
Regulace a řízení II

Úvod do nelineárních systémů

Obsah

Obsah

Popis

Rozdíly

Nelinearity

Linearizace

Obsah přednášky

- popis nelineárních systémů
- rozdíly mezi lineárními a nelineárními systémy
- základní nelinearity
- linearizace

Obsah

Popis

Rozdíly

Nelinearity

Linearizace

Popis nelineárních systémů

Obsah

Popis

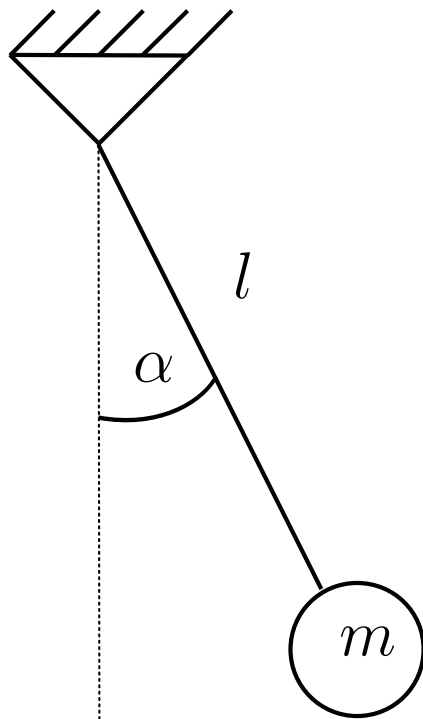
Motivace
Rozdělení
nelineárních
systémů
Bez paměti
Implicitní
funkce
S pamětí
Bloková
algebra
Dynamické
systémy

Rozdíly

Nelinearity

Linearizace

- většina reálných systémů je popsána nelineárními závislostmi, které není možné vždy vhodně linearizovat
- příklad fyzikální kyvadlo



- ◆ pohybová rovnice

$$ml \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -mg \sin \alpha$$

- ◆ pro malé výchylky platí

$$\alpha \ll 1 \Rightarrow \sin \alpha \approx \alpha \quad \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l} \alpha$$

- ◆ pro větší výchylky nelze

nelineární funkci sinus nahradit a musíme uvažovat nelineární diferenciální rovnici

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \alpha$$

Obsah

Popis

Motivace

Rozdělení nelineárních systémů

Bez paměti

Implicitní funkce

S pamětí

Bloková algebra

Dynamické systémy

Rozdíly

Nelinearity

Linearizace

Rozdělení nelineárních systémů

- každý systém, který nespĺňuje podmínky linearity, považujeme za nelineární
- typy nelineárních systémů
 - ◆ systémy bez dynamiky
 - bez paměti
 - s pamětí
 - ◆ dynamické systémy

Obsah

Popis

Motivace

**Rozdělení
nelineárních
systémů**

Bez paměti

Implicitní
funkce

S pamětí

Bloková
algebra

Dynamické
systémy

Rozdíly

Nelinearity

Linearizace

Systemy bez dynamiky bez paměti

- na vstupní signál reagují okamžitě bez přechodového děje nebo zpoždění
- výstup je určen výhradně okamžitou hodnotou vstupu
- za systémy bez dynamiky považujeme často i systémy, jejichž dynamika je zanedbatelná vzhledem k vlastnostem řešené úlohy (např. dynamika přepnutí relé)
- systém je popsán plně funkční závislostí $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$

- v případě znalosti funkce jen v uzlových bodech

$y_0 = f(u_0), y_1 = f(u_1), \dots, y_n = f(u_n)$ možnost interpolace

- ◆ Lagrangeova interpolace $L_n(u) = \sum_{j=1}^n y_j \prod_{k=1, k \neq j}^n \frac{u - u_k}{u_j - u_k}$

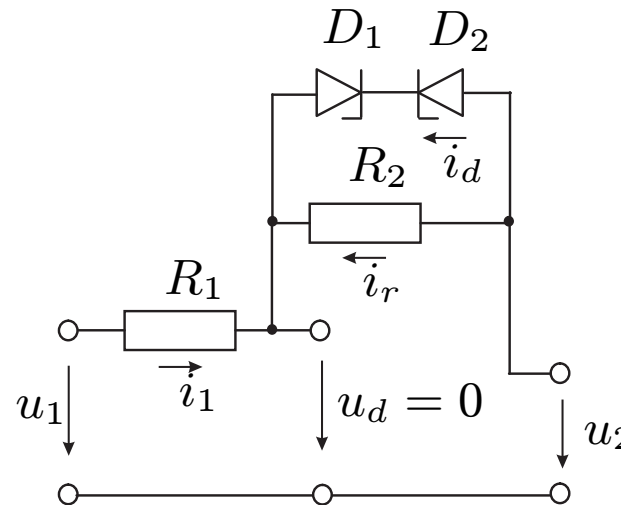
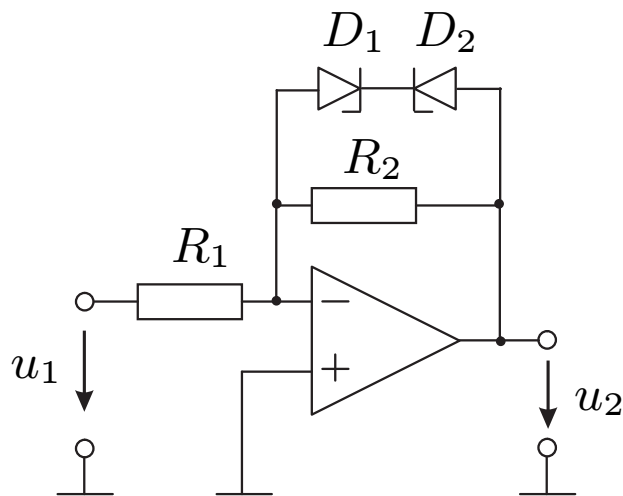
- ◆ po částech lineární náhrada

$$F(u) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{u_{i+1} - u_i} (u - u_i) \quad u \in \langle u_i, u_{i+1} \rangle \quad i = 0, 1, \dots, n - 1$$

- možnost linearizace
 - ◆ metoda nejmenších čtverců
 - ◆ Taylorova řada
 - ◆ systémy po částech lineární

Implicitně zadaná nelineární funkce

- funkce zadaná ve tvaru $f(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = 0$
- často není možné najít analytické řešení - řešíme graficky
- příklad - operační zesilovač s omezením



$$i_1 + i_2 = 0$$

$$i_1 = \frac{u_1}{R_1}$$

$$i_2 = i_d + i_r = f(u_2)$$

$$\frac{u_1}{R_1} + f(u_2) = 0$$

Obsah

Popis

Motivace

Rozdělení
nelineárních
systémů

Bez paměti

**Implicitní
funkce**

S pamětí

Bloková
algebra

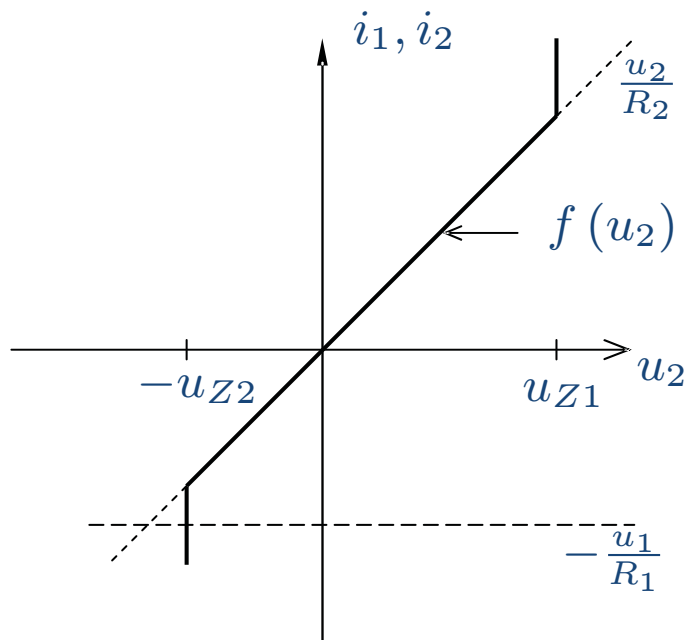
Dynamické
systémy

Rozdíly

Nelinearity

Linearizace

Implicitně zadaná nelineární funkce



$$u_2 = \begin{cases} -\frac{R_2}{R_1} u_1 & u_1 \in \left\langle -u_{Z1} \frac{R_1}{R_2}; u_{Z2} \frac{R_1}{R_2} \right\rangle \\ -u_{Z2} & u_1 > u_{Z2} \frac{R_1}{R_2} \\ u_{Z1} & u_1 < -u_{Z1} \frac{R_1}{R_2} \end{cases}$$

Obsah

Popis

Motivace
Rozdělení
nelineárních
systémů

Bez paměti

**Implicitní
funkce**

S paměti

Bloková
algebra

Dynamické
systémy

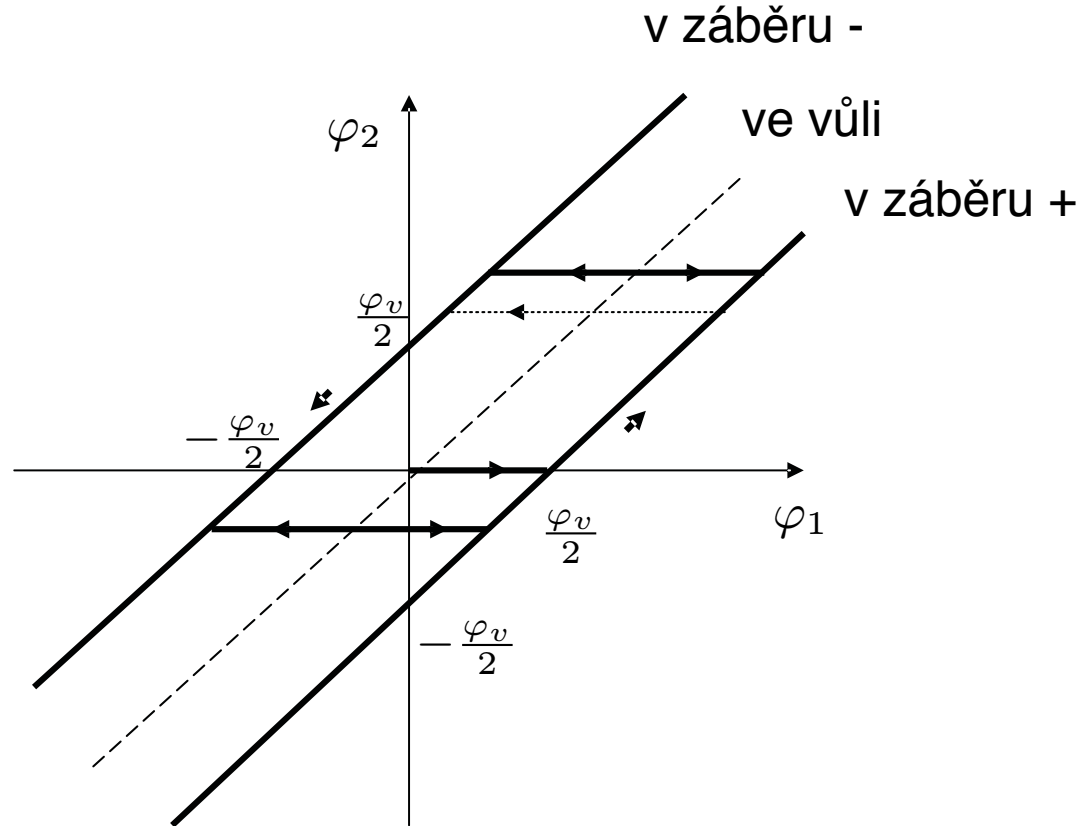
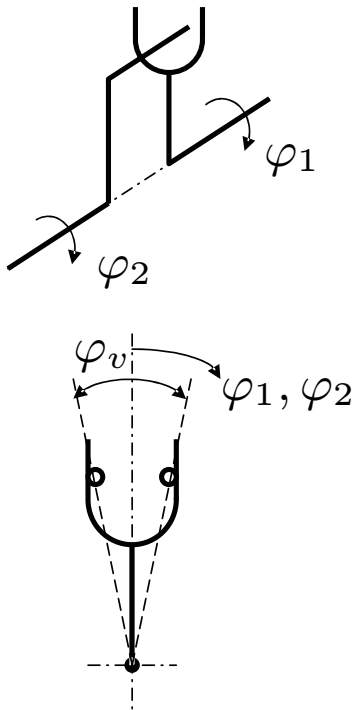
Rozdíly

Nelinearity

Linearizace

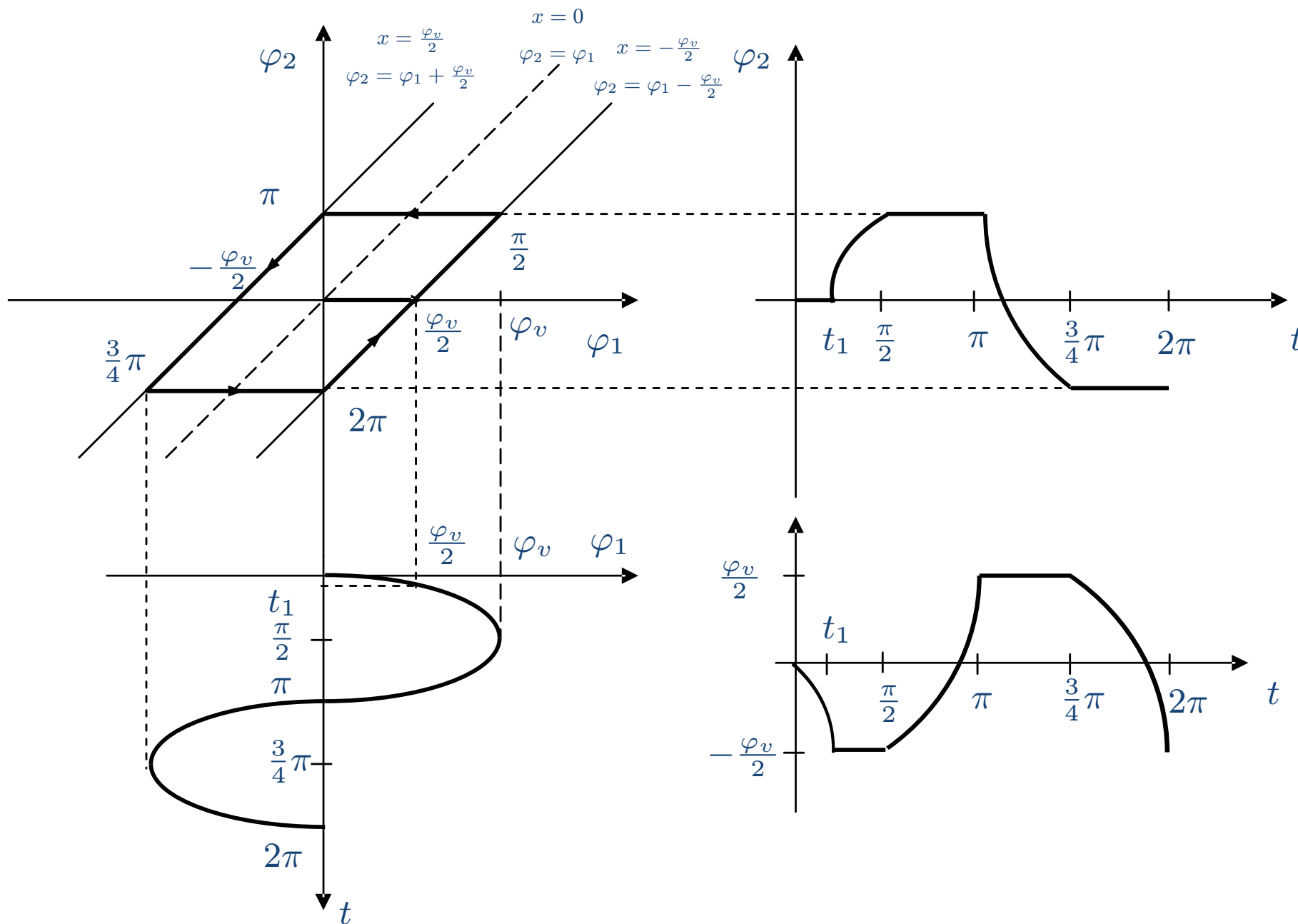
Systemy bez dynamiky s pamětí

- systém reaguje na svůj vstup bez přechodného děje
- hodnota výstupu závisí na hodnotě vstupu a předchozí hodnotě výstupu
 - ◆ systém si „pamatuje“ předchozí hodnotu výstupu - stav systému
- příklad - vůle v převodech

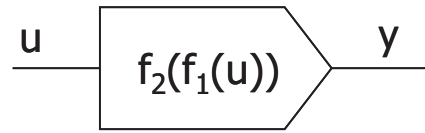
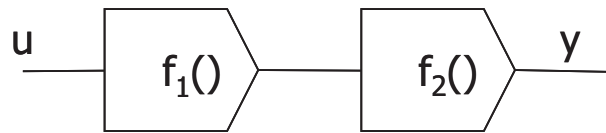


- výstup systému nelze popsat jako funkci vstupu pomocí uzavřené matematické formule
- často vede spíše na algoritmický popis

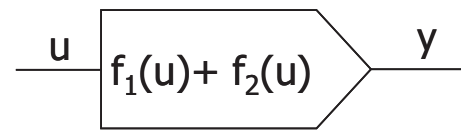
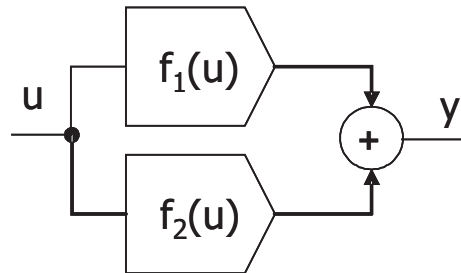
Vůle v převodech - grafické řešení



■ seriové spojení

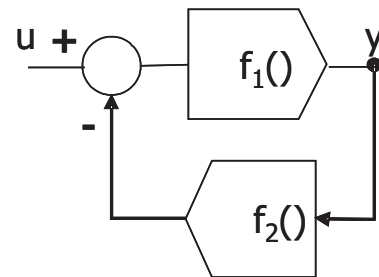


■ paralelní spojení



■ antiparalelní spojení

- ◆ $y = f_1(u - f_2(y))$
- ◆ vznik algebraické smyčky
- ◆ problémy během simulace - algebraickou smyčku nutno odstranit vyřešením algebraické rovnice



Obsah

Popis

Motivace
Rozdělení
nelineárních
systémů

Bez paměti
Implicitní
funkce

S pamětí

**Bloková
algebra**

Dynamické
systémy

Rozdíly

Nelinearity

Linearizace

Nelineární dynamické systémy

- dynamický systém nelze popsat statickou převodní charakteristikou mezi vstupem a výstupem
- je nutné studovat časové průběhy jednotlivých veličin
- popis nelineárními diferenciálními rovnicemi - stavové rovnice

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

⋮

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

$$y_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

$$y_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

⋮

$$y_r = g_r(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

Nelineární dynamické systémy

- stavové rovnice v maticovém tvaru

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

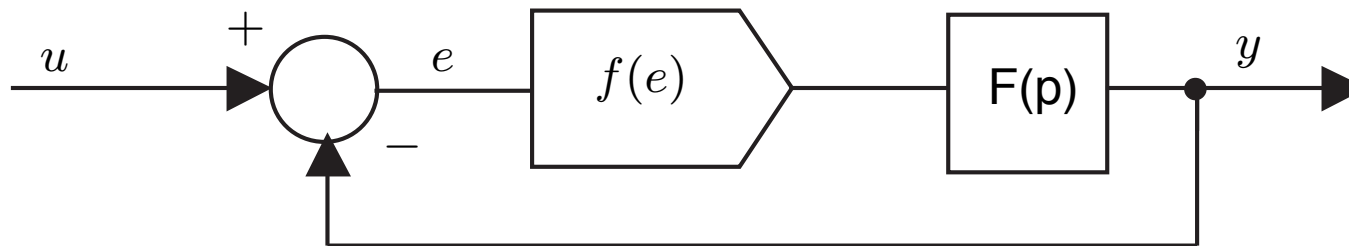
- v nejobecnějším případě může ve stavových rovnicích vystupovat i čas

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

- ◆ *t*-variantní systémy
- ◆ obvykle značně složitá analýza

- často lze systém rozdělit na lineární a nelineární část



Obsah

Popis

Motivace
Rozdělení
nelineárních
systémů

Bez paměti

Implicitní
funkce

S pamětí

Bloková
algebra

**Dynamické
systémy**

Rozdíly

Nelinearity

Linearizace

Základní rozdíly mezi lineárními a nelineárními systémy

Obsah

Popis

Rozdíly

Použitelnost
metod

Superpozice

Příklad
superpozice

Důsledky

Stabilita

Ustálené stavy

Vyšší
harmonické

Nelinearity

Linearizace

- lineární systémy jsou popsány lineárními závislostmi
- nelineární systémy jsou popsány obecnými závislostmi bez podmínky jejich linearit
- třídu lineárních systémů lze považovat za podmnožinu třídy nelineárních systémů
- všechny postupy používané pro analýzu nelineárních systémů (včetně návrhu řízení) jsou použitelné i pro systémy lineární
- metody navržené pro analýzu lineárních systémů nejsou obecně použitelné pro nelineární systémy

Obsah

Popis

Rozdíly

Použitelnost metod

Superpozice

Příklad

superpozice

Důsledky

Stabilita

Ustálené stavy

Vyšší

harmonické

Nelinearity

Linearizace

Neplatnost principu superpozice

Pro nelineární systémy neplatí *princip superpozice*.

Princip superpozice: Necht' $\mathbf{u}_1(t)$ a $\mathbf{u}_2(t)$ jsou dva rozdílné průběhy vstupních signálů působící na systém s počátečními podmínkami $\mathbf{x}_1(t_0), \mathbf{x}_2(t_0)$. Dále $\mathbf{y}_1(t)$ a $\mathbf{y}_2(t)$ jsou příslušné průběhy výstupů systému a $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$ průběhy stavových veličin pro uvedené dva vstupní signály. Je-li při počáteční podmínce

$$\mathbf{x}(t_0) = \alpha_1 \mathbf{x}_1(t_0) + \alpha_2 \mathbf{x}_2(t_0)$$

na vstup lineárního systému přiveden signál

$$\mathbf{u}(t) = \alpha_1 \mathbf{u}_1(t) + \alpha_2 \mathbf{u}_2(t)$$

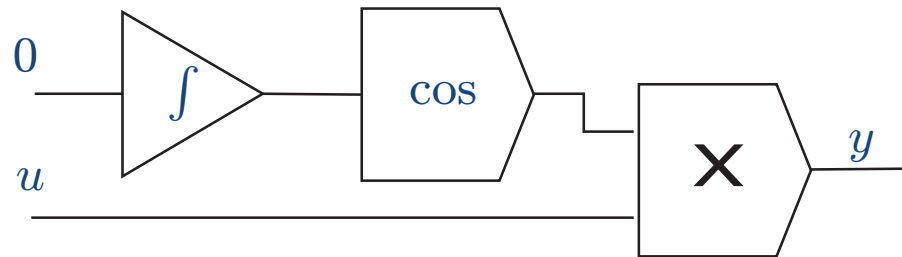
systém odpoví na svém výstupu signálem

$$\mathbf{y}(t) = \alpha_1 \mathbf{y}_1(t) + \alpha_2 \mathbf{y}_2(t)$$

přičemž průběh stavových veličin bude dán vztahem

$$\mathbf{x}(t) = \alpha_1 \mathbf{x}_1(t) + \alpha_2 \mathbf{x}_2(t)$$

Příklad neplatnosti principu superpozice



Chování systému lze popsat rovnicemi

$$\frac{dx}{dt} = 0$$
$$y = u \cos x$$

jejichž řešení je

$$x(t) = x(t_0)$$

$$y(t) = u(t) \cos x(t_0)$$

Obsah

Popis

Rozdíly

Použitelnost
metod

Superpozice

**Příklad
superpozice**

Důsledky

Stabilita

Ustálené stavy

Vyšší

harmonické

Nelinearity

Linearizace

Příklad neplatnosti principu superpozice

Při vstupním signálu $u_1(t)$ a počátečním stavu $x_1(t_0)$ pak bude platit

$$x_1(t) = x_1(t_0)$$

$$y_1(t) = u_1(t) \cos x_1(t_0)$$

Obdobně pro vstupní signál $u_2(t)$ a počáteční stav $x_2(t_0)$ dostaneme

$$x_2(t) = x_2(t_0)$$

$$y_2(t) = u_2(t) \cos x_2(t_0)$$

Předpokládejme, že systém bude v čase t_0 v počátečním stavu

$$x_3(t_0) = \alpha x_1(t_0) + \beta x_2(t_0)$$

a na systém bude působit vstupní signál

$$u_3(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$$

Obsah

Popis

Rozdíly

Použitelnost
metod

Superpozice

**Příklad
superpozice**

Důsledky

Stabilita

Ustálené stavy

Vyšší

harmonické

Nelinearity

Linearizace

Příklad neplatnosti principu superpozice

Pro stav systému platí

$$x_3(t) = x_3(t_0) = \alpha x_1(t_0) + \beta x_2(t_0) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$$

a platnost principu superpozice není vyloučena.

Výstup systému je dán vztahem

$$y_3(t) = u_3(t) \cos x_3(t_0) = [\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)] \cos [\alpha x_1(t_0) + \beta x_2(t_0)]$$

Pro splnění principu superpozice by muselo platit

$$y_3(t) = \alpha u_1(t) \cos x_1(t_0) + \beta u_2(t) \cos x_2(t_0)$$

$$\begin{aligned} [\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)] \cos [\alpha x_1(t_0) + \beta x_2(t_0)] &\neq \\ &\neq \alpha u_1(t) \cos x_1(t_0) + \beta u_2(t) \cos x_2(t_0) \end{aligned}$$

Princip superpozice splněn není.

Důsledky neplatnosti principu superpozice

- princip superpozice je využit v definici Laplaceovy transformace i Fourierovy transformace
- pro nelineární systémy není možné použít Laplaceovu transformaci ani Fourierovu transformaci
- nelineární systém není možné popsat operátorovým přenosem v Laplaceově transformaci ani frekvenční charakteristikou
- neplatí pravidla pro blokovou algebru používaná v případě lineárních systémů

Obsah

Popis

Rozdíly

Použitelnost
metod

Superpozice

Příklad

superpozice

Důsledky

Stabilita

Ustálené stavy

Vyšší

harmonické

Nelinearity

Linearizace

- v případě lineárních systémů je stabilita dána výhradně vnitřní strukturou systému
 - ◆ systém je stabilní nebo nestabilní bez ohledu na počáteční stav a průběh vstupních veličin
- nelineární systém může být pro určité počáteční podmínky stabilní, pro jiné nestabilní
- totéž platí pro průběh vstupních veličin
- existence stabilních periodických řešení

Obsah

Popis

Rozdíly

Použitelnost
metod

Superpozice

Příklad

superpozice

Důsledky

Stabilita

Ustálené stavy

Vyšší

harmonické

Nelinearity

Linearizace

- ustálený stav lineárního systému $\mathbf{0} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$
 - ◆ existuje jen jeden ustálený stav
 - ◆ ustálený stav je dosažen bez ohledu na počáteční stav
- ustálený stav nelineárního systému $\mathbf{0} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$
 - ◆ nelineární funkce může mít více kořenů, může existovat více ustálených stavů
 - ◆ dosažení ustáleného stavu může záviset na počátečních podmínkách
- periodická řešení
 - ◆ lineární systém dosáhne periodického řešení jen pokud je na mezi stability - netlumené sinusové kmity
 - ◆ v případě nelineárního systému může existovat více stabilních periodických řešení
- chování nelineárních systémů je mnohem rozmanitější, než lineárních

Obsah

Popis

Rozdíly

Použitelnost
metod

Superpozice

Příklad

superpozice

Důsledky

Stabilita

Ustálené stavy

Vyšší

harmonické

Nelinearity

Linearizace

Generování vyšších harmonických frekvencí

- lineární systém negeneruje žádné vyšší harmonické, obvodem se šíří frekvence obsažené ve vstupním signálu
- nelineární systém může generovat vyšší harmonické frekvence
 - ◆ často využíváno v analogových obvodech

Obsah

Popis

Rozdíly

Použitelnost
metod

Superpozice

Příklad

superpozice

Důsledky

Stabilita

Ustálené stavy

**Vyšší
harmonické**

Nelinearity

Linearizace

Základní nelinearity

Obsah

Popis

Rozdíly

Nelinearity

Nasycení

Necitlivost

Vůle v
převodech

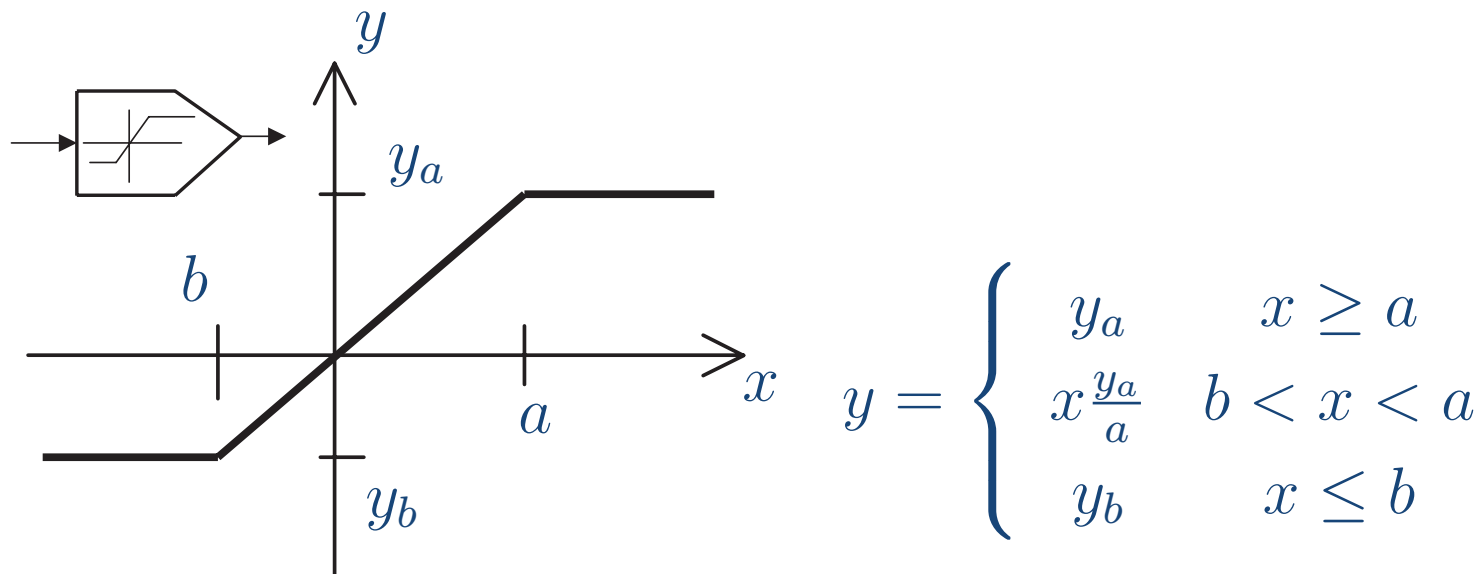
Relé

Tření

Obecná
nelinearita

Matematické
operace

Linearizace



- patrně nejčastěji se vyskytující nelinearita
- přítomná v reálných technických systémech prakticky vždy v podobě omezení akční veličiny
- funkce je po částech lineární
- nelinearita bez paměti
- parazitní nelinearita, projevuje se jen v určitých stavech systému

Obsah

Popis

Rozdíly

Nelinearity

Nasycení

Necitlivost

Vůle v
převodech

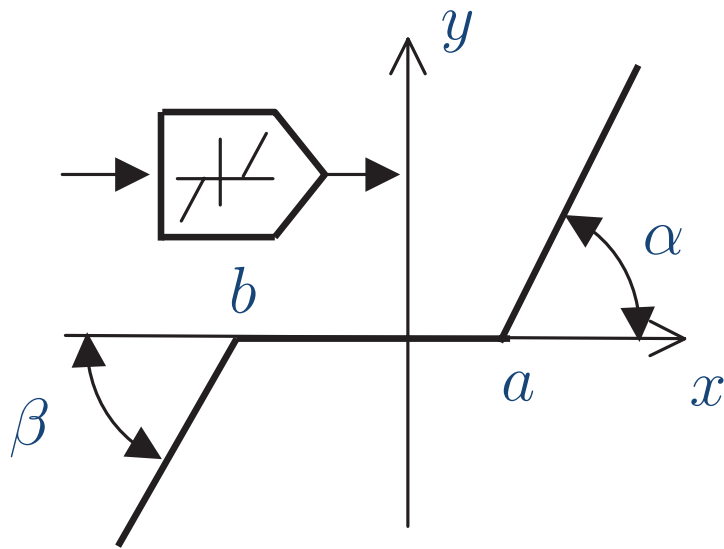
Relé

Tření

Obecná
nelinearita

Matematické
operace

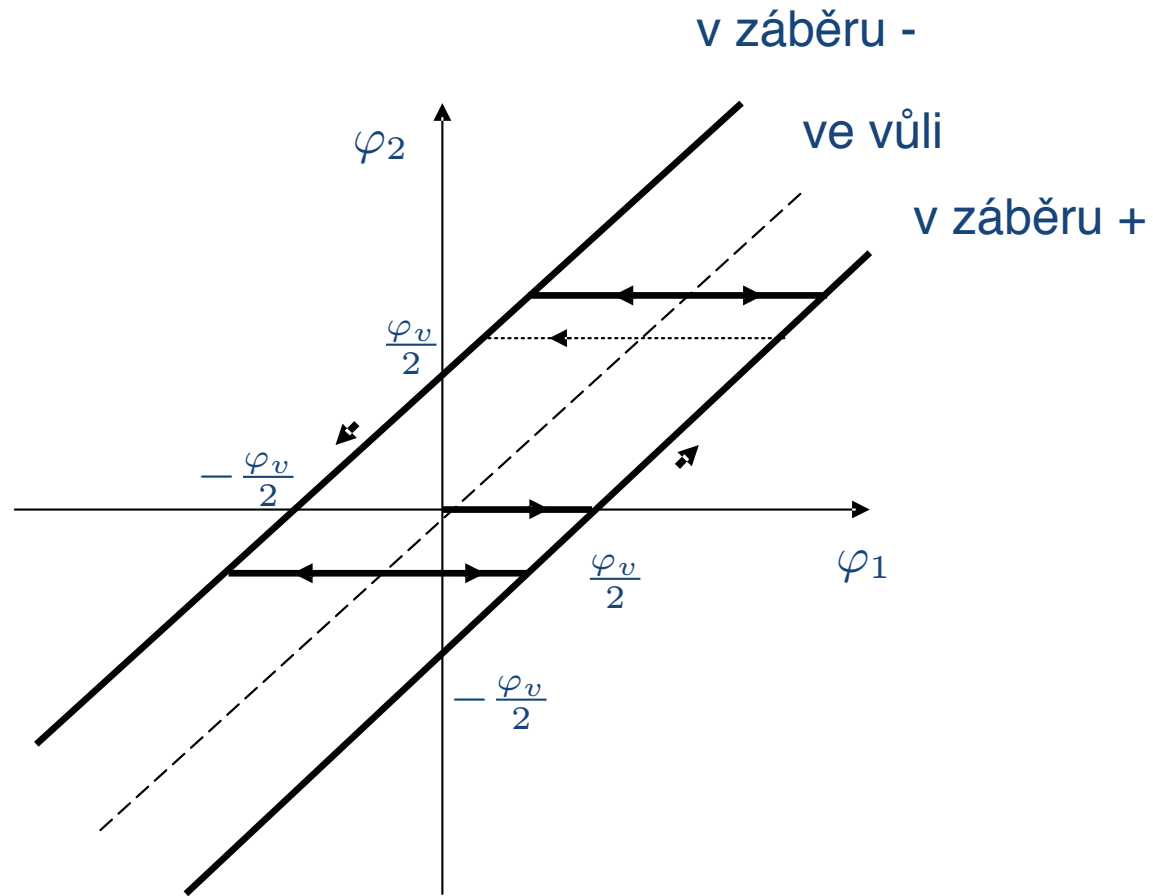
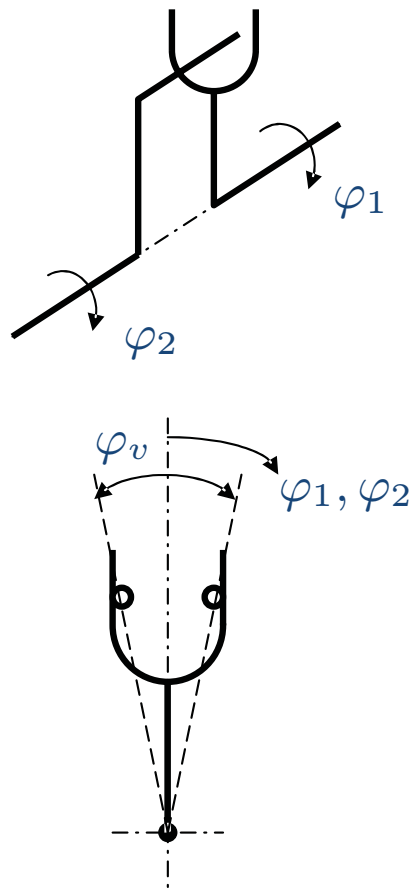
Linearizace



$$y = \begin{cases} (x - a) \operatorname{tg} \alpha & x \geq a \\ 0 & b < x < a \\ (x - b) \operatorname{tg} \beta & x \leq b \end{cases}$$

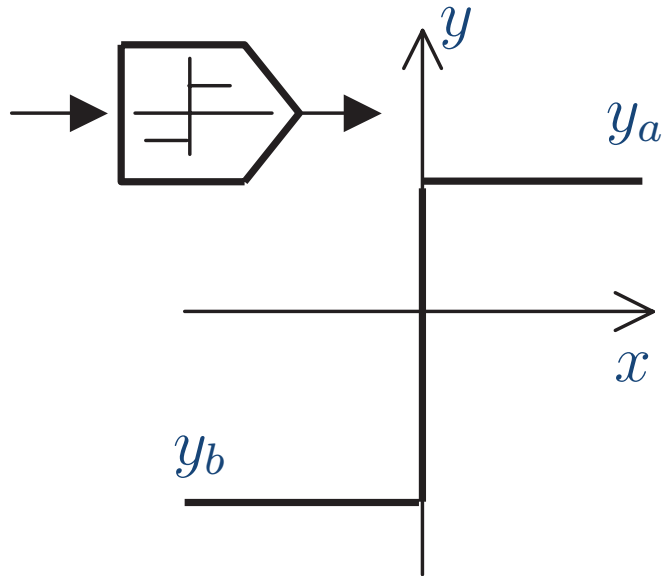
- vyskytuje se často v mechanických systémech jako projev tření a nepřesností
- může být do systému vložena i uměle k omezení oscilací
- funkce je po částech lineární
- nelinearita bez paměti

Vůle v převodech

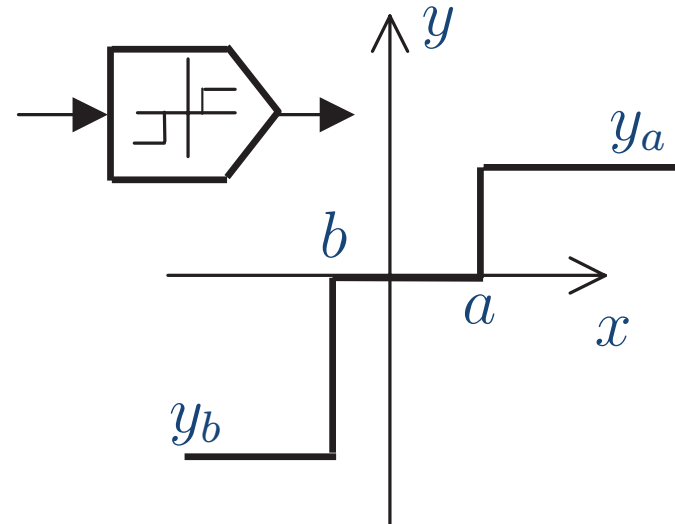


- vyskytuje se často v mechanických systémech - převodovky
- nelinearita s pamětí - nelze ji popsat uzavřenou matematickou formulí
- podstatná nelinearita, nelze ji zanedbat
- není ji možné většinou úspěšně linearizovat

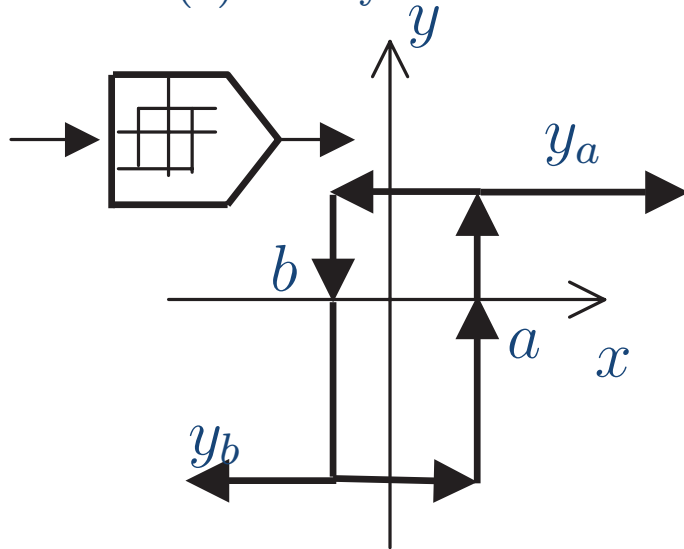
Releové charakteristiky



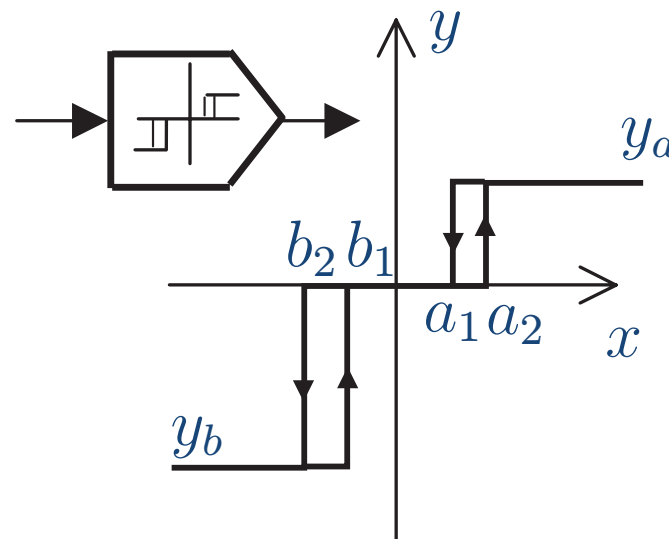
(a) bez hystereze



(b) třístavové bez hystereze



(c) s hysterezí



(d) třístavové s hysterezí

Obsah

Popis

Rozdíly

Nelinearity

Nasycení

Necitlivost

Vůle v

převodech

Relé

Tření

Obecná

nelinearita

Matematické

operace

Linearizace

Releové charakteristiky

- relé bez hystereze - ideální dvoustavové relé

$$y = \begin{cases} y_a & x \geq 0 \\ y_b & x < 0 \end{cases}$$

- ◆ v řadě případů $y_b = -y_a$, $y = y_a \operatorname{sign} x$
- ◆ nelze linearizovat v okolí bodu $x = 0$

- třístavové relé bez hystereze

$$y = \begin{cases} y_a & x \geq a \\ 0 & b < x < a \\ y_b & x \leq b \end{cases}$$

Obsah

Popis

Rozdíly

Nelinearity

Nasycení

Necitlivost

Vůle v
převodech

Relé

Tření

Obecná

nelinearita

Matematické
operace

Linearizace

Releové charakteristiky

■ relé s hysterezí

$$y = \begin{cases} y_a & x \geq a \\ y \text{ „minulá“} & b < x < a \\ y_b & x \leq b \end{cases}$$

■ třístavové relé s hysterezí

$$y = \begin{cases} y_a & x \geq a_2 \\ y \text{ „minulá“} & a_1 \leq x < a_2 \\ 0 & b_1 < x < a_1 \\ y \text{ „minulá“} & b_2 < x \leq b_1 \\ y_b & x \leq b_2 \end{cases}$$

■ relé s hysterezí je nelinearita s pamětí

Obsah

Popis

Rozdíly

Nelinearity

Nasycení

Necitlivost

Vůle v
převodech

Relé

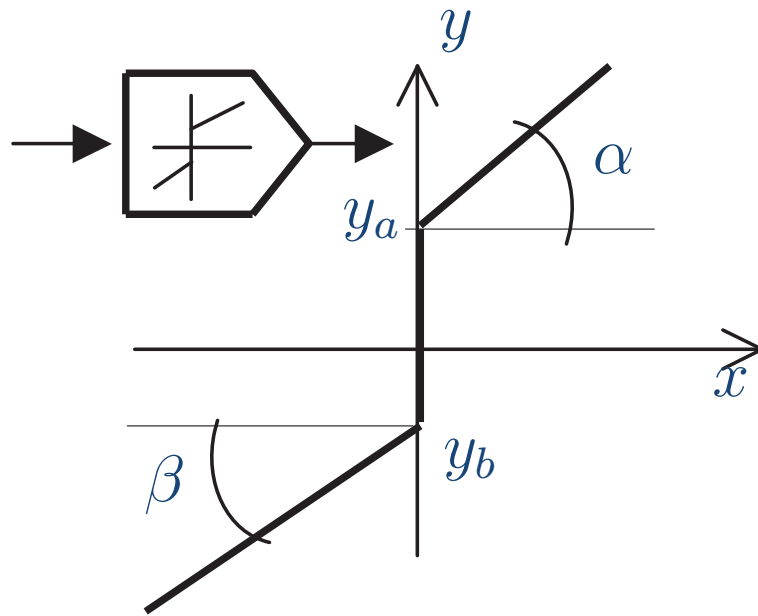
Tření

Obecná

nelinearita

Matematické
operace

Linearizace



$$y = \begin{cases} y_a + x \operatorname{tg} \alpha & x > 0 \\ y_b - x \operatorname{tg} \beta & x < 0 \end{cases}$$

- vyskytuje se často v mechanických systémech
- přesné modelování tření je značně problematické, existuje řada modelů
- nelze linearizovat v okolí bodu $x = 0$
- nelinearita bez paměti

Obsah

Popis

Rozdíly

Nelinearity

Nasycení

Necitlivost

Vůle v
převodech

Relé

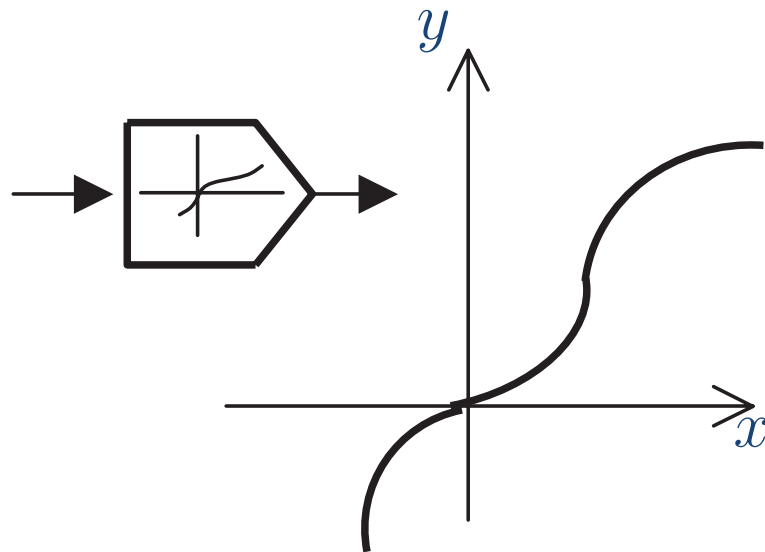
Tření

Obecná

nelinearita

Matematické
operace

Linearizace



$$y = f(x)$$

- obecná nelineární funkce
- charakteristiky elektronických prvků - dioda, tranzistor...
- charakteristiky převodníků neelektrických veličin
- fyzikální zákony - aerodynamická odporová síla, gravitační zákon...

Obsah

Popis

Rozdíly

Nelinearity

Nasycení

Necitlivost

Vůle v
převodech

Relé

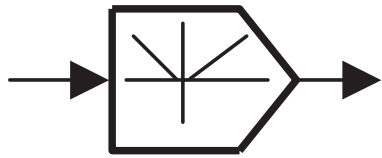
Tření

**Obecná
nelinearita**

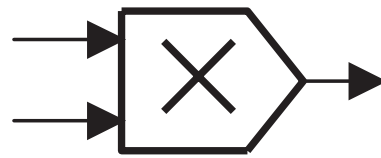
Matematické
operace

Linearizace

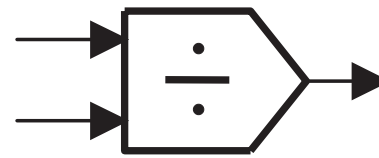
Matematické operace



(a) Absolutní hodnota



(b) Násobička



(c) Dělení

- násobení signálů, dělení signálů, absolutní hodnota jsou nelineární operace
- sčítání a násobení konstantou jsou lineární operace

Obsah

Popis

Rozdíly

Nelinearity

Nasycení
Necitlivost
Vůle v
převodech
Relé
Tření
Obecná
nelinearita

**Matematické
operace**

Linearizace

Linearizace

Obsah

Popis

Rozdíly

Nelinearity

Linearizace

Cíl linearizace

Metoda

nejmenších

čtverců

Taylorova řada

- předpokládejme nelineární systém $\frac{dx}{dt} = f(x, u)$
- nelineární systém nahradíme lineárním, jehož chování pak vyšetřujeme pomocí metod známých z teorie lineárních systémů
- hledáme lineární náhradu - linearizace funkcí $f_i(x, u)$
- linearizační metody
 - ◆ metoda nejmenších čtverců
 - ◆ rozvoj do Taylorovy řady

Obsah

Popis

Rozdíly

Nelinearity

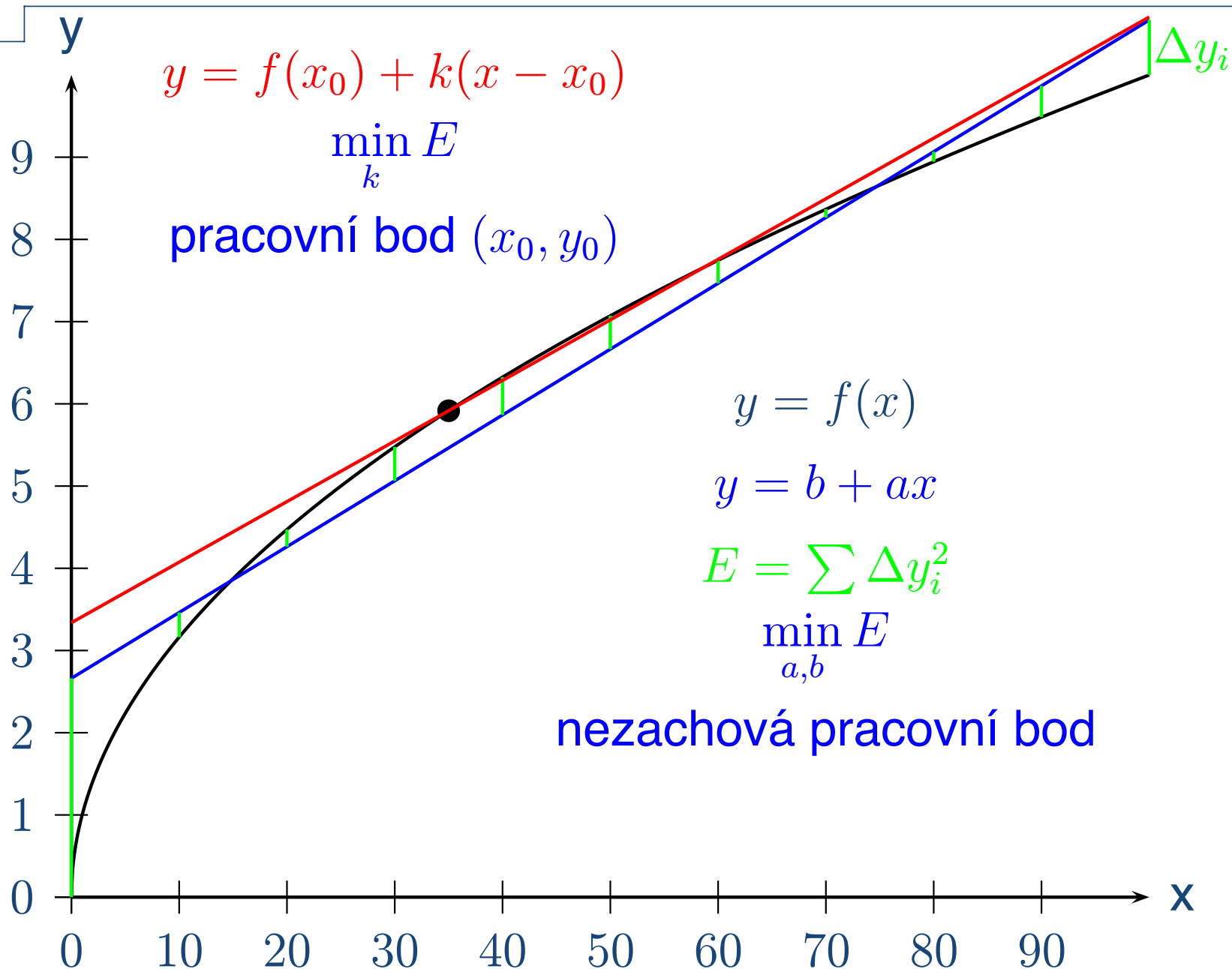
Linearizace

Cíl linearizace

Metoda
nejmenších
čtverců

Taylorova řada

Metoda nejmenších čtverců



Obsah

Popis

Rozdíly

Nelinearity

Linearizace

Cíl linearizace

Metoda
nejmenších
čtverců

Taylorova řada

Metoda nejmenších čtverců

- předpokládáme nelineární funkci $y = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$
- hledáme lineární náhradu $F(\mathbf{h}) = f(\mathbf{h}_0) + \mathbf{k}(\mathbf{h} - \mathbf{h}_0)$ v okolí pracovního bodu \mathbf{h}_0 , kde $\mathbf{h} = [x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m]$

- kritérium

$$E = \sum_{i=1}^r [f(\mathbf{h}_i) - F(\mathbf{h}_i)]^2 = \sum_{i=1}^r [y_i - y_0 - \mathbf{k}(\mathbf{h}_i - \mathbf{h}_0)]^2 = \min$$

- odchylka od pracovního bodu $\Delta y_i = y_i - y_0$, $\Delta \mathbf{h}_i = \mathbf{h}_i - \mathbf{h}_0$

- $$E = \sum_{i=1}^r [\Delta y_i - (k_1 \Delta h_{1,i} + k_2 \Delta h_{2,i} + \dots + k_{n+m} \Delta h_{n+m,i})]^2$$

- hledání minima kritéria E

$$\frac{\partial E}{\partial k_j} = 2 \sum_{i=1}^r [\Delta y_i - (k_1 \Delta h_{1,i} + k_2 \Delta h_{2,i} + \dots + k_{n+m} \Delta h_{n+m,i})] (-\Delta h_{j,i}) = 0$$

$$j = 1, 2, \dots, n + m$$

Metoda nejmenších čtverců

$$k_1 \sum_{i=1}^r \Delta h_{1,i}^2 + k_2 \sum_{i=1}^r \Delta h_{2,i} \Delta h_{1,i} + \dots + k_n \sum_{i=1}^r \Delta h_{n,i} \Delta h_{1,i} = \sum_{i=1}^r \Delta y_i \Delta h_{1,i}$$
$$k_1 \sum_{i=1}^r \Delta h_{1,i} \Delta h_{2,i} + k_2 \sum_{i=1}^r \Delta h_{2,i}^2 + \dots + k_n \sum_{i=1}^r \Delta h_{n,i} \Delta h_{2,i} = \sum_{i=1}^r \Delta y_i \Delta h_{2,i}$$

⋮

$$k_1 \sum_{i=1}^r \Delta h_{1,i} \Delta h_{n,i} + k_2 \sum_{i=1}^r \Delta h_{2,i} \Delta h_{n,i} + \dots + k_{n+m} \sum_{i=1}^r \Delta h_{n+m,i}^2 = \sum_{i=1}^r \Delta y_i \Delta h_{n+m,i}$$

- soustava $n + m$ lineárních rovnic
- řešení existuje, pokud máme data z $n + m$ lineárně nezávislých bodů $\Delta \mathbf{h}_i$
- obdobné rovnice lze nalézt i pro náhradu bez zachování pracovního bodu $F(\mathbf{u}) = a_0 + \mathbf{a}\mathbf{u}$

Linearizace rozvojem do Taylorovy řady

- předpokládejme systém popsaný stavovými rovnicemi

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

- pracovní bod $\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0$ (obvykle volen jako rovnovážný stav - příští přednáška)
- odchylkové rovnice $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \Delta\mathbf{y}, \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y}_0 + \Delta\mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}, t) \end{aligned}$$

- rozvoj do Taylorovy řady, uvažujeme jen absolutní člen a první derivaci

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_0}{dt} + \frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t) + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} \Delta\mathbf{x} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} \Delta\mathbf{u} + \mathcal{R}_f \\ \mathbf{y}_0 + \Delta\mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t) + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} \Delta\mathbf{x} + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} \Delta\mathbf{u} + \mathcal{R}_g \end{aligned}$$

Linearizace rozvojem do Taylorovy řady

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} + \frac{d\Delta x}{dt} &= f(x_0, u_0, t) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(x_0, u_0, t)} \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)_{(x_0, u_0, t)} \Delta u + \mathcal{R}_f \\ y_0 + \Delta y &= g(x_0, u_0, t) + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{(x_0, u_0, t)} \Delta x + \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)_{(x_0, u_0, t)} \Delta u + \mathcal{R}_g \end{aligned}$$

- pro okolí blízké pracovnímu bodu jsou chyby malé, lze je zanedbat
- odpovídá pracovnímu bodu, lze odečíst
- dynamický systém odchylek od pracovního bodu

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x}{dt} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(x_0, u_0, t)} \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)_{(x_0, u_0, t)} \Delta u \\ \Delta y &= \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{(x_0, u_0, t)} \Delta x + \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)_{(x_0, u_0, t)} \Delta u \end{aligned}$$

Linearizace rozvojem do Taylorovy řady

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} \Delta\mathbf{x} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} \Delta\mathbf{u}$$

$$\Delta\mathbf{y} = \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} \Delta\mathbf{x} + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} \Delta\mathbf{u}$$

■ Jacobiho matice

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} & \cdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} \end{bmatrix}$$

■ matice lineárního systému

$$\mathbf{A} \approx \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)}, \quad \mathbf{B} \approx \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)}, \quad \mathbf{C} \approx \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)}, \quad \mathbf{D} \approx \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)}$$