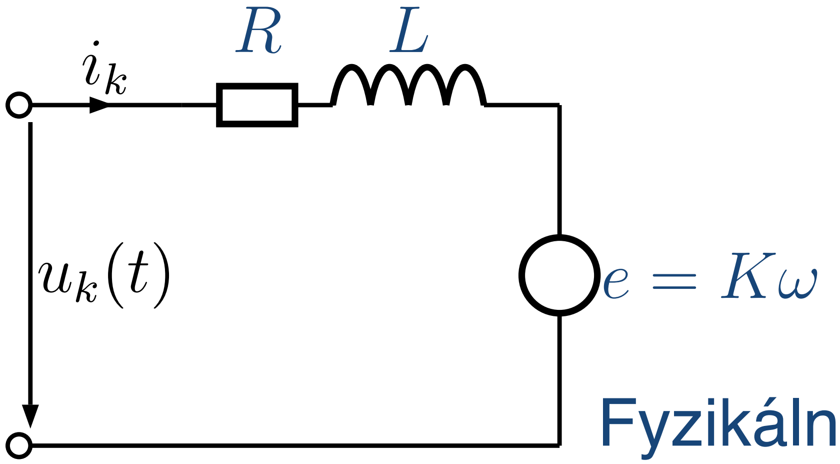


$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

- $\mathbf{A}$ - matice vnitřních vazeb systému (matice zpětných vazeb). Rozměr $n \times n$
- $\mathbf{B}$-matice vazeb systému na vstup (vstupní matice). Rozměr $n \times m$
- $\mathbf{C}$ - matice vazeb výstupu na stav (výstupní matice). Rozměr $r \times n$
- $\mathbf{D}$ - matice vazeb výstupu na vstup (matice přímých vazeb). V řadě případů je nulová. Rozměr $r \times m$

Sestavení stavového popisu

Stejnosměrný motor s permanentními magnety



Fyzikální vztahy

$$u_k = Ri_k + L\frac{\mathrm{d}i_k}{\mathrm{d}t} + K_e\omega$$

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = K_m i_k - M_z$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega$$

Sestavení stavového popisu

Zvolíme stavové proměnné $x_1 = i_k$, $x_2 = \varphi$, $x_3 = \omega$ a dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{K_e}{L}x_3(t) + \frac{1}{L}u_k(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= \frac{K_m}{J}x_1(t) - \frac{1}{J}M_z(t) \end{aligned}$$

Zvolíme $u_1(t) = u_k(t)$, $u_2(t) = M_z(t)$, $y(t) = x_2(t) = \varphi(t)$.
Matice stavového popisu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & 0 & \frac{-K_e}{L} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_m}{J} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{J} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = 0$$

Vnitřní → vnější

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Laplaceova transformace

$$p\mathbf{X}(p) = \mathbf{A}\mathbf{X}(p) + \mathbf{B}\mathbf{U}(p) \quad \mathbf{Y}(p) = \mathbf{C}\mathbf{X}(p) + \mathbf{D}\mathbf{U}(p)$$

$$\mathbf{Y}(p) = \left[\mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}(p) =$$

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A})}\mathbf{C}\,\mathrm{adj}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]}_{\mathbf{F}(p)}\mathbf{U}(p)$$

$$\mathbf{F}(p) = \begin{bmatrix} F_{11}(p) & F_{12}(p) & \dots & F_{1m}(p) \\ F_{21}(p) & F_{22}(p) & \dots & F_{2m}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{r1}(p) & F_{r2}(p) & \dots & F_{rm}(p) \end{bmatrix}$$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}$$

Frobeniův kanonický tvar

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (b_0 - a_0 b_n) & (b_1 - a_1 b_n) & \ldots & (b_{n-1} - a_{n-1} b_n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = [b_n]$$

Paralelní programování

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_1}{p + a_1} + \frac{b_2}{p + a_2} + \ldots + \frac{b_k}{p^2 + a_{k-1}p + a_k} + \frac{b_n}{p + a_n}$$

Jordanův kanonický tvar

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_{k-1} & -a_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -a_n \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & 0 & b_k & b_n \end{bmatrix} \mathbf{D} = [0]$$

Seriové programování

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_0 (p + b_1)(p + b_2) \dots (p + b_m)}{(p + a_1)(p + a_2) \dots (p + a_n)}$$

Kaskádní řazení

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & (b_2 - a_2) & (b_3 - a_3) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & (b_3 - a_3) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-m} & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_n \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{m=n}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{m<n}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} b_0 (b_1 - a_1) & b_0 (b_2 - a_2) & b_0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{D} = [b_0]_{n=m}, [0]_{m<n}$$

Stabilita spojitých lineárních systémů

- Lineární systém je stabilní tehdy, jestliže po skončení působení vstupního signálu a po skončení přechodného děje se výstup vrátí na původní hodnotu, kterou měl před začátkem působení vstupu
  - systém se vrátí k původní hodnotě , stabilní
  - výstup systému monotónně nebo kmitavě roste nade všechny meze , nestabilní
  - výstup systému se ustálí v novém ustáleném stavu , neutrální systémy, na mezi stability, většinou je řadíme mezi nestabilní
- Lineární systém je stabilní tehdy, jestliže na omezený vstupní signál odpoví omezeným výstupním signálem

Vyšetření stability

- analyticky
  - kořeny polynomu ve jmenovateli přenosové funkce leží v levé polorovině - stabilní systém
  - nelze obecně pro systémy většího než 3 řádu
- algebraická kriteria stability
  - Hurwitzovo kriterium
  - Routh-Schurovo kriterium

Stavové rovnice

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \overset{\mathbf{C}=\mathbf{I}}{\Rightarrow} \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{F}(p) = \left[\frac{1}{\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A})}\mathbf{C}\,\mathrm{adj}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]$$

$$\mathbf{F}(p)_{\mathbf{C}=\mathbf{I}} = \left[\frac{1}{\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A})}\mathrm{adj}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]$$

jmenovatel přenosu

Stabilita stavu

- Stabilita určena charakteristickým polynomem $\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A})$
- Charakteristická rovnice $\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$
  - kořeny odpovídají vlastním číslům matice $\mathbf{A}$
  - stav systému je stabilní, pokud jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ v levé polorovině
- Stabilita stavu je určena výhradně maticí systému $\mathbf{A}$
- Může nastat situace, kdy je výstup stabilní a stav nestabilní

Nyquistovo kritérium

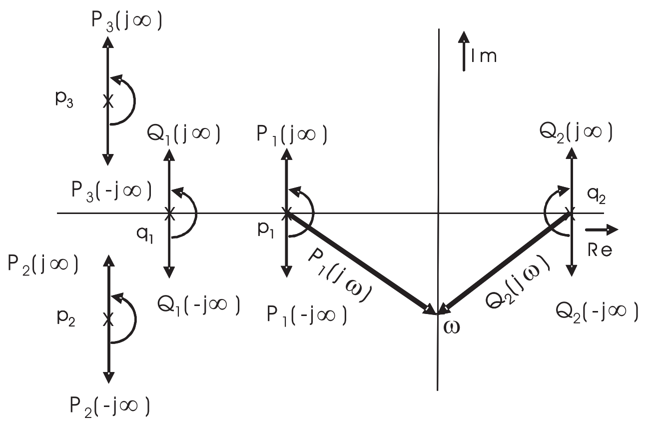
Stabilita uzavřené smyčky

- přenos otevřené smyčky $F_0\left(p\right)=\frac{M(p)}{N(p)}$
- přenos uzavřené smyčky $F\left(p\right)=\frac{F_0(p)}{1+F_0(p)}$
- charakteristická rovnice
  $$1+F_0\left(p\right)=1+\frac{M(p)}{N(p)}=\frac{N(p)+M(p)}{N(p)}=\frac{A(p)}{N(p)}=0$$
  $$A\left(p\right)=a_n\left(p-p_1\right)\left(p-p_2\right)\left(p-p_3\right)\ldots\left(p-p_n\right)$$
  $$N\left(p\right)=c_n\left(p-q_1\right)\left(p-q_2\right)\left(p-q_3\right)\ldots\left(p-q_n\right)$$
- Polynomy $A(p)$ a $N(p)$ jsou stejného stupně
  - vyplývá z fyzikální realizovatelnosti, polynom $M(p)$ nemůže být vyššího stupně než $N(p)$
- Pro stabilní systém musí body p_i ležet v levé polorovině, body q_i mohou ležet kdekoliv , otevřená smyčka může být nestabilní

Stabilita uzavřené smyčky

$$A\left(j\omega\right) = a_n\left(j\omega - p_1\right)\left(j\omega - p_2\right)\left(j\omega - p_3\right)\ldots\left(j\omega - p_n\right)$$
$$N\left(j\omega\right) = c_n\left(j\omega - q_1\right)\left(j\omega - q_2\right)\left(j\omega - q_3\right)\ldots\left(j\omega - q_n\right)$$

$P_i = \left(j\omega - p_i\right) Q_i = \left(j\omega - q_i\right)$ Vektory v komplexní rovině spojující bod ω na imaginární ose s daným kořenem



Při změně ω od $-\infty$ do ∞ se fáze vektoru změní o

- $+\pi$ pro kořeny ležící v levé polorovině
- $-\pi$ pro kořeny ležící v pravé polorovině

- Má-li být uzavřený obvod stabilní, všechny kořeny polynomu $A(p)$ musí ležet v levé polorovině a tedy celkový fázový posun je $\Delta\phi_A = n\pi$
- Nechť přenos v otevřené smyčce má celkem r nestabilních pólů, polynom $N(p)$ pak má r kořenů v pravé polorovině, zbývající v levé a celkový fázový posun je $\Delta\phi_N = (n-r)\,\pi - r\pi = (n-2r)\,\pi$
- Celková změna fáze $\Delta\phi_C = \Delta\phi_A - \Delta\phi_N = n\pi - (n-2r)\,\pi = 2r\pi$

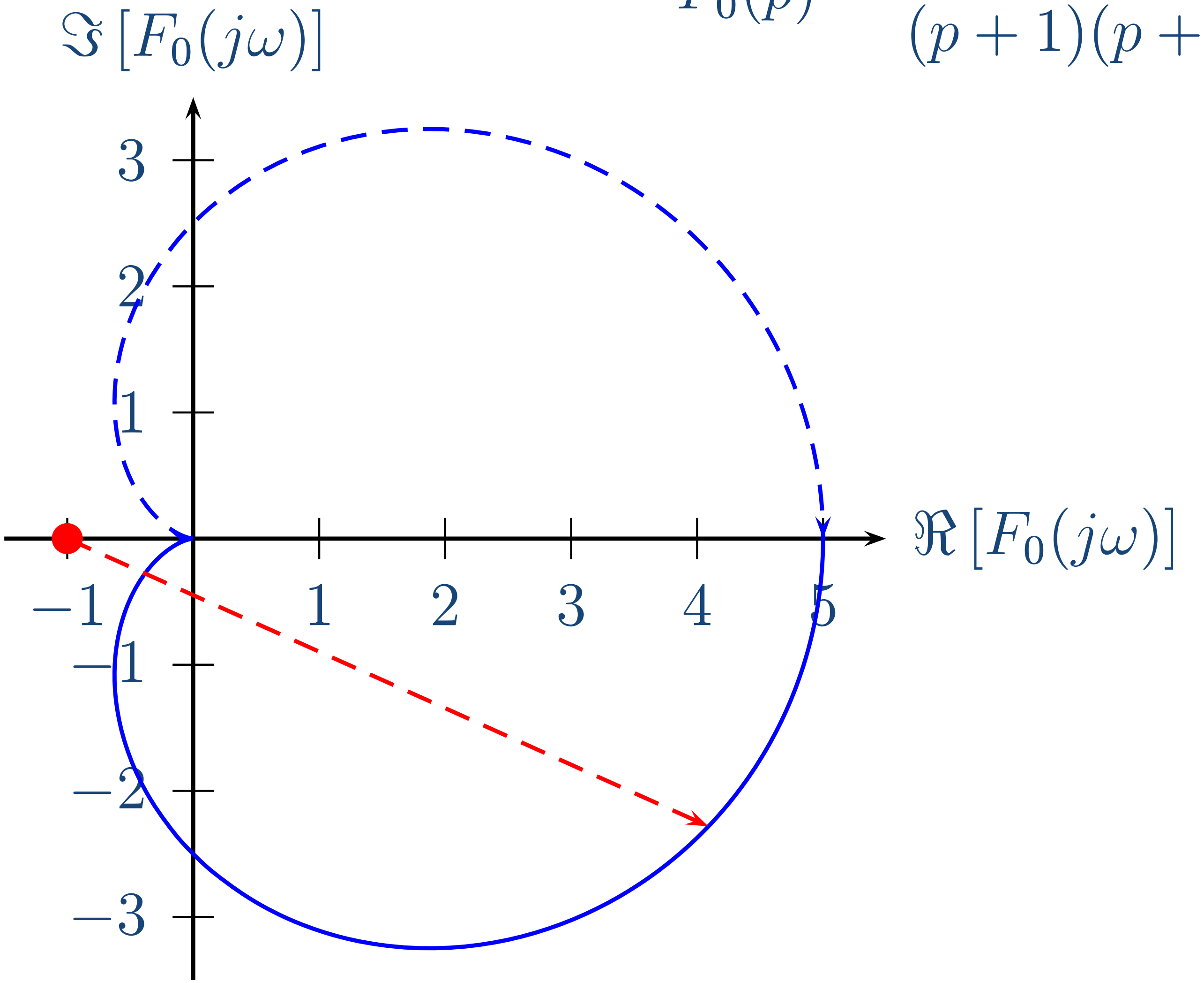
- Má-li být uzavřená smyčka stabilní, musí frekvenční charakteristika daná vztahem $1 + F_0(j\omega)$ při změně frekvence od $-\infty$ do ∞ obíhat počátek komplexní roviny tolikrát, kolik nestabilních kořenů má jmenovatel přenosu otevřeného obvodu
- Posunutí do bodu 1
- Uzavřený zpětnovazební obvod je stabilní, jestliže frekvenční charakteristika otevřeného obvodu v komplexní rovině obíhá při změně frekvence od $-\infty$ do ∞ bod $(-1; 0)$ v kladném směru tolikrát, kolik pólů přenosu otevřeného obvodu $F_0(p)$ leží v pravé polorovině roviny ”p”

Zjednodušené Nyquistovo kritérium

- Většina průmyslových regulovaných soustav nemá žádné póly v pravé polorovině , frekvenční charakteristika otevřeného obvodu nesmí bod $(-1;0)$ obíhat
- Uzavřený obvod je stabilní, jestliže frekvenční charakteristika otevřeného obvodu při nárůstu frekvence od 0 do ∞ probíhá vpravo od bodu $(-1;0)$
- Postupujeme-li po frekvenční charakteristice otevřeného obvodu směrem narůstající frekvence, musí bod $(-1;0)$ zůstat po naší levé straně
- Uzavřený systém, jehož otevřený obvod nemá póly v pravé polorovině je stabilní, jestliže při frekvenci ω_r, při které $|F_0(j\omega_r)| = 1$, je fáze kladnější, než π

Nyquist kritérium - příklad

$$F_0(p) = \frac{5}{(p+1)(p+1)}$$

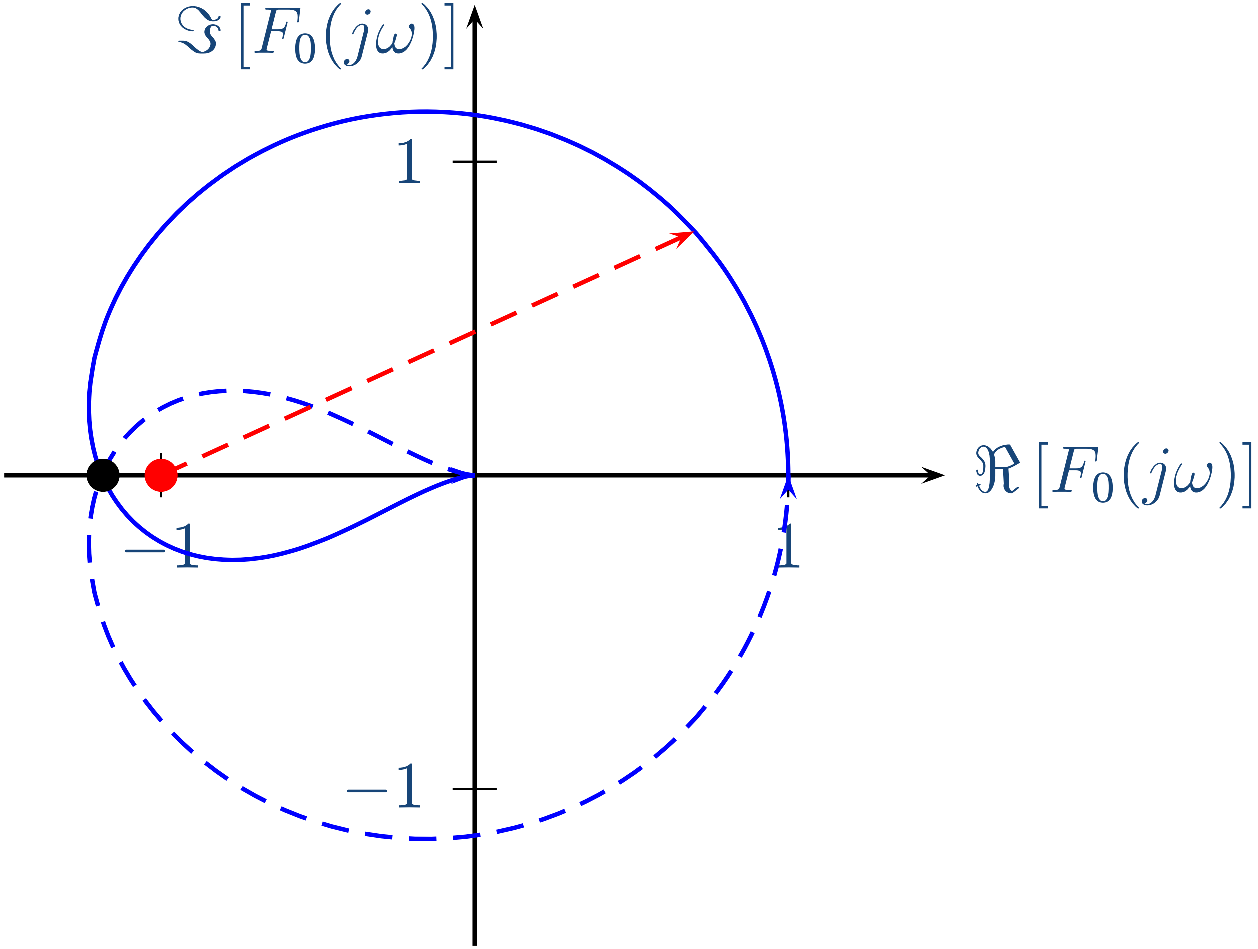


- Žádné nestabilní póly přenosu otevřené smyčky
- Žádné oběhy kolem bodu (-1;0)
- Uzavřená smyčka je stabilní

Nyquistovo kritérium - příklad

$$F_s(p) = \frac{1}{p^2 - 4p + 1} \qquad F_r(p) = \frac{5p+1}{0.1p+1}$$

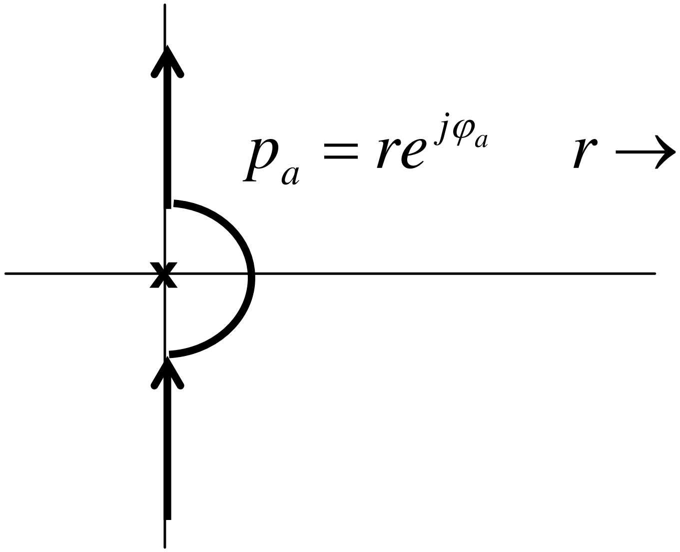
$$F_0(p) = \frac{5p+1}{(p^2-4p+1)(0.1p+1)} \qquad p = 3.73; 0.27; -10$$



- Dva nestabilní póly přenosu otevřené smyčky
- Dva oběhy kolem bodu (-1;0)
- Uzavřená smyčka je stabilní
- Při snížení zesílení na $1/1.185$ bude uzavřená smyčka nestabilní

Pól v počátku

$$F_0(p) = \frac{1}{p^i} R(p)$$



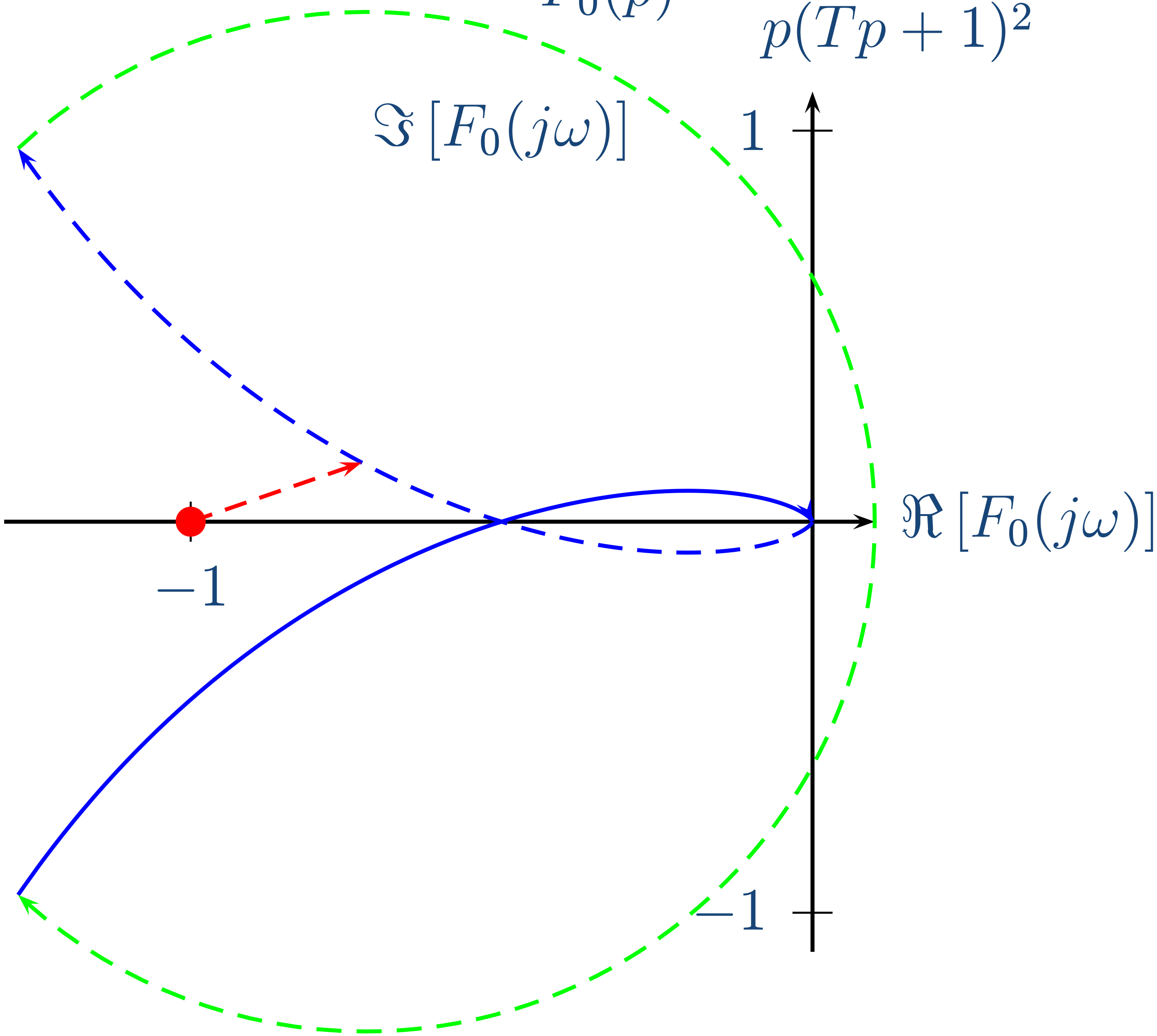
- φ_a se mění od $-\pi/2$ do $\pi/2$ v kladném směru
- fáze členu

$$\frac{1}{p^i} \approx \frac{1}{p_a^i} = \frac{1}{r^i} e^{-j\varphi_a i}$$

  se mění od $i\pi/2$ do $-i\pi/2$ v záporném směru
- amplituda $|F_0(0)| = \infty$
- frekvenční charakteristika se uzavírá přes nekonečno v záporném směru

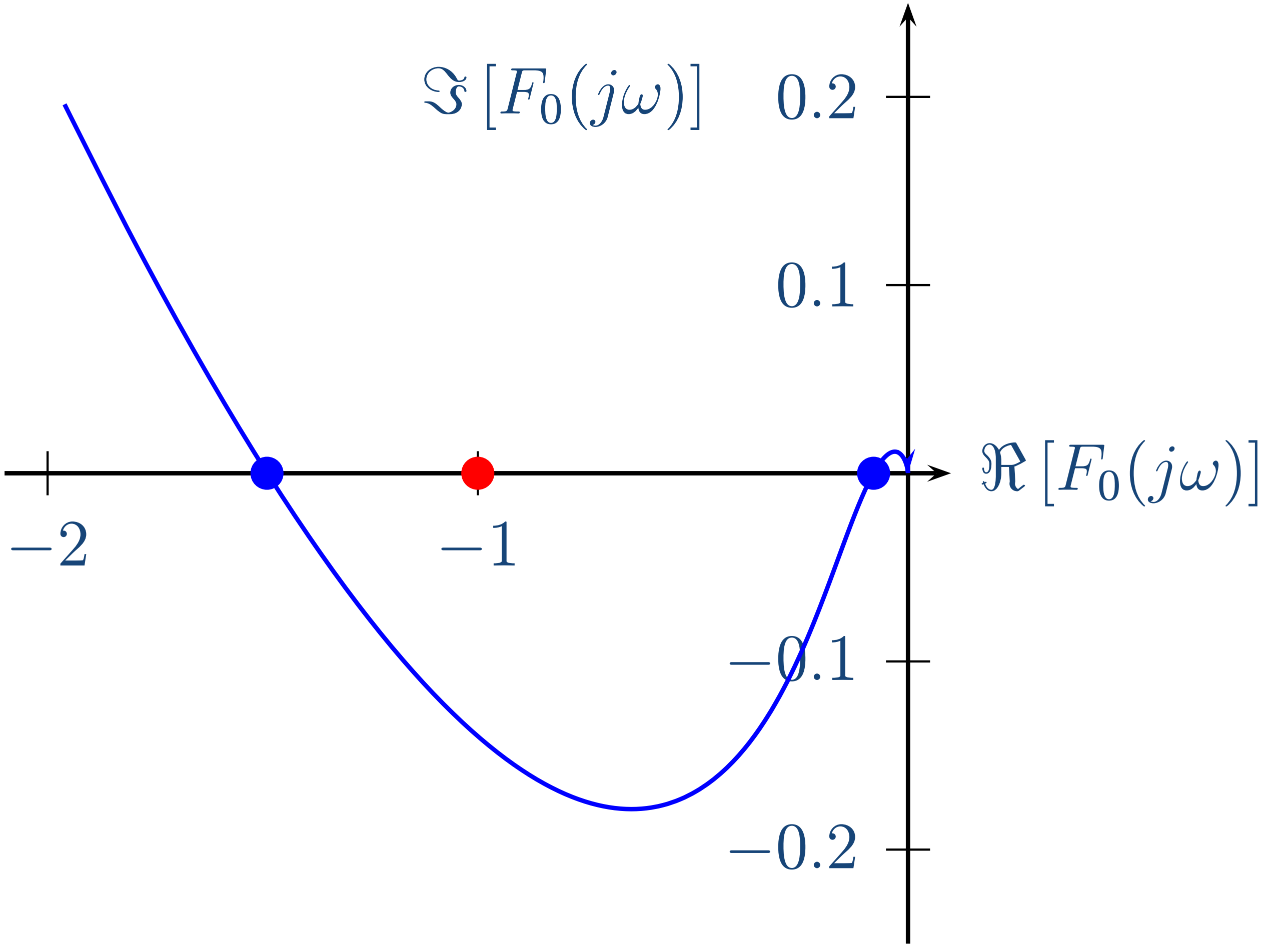
Pól v počátku - příklad

$$F_0(p) = \frac{K_0}{p(Tp+1)^2}$$



Zjednodušené Nyquistovo kritérium - příklad

$$F_0 = \frac{K_0(p+1)^2}{p^2(10p+1)(0.1p+1)^2}$$



- Systém podmíněně stabilní
- Na základě vlastností frekvenční charakteristiky nebo Routh-Schurovým kritériem lze určit, že $K_0 \in (6.7; 124)$