Regulace a řízení II

Stavové trajektorie nelineárních systémů

Obsah

Obsah přednášky

- stavový popis, stavová trajektorie
- ustálené stavy nelineárních dynamických systémů
- metoda izoklin
- typické trajektorie systémů prvního a druhého řádu

Stavová trajektorie

Stavový popis nelineárních systémů

- stavové rovnice nelineárního dynamického systému

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

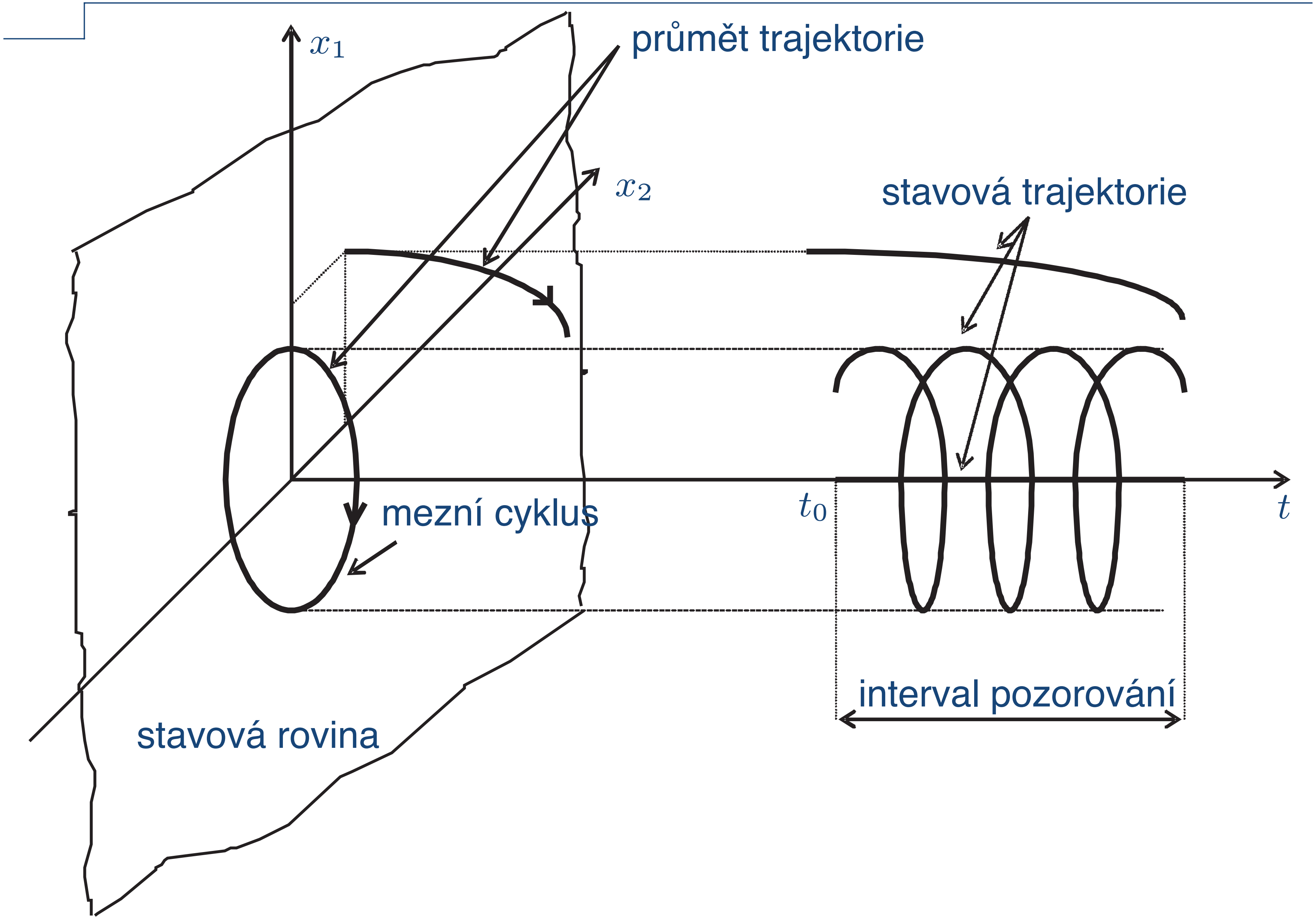
- ve většině případů budeme uvažovat t-invariantní systém

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

- stavová trajektorie je spojitá množina bodů

$$\mathbb{S} = \{(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$$

Stavová trajektorie



Stavová trajektorie

- v technické praxi je pojmem stavová trajektorie často označován průmět stavové trajektorie
- výpočet stavové trajektorie
  - v případě lineárních systémů lze vždy najít analytické řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic a popsat stavovou trajektorii analyticky
  - pro obecný nelineární systém nemusí být analytické řešení možné
    - grafické řešení
    - simulace
- v případě grafických metod je možné názorně zobrazit pouze dvě proměnné
  - v dalším výkladu se omezíme na systémy druhého řádu

Ustálené stavy nelineárních dynamických systémů

Typy ustálených stavů

- rovnovážný stav
  - nedochází ke změnám stavových veličin
  - stavová trajektorie v rovnovážném stavu je přímka rovnoběžná s časovou osou
  - průmět stavové trajektorie je bod - *singulární bod*
- mezní cyklus
  - periodické řešení
  - průmět stavové trajektorie je uzavřená křivka

- výpočet rovnovážného stavu z podmínky neměnnosti stavu

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

- řešení algebraické rovnice $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ hledáme většinou pro $\mathbf{u} = konst$
- hodnotu rovnovážného stavu označujeme $\mathbf{x}_0$
- rovnovážný stav nemusí existovat, může existovat i více než jeden rovnovážný stav, případně nespočetně mnoho rovnovážných stavů

Izolovanost rovnovážného stavu

- pokud má systém více než jeden rovnovážný stav, rozhodujeme o jeho izolovanosti
- ε-okolí bodu $\mathbf{x}_0$ je množina všech bodů $\{\mathbf{x} \mid \| \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \| < \varepsilon; \quad \varepsilon > 0\}$
- rovnovážný stav $\mathbf{x}_0$ je izolovaný, pokud existuje jeho ε-okolí, které neobsahuje další rovnovážný stav
- pokud neexistuje ε-okolí stavu $\mathbf{x}_0$, které neobsahuje další rovnovážný stav, jedná se o neizolovaný rovnovážný stav

Stabilita rovnovážného stavu

- singulární bod je *stabilní*, pokud se systém po malém vychýlení z rovnovážného stavu vrátí zpět do tohoto stavu
- singulární bod je *nestabilní*, pokud se systém po malém vychýlení z rovnovážného stavu začne od rovnovážného stavu vzdalovat
- pokud je možné nelineární systém v okolí singulárního bodu linearizovat rozvojem do Taylorovy řady, můžeme o stabilitě singulárního bodu rozhodnout na základě polohy pólů lineární náhrady
  - všechny póly v levé polorovině - stabilní
  - některé póly v pravé polorovině - nestabilní
  - žádné póly v pravé polorovině, některé na imaginární ose - nelze rozhodnout

Příklad výpočtu rovnovážného stavu

- rovnice fyzikálního kyvadla s viskózním třením

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \omega$$
$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{g}{l}\sin\alpha - \frac{k}{m}\omega$$

- rovnovážný stav

$$0 = \omega$$
$$0 = -\frac{g}{l}\sin\alpha$$

- rovnovážný stav
  $x_0 = (\alpha_0, \omega_0) = (k\pi, 0) \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

Příklad výpočtu rovnovážného stavu

- všechny rovnovážné stavy jsou izolované - jedná se diskrétní body
- při malém kladném/záporném vychýlení z rovnovážné polohy $2k\pi$ bude úhlové zrychlení záporné/kladné a kyvadlo se vrátí zpět - stabilní rovnovážný stav
- při malém kladném/záporném vychýlení z rovnovážné polohy $(2k + 1)\pi$ bude úhlové zrychlení kladné/záporné a kyvadlo se vzdaluje od původní polohy - nestabilní rovnovážný stav
- odpovídá fyzikální představě, kdy dolní poloha je stabilní rovnovážná poloha a horní poloha je labilní rovnovážná poloha

Příklad výpočtu rovnovážného stavu

- linearizace v okolí rovnovážného stavu
  $x_0 = (2k\pi, 0)$

$$\frac{\mathrm{d}(\alpha_0 + \Delta\alpha)}{\mathrm{d}t} = \omega_0 + \Delta\omega$$
$$\frac{\mathrm{d}(\omega_0 + \Delta\omega_0)}{\mathrm{d}t} = -\frac{g}{l}\sin(\alpha_0 + \Delta\alpha_0) - \frac{k}{m}(\omega_0 + \Delta\omega)$$

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\alpha}{\mathrm{d}t} = \Delta\omega$$
$$\frac{\mathrm{d}\Delta\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{g}{l}\sin\Delta\alpha - \frac{k}{m}\Delta\omega$$

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\alpha}{\mathrm{d}t} = \Delta\omega$$
$$\frac{\mathrm{d}\Delta\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{g}{l}\Delta\alpha - \frac{k}{m}\Delta\omega$$

Příklad výpočtu rovnovážného stavu

- charakteristický polynom

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}$$

$$\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} p & -1 \\ \frac{g}{l} & p + \frac{k}{m} \end{vmatrix} = p^2 + p\frac{k}{m} + \frac{g}{l}$$

- z teorie lineárních systémů víme, že pokud má polynom druhého řádu u všech koeficientů stejné znaménko, jeho kořeny jsou v levé polorovině
  - lineární náhrada v okolí bodu $x_0 = (2k\pi, 0)$ je stabilní $\Rightarrow$ rovnovážný stav $x_0 = (2k\pi, 0)$ je stabilní

Příklad výpočtu rovnovážného stavu

- linearizace v okolí rovnovážného stavu
  $x_0 = ((2k+1)\pi, 0)$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_0 + \Delta\alpha}{\mathrm{d}t} = \omega_0 + \Delta\omega$$
$$\frac{\mathrm{d}\omega_0 + \Delta\omega_0}{\mathrm{d}t} = -\frac{g}{l}\sin(\alpha_0 + \Delta\alpha_0) - \frac{k}{m}(\omega_0 + \Delta\omega)$$

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\alpha}{\mathrm{d}t} = \Delta\omega$$
$$\frac{\mathrm{d}\Delta\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{g}{l}\sin\Delta\alpha - \frac{k}{m}\Delta\omega$$

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\alpha}{\mathrm{d}t} = \Delta\omega$$
$$\frac{\mathrm{d}\Delta\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{g}{l}\Delta\alpha - \frac{k}{m}\Delta\omega$$

Příklad výpočtu rovnovážného stavu

- charakteristický polynom

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}$$

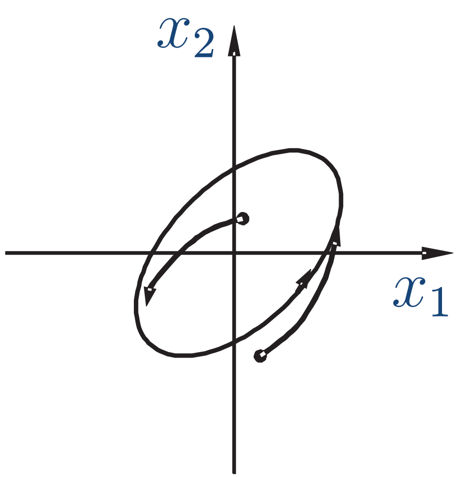
$$\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} p & -1 \\ -\frac{g}{l} & p + \frac{k}{m} \end{vmatrix} = p^2 + p\frac{k}{m} - \frac{g}{l}$$

- z teorie lineárních systémů víme, že pokud má polynom druhého řádu u některého koeficientu opačné stejné znaménko, je alespoň jeden z kořenů v pravé polorovině
  - lineární náhrada v okolí bodu $x_0 = ((2k+1)\pi, 0)$ je nestabilní $\Rightarrow$ rovnovážný stav $x_0 = ((2k+1)\pi, 0)$ je nestabilní

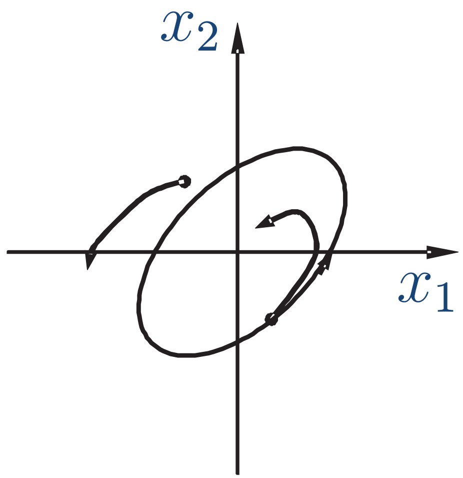
Mezní cyklus

- systém může dosáhnout ustáleného chování, kdy průmět stavové trajektorie má podobu uzavřené křivky $\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t)$, kde T je perioda mezního cyklu
- izolovanost
  - izolovaný - pro každý bod nacházející se na mezním cyklu existuje ε-okolí, které nezahrnuje žádné body jiného mezního cyklu
  - neizolovaný - pokud není splněna podmínka izolovanosti
- stabilita
  - stabilní - při vychýlení trajektorie z mezního cyklu se trajektorie vrátí zpět na mezní cyklus
  - nestabilní - při vychýlení se trajektorie vzdaluje od mezního cyklu
  - stabilita mezního cyklu bude diskutována později během výkladu metody harmonické rovnováhy
- určení existence
  - analyticky - obvykle značně náročné a ne vždy řešitelné
  - indexové teorémy a harmonická rovnováha - bude diskutováno později

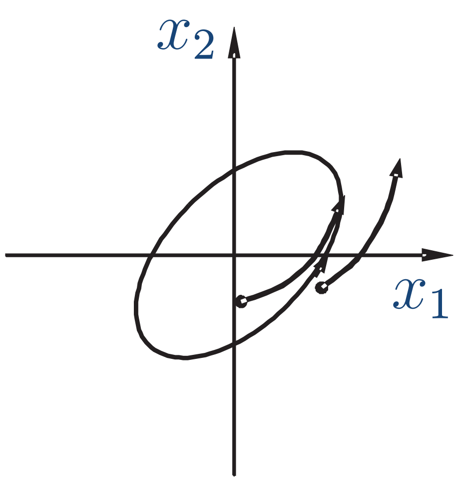
Stabilita mezního cyklu



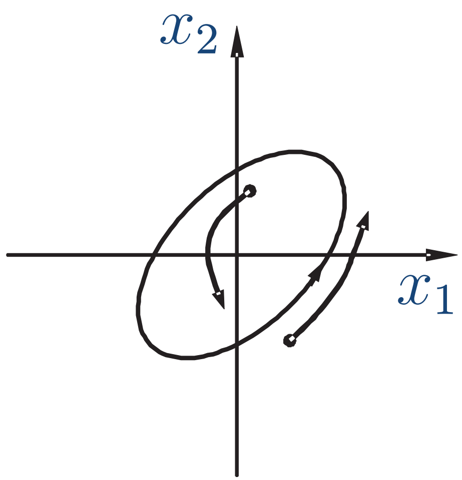
(a) stabilní



(b) nestabilní



(c) polostabilní



(d) polostabilní

Příklad mezního cyklu

- rovnice netlumeného fyzikálního kyvadla

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \omega \qquad \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{g}{l}\sin\alpha$$

- předpokládejme, že výchylka kyvadla je malá, systém lze pak linearizovat

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \omega \qquad \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{g}{l}\alpha$$

- řešení v časové oblasti je

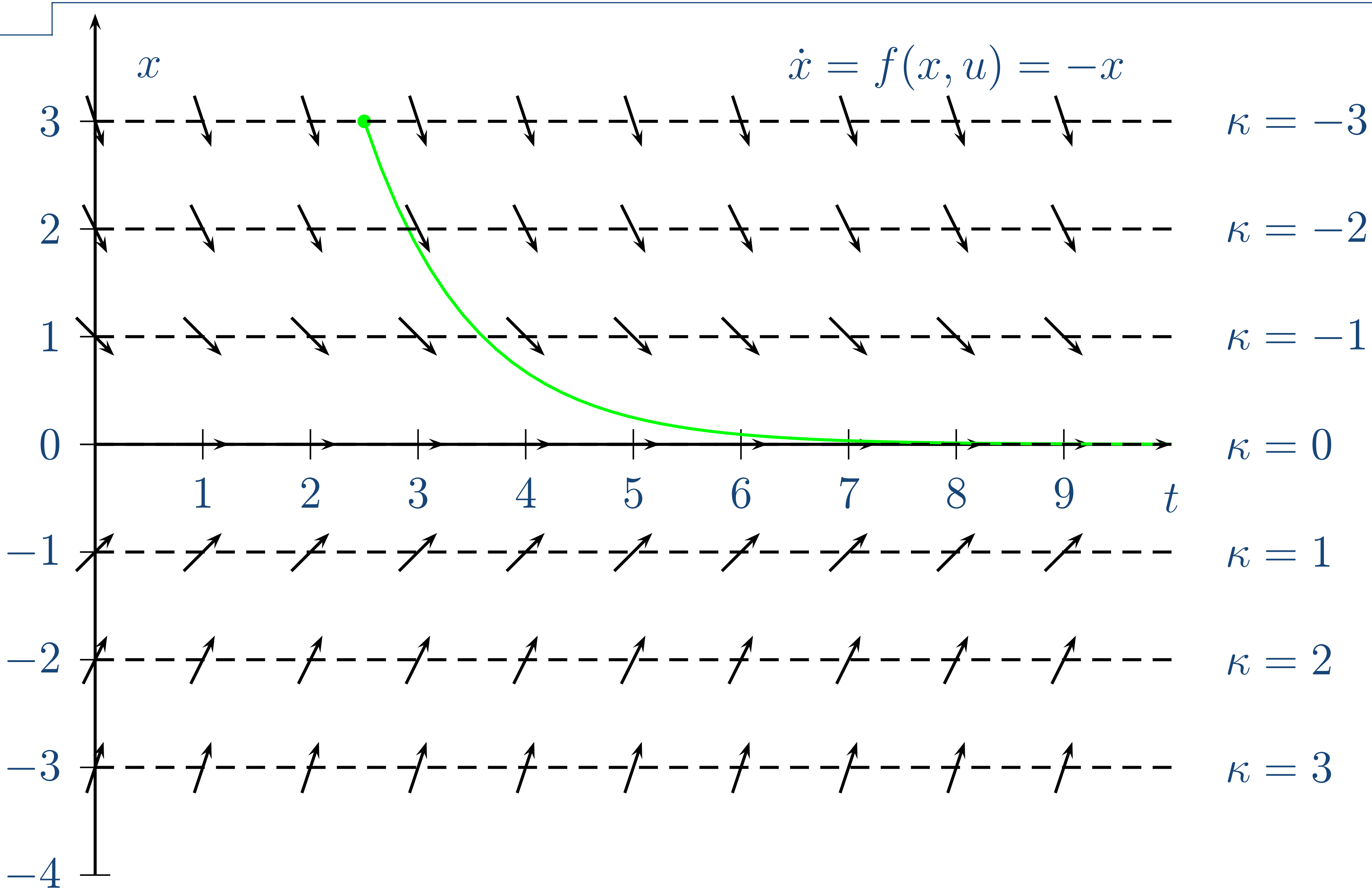
$$\alpha(t) = \alpha(0)\cos\Omega_0 t + \frac{\omega(0)}{\Omega_0}\sin\Omega_0 t$$

$$\omega(t) = \omega(0)\cos\Omega_0 t - \Omega_0\alpha(0)\sin\Omega_0 t \qquad \Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

- řešení je periodické, existuje mezní cyklus
- mezní cyklus není izolovaný, pro změněné počáteční podmínky bude existovat jiný mezní cyklus v těsné blízkosti

Sestavení trajektorie systému prvního a druhého řádu

Trajektorie systému prvního řádu



- uvažujeme systém prvního řádu $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, u)$
- rovinu pokryjeme směrovými vektory
  - v každém bodu roviny určují směrnici tečny ke stavové trajektorii
  - směrnice směrového vektoru $\kappa = f(x, u)$
- izoklina - křivka spojující body s $\kappa = konst$
- pole směrových vektorů umožňuje vytvoření globální představy o chování stavové trajektorie
- pokud je to možné snažíme se vhodnou substitucí převést systém na neřízený - zjednodušení řešení

Trajektorie systémů druhého řádu

- systém druhého řádu

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u)$$

- stavovou trajektorii je možné na určitém úseku popsat závislostí $x_2 = f(x_1)$
- tečna k trajektorii má směrnici

$$\kappa = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \frac{\mathrm{d}f(x_1)}{\mathrm{d}x_1}$$

- derivace závislosti stavových proměnných podle času

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f(x_1)}{\mathrm{d}x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}$$
$$\frac{\mathrm{d}f(x_1)}{\mathrm{d}x_1} = \frac{\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}} = \frac{f_2(x_1, x_2, u)}{f_1(x_1, x_2, u)} = \kappa$$

- pokud je to možné snažíme se převést vhodnou substitucí systém na neřízený

- uvažujme systém popsaný rovnicemi

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = u - \omega_0^2 x_1 \qquad u = konst$$

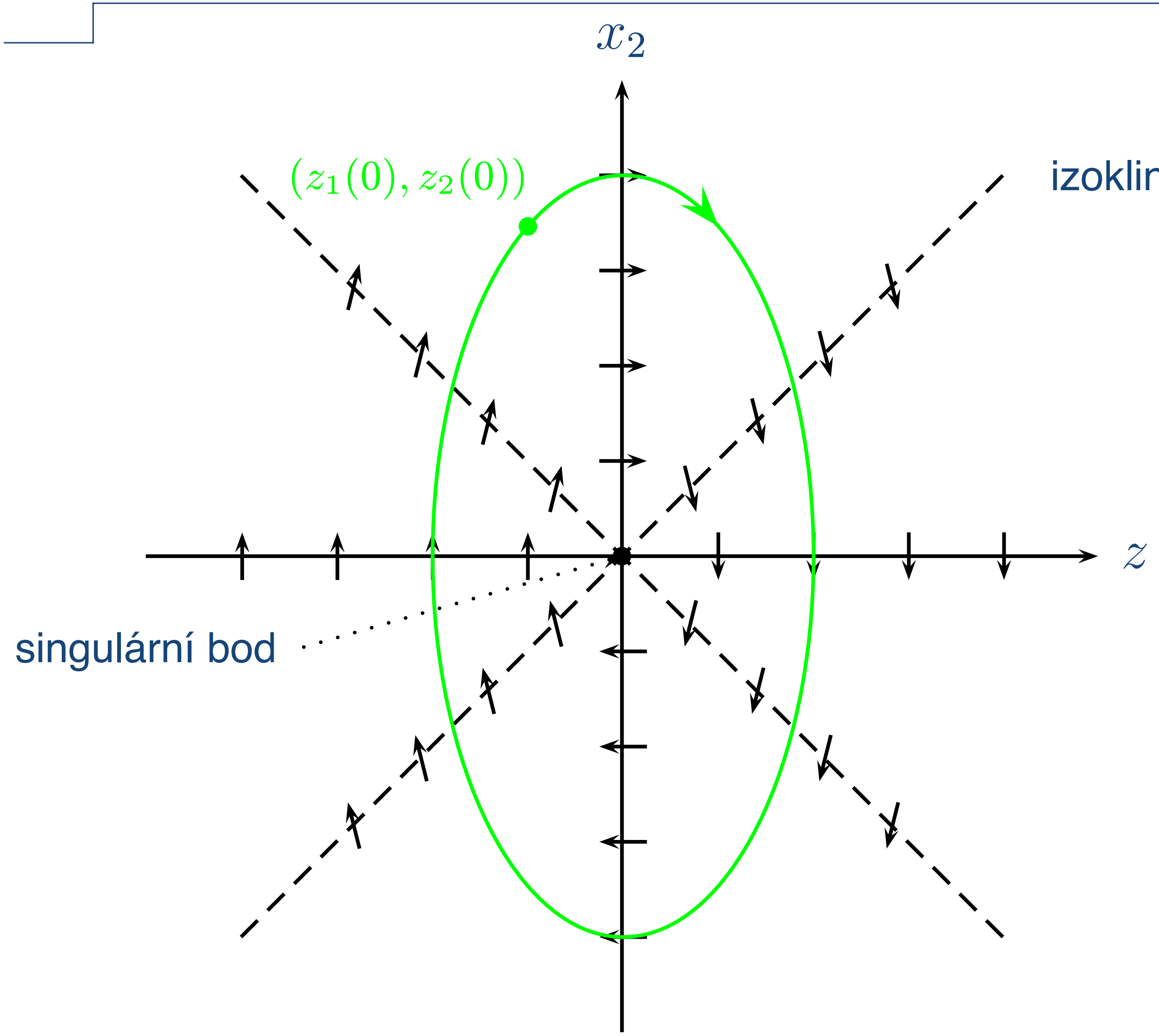
- převod na neřízený systém substitucí $x_1 = z + \frac{u}{\omega_0^2}$

$$\dot{z} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\omega_0^2 z$$

- směrnice tečen k stavové trajektorii $\kappa = \frac{-\omega_0^2 z}{x_2}$
- rovnice izoklin $x_2 = \frac{-\omega_0^2 z}{\kappa}$ - izokliny jsou přímky
- singulární bod $z = x_2 = 0$

Příklad zjištění trajektorie systému druhého řádu



- uvažujme opět systém popsaný rovnicemi

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = u - \omega_0^2 x_1 \qquad u = konst$$

- použijeme jinou substituci

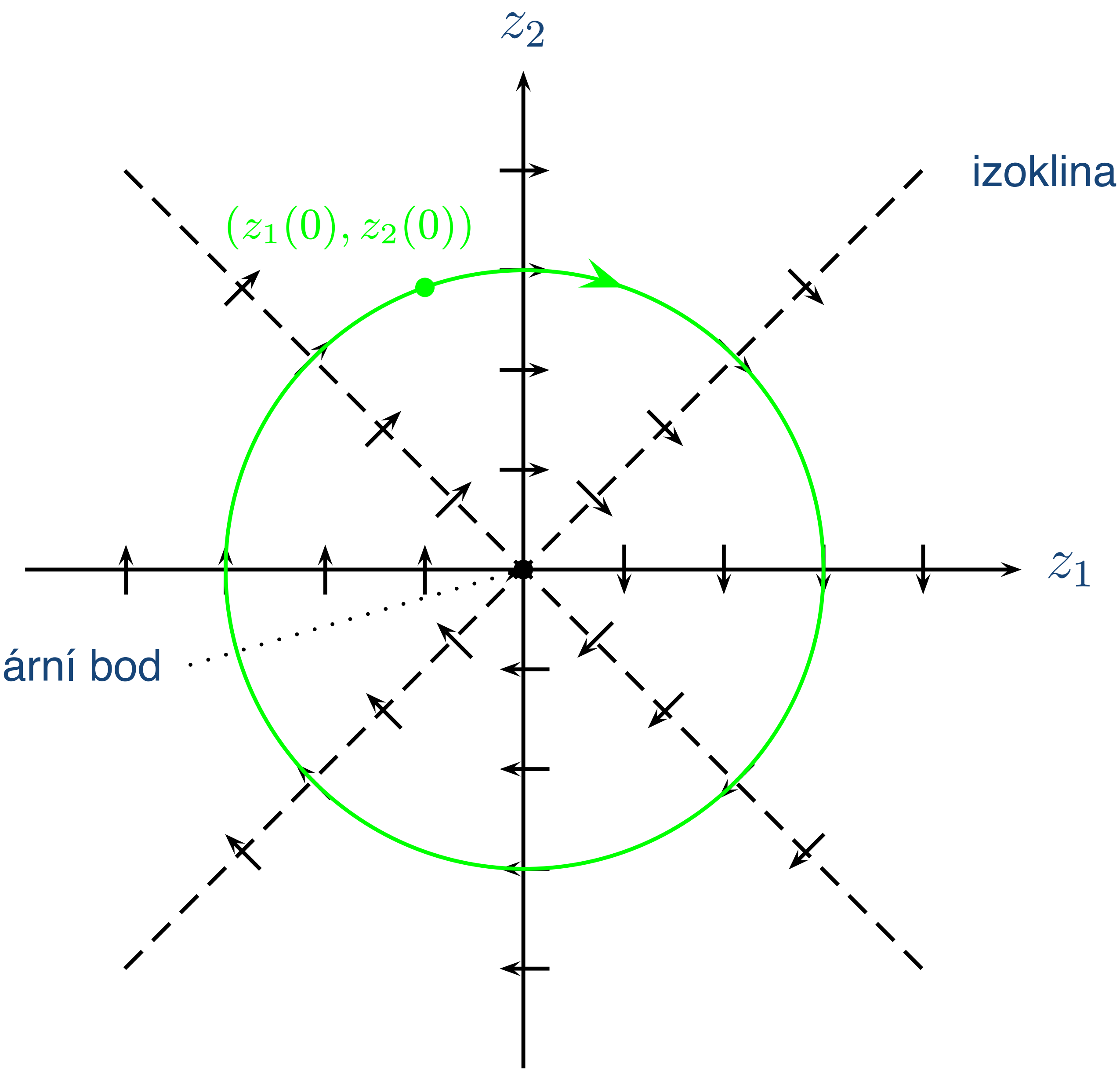
$$x_1 = z_1 + \frac{u}{\omega_0^2}$$
$$x_2 = \omega_0 z_2$$

- stavové rovnici po substituci

$$\dot{z}_1 = \omega_0 z_2$$
$$\dot{z}_2 = -\omega_0 z_1$$

- směrnice tečen k trajektorii $\kappa = -\frac{z_1}{z_2}$
- izoklina $z_2 = -\frac{z_1}{\kappa}$

Příklad zjištění trajektorie systému druhého řádu



- směrnic izokliny $K = -\frac{1}{\kappa}$
- z analytické geometrie je známo, že pokud pro směrnice dvou přímek K_1, K_2 platí $K_1 = -\frac{1}{K_2}$ pak jsou tyto přímky kolmé
- v každém bodě stavové roviny (z_1, z_2) je tečna k trajektorii kolmá na izoklinu
- stavová trajektorie v souřadnicích (z_1, z_2) je kružnice
- použitá substituce představuje posunutí o $\frac{u}{\omega_0^2}$ v souřadnici x_1 a změna měřítka koeficientem ω_0 v souřadnici x_2
- stavová trajektorie původního systému jsou elipsy se středem v bodě $(\frac{u}{\omega_0^2}, 0)$

Trajektorie v okolí singulárních bodů

- nelineární systém lze linearizovat rozvojem do Taylorovy řady v blízkosti singulárního bodu
- v blízkosti singulárního bodu budou trajektorie nelineárního systému odpovídat trajektoriím lineární náhrady
- stavový portrét nelineárního systému se bude v okolí singulárního bodu shodovat se stavovým portrétem lineární náhrady

Trajektorie v okolí singulárních bodů

- předpokládejme linearizaci v okolí singulárního bodu

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

- předpokládejme, že matice $\mathbf{A}$ je regulární

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

- vypočteme vlastní čísla λ_1, λ_2 z rovnice

$$\det[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}] = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

- je známo, že pro každý lineární systém je možné najít substituci $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$, která systém převede do Jordanova tvaru

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{B}\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{z}$$

- stavový portrét systému v Jordanově tvaru lze nalézt poměrně snadno a následně jej pomocí transformace $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ převézt zpět

Vlastní čísla jsou reálná

- stavové rovnice

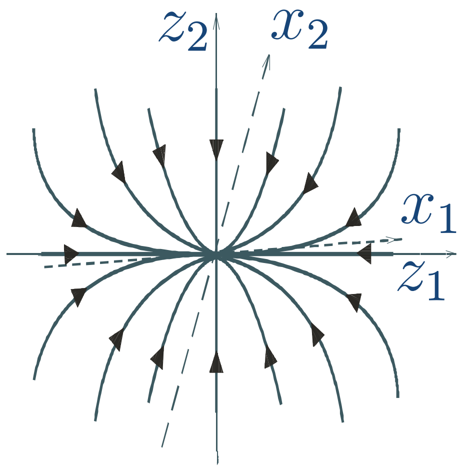
$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{z}$$

- řešení v časové oblasti

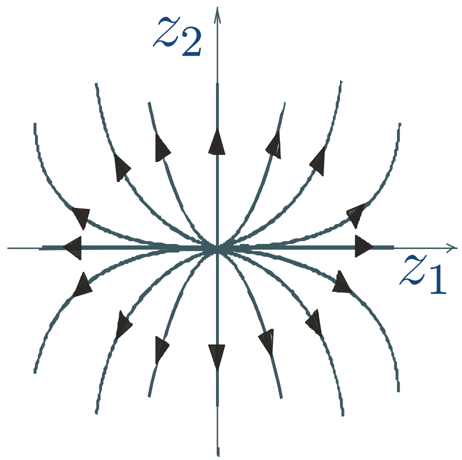
$$z_1 = z_1(0)e^{\lambda_1 t}$$
$$z_2 = z_2(0)e^{\lambda_2 t}$$

- u stabilních systémů směřují trajektorie do singulárního bodu, u nestabilních ze singulárního bodu

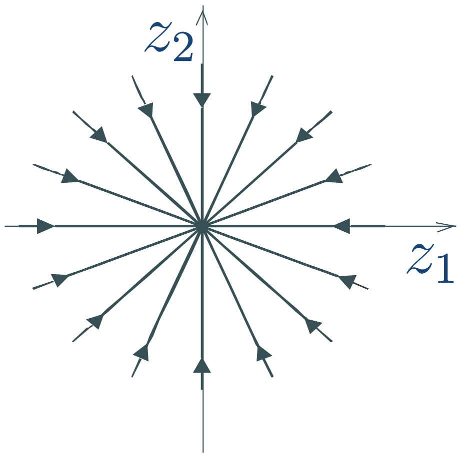
Vlastní čísla jsou reálná



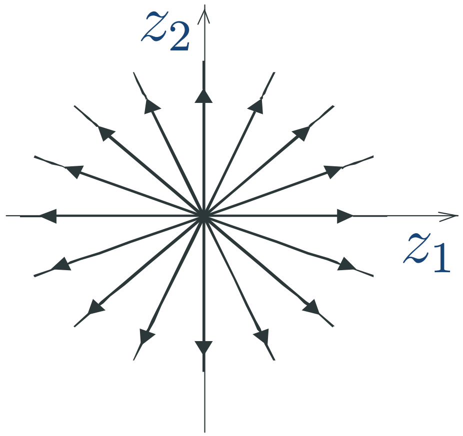
(a) Stabilní uzel $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$



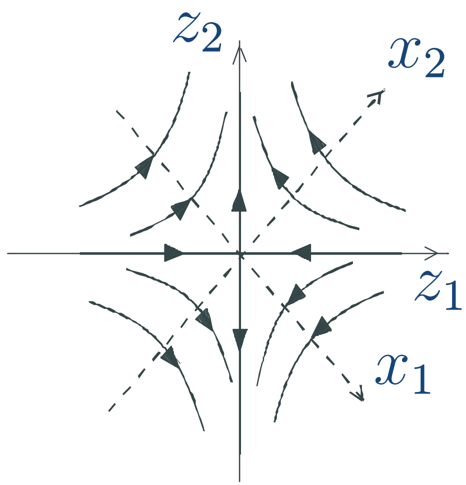
(b) Nestabilní uzel $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$



(c) Stabilní dikritický uzel $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

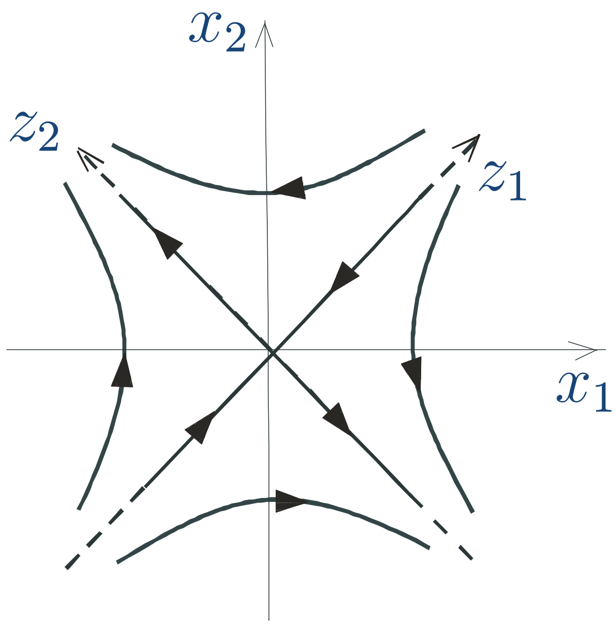


(d) Nestabilní dikritický uzel $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$

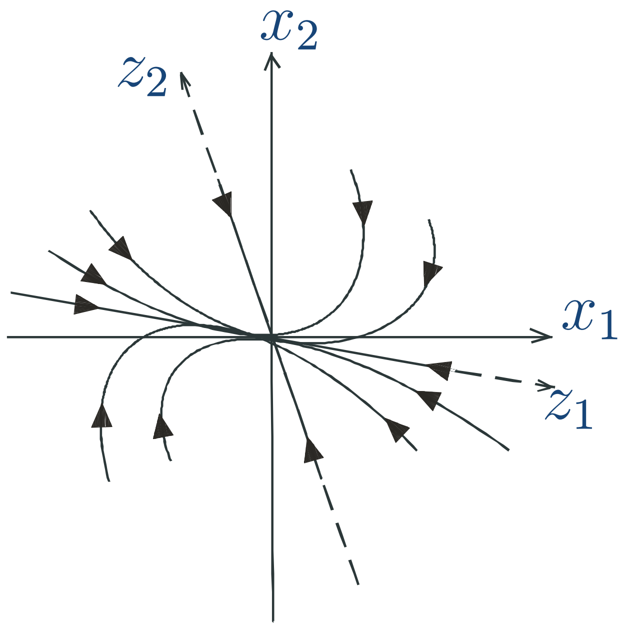


(e) Sedlo $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

Stavový portrét po zpětné transformaci



(a) Sedlo $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$



(b) Stabilní uzel $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

- Jordanův kanonický tvar pro systém s komplexními póly $\lambda_1 = \alpha + j\beta, \lambda_2 = \alpha - j\beta$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \mathbf{z}$$

- zavedeme polární souřadnice

$$r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$$
$$\phi = \mathrm{arctg}\,\frac{z_2}{z_1}$$

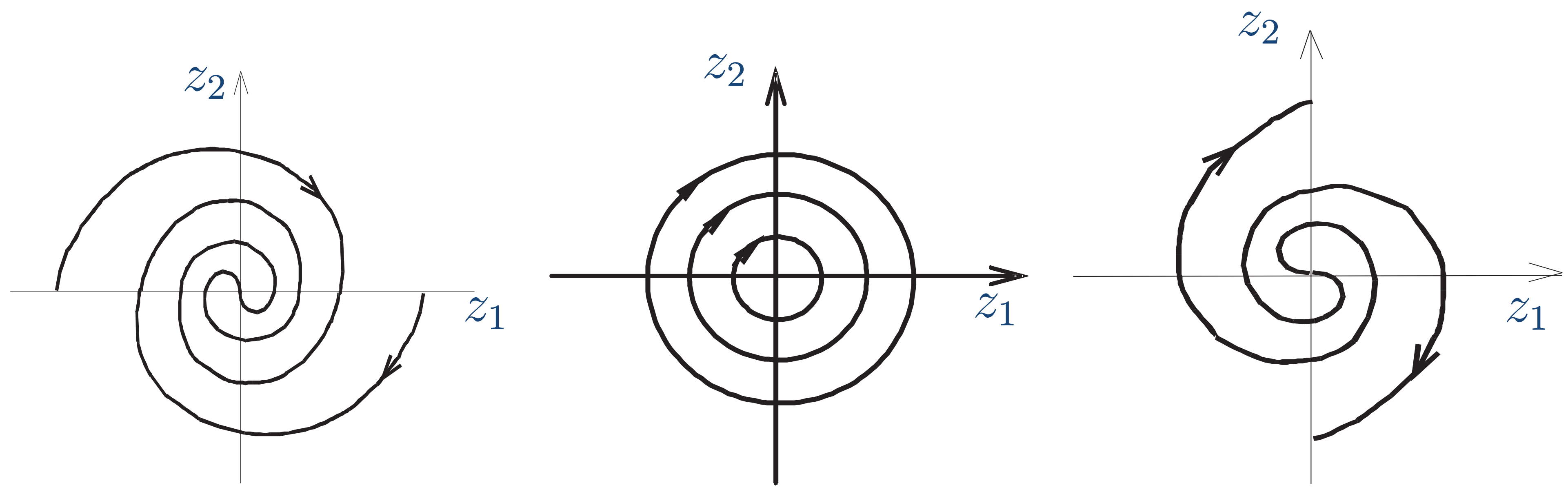
- systém přejde do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \alpha r$$
$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\beta$$

- řešení v časové oblasti

$$r = r(0)e^{\alpha t}$$
$$\phi = \phi(0) - \beta t$$

Vlastní čísla komplexní



(c) Stabilní ohnisko $\alpha < 0$ (d) Střed $\alpha = 0$ (e) Nestabilní ohnisko $\alpha > 0$

Matice $\mathbf{A}$ singulární

- předpokládejme $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}$$

- řešení v časové oblasti

$$z_1 = z_1(0)e^{\lambda_1 t}$$
$$z_2 = z_2(0)$$

- trajektorie jsou přímky $z_2 = konst$
- singulární body tvoří přímka $z_1 = 0$

- předpokládejme $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}$$

- řešení v časové oblasti

$$z_1 = z_1(0) + z_2(0)t$$
$$z_2 = z_2(0)$$

- trajektorie jsou přímky $z_2 = konst$
- singulární body tvoří přímka $z_2 = 0$

Matice A singulární

- předpokládejme $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \mathbf{A} = \mathbf{0}$

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}$$

- řešení v časové oblasti

$$z_1 = z_1(0)$$
$$z_2 = z_2(0)$$

- každý bod stavové roviny je singulárním bodem
- singulární matice $\mathbf{A}$ odpovídá systému s nezavazbeným integrátorem - systém s astatismem

Příklad

- předpokládáme fyzikální kyvadlo popsané rovnicemi $\dot{\alpha} = \omega \quad \dot{\omega} = -\frac{g}{l} \sin \alpha$
- singulární body $\omega_0 = 0 \quad \alpha_0 = k\pi$
- linearizace v okolí bodu $\omega_0 = 0 \quad \alpha_0 = 2k\pi$

$$\dot{\Delta\alpha} = \Delta\omega$$

$$\dot{\Delta\omega} = -\frac{g}{l}\alpha$$

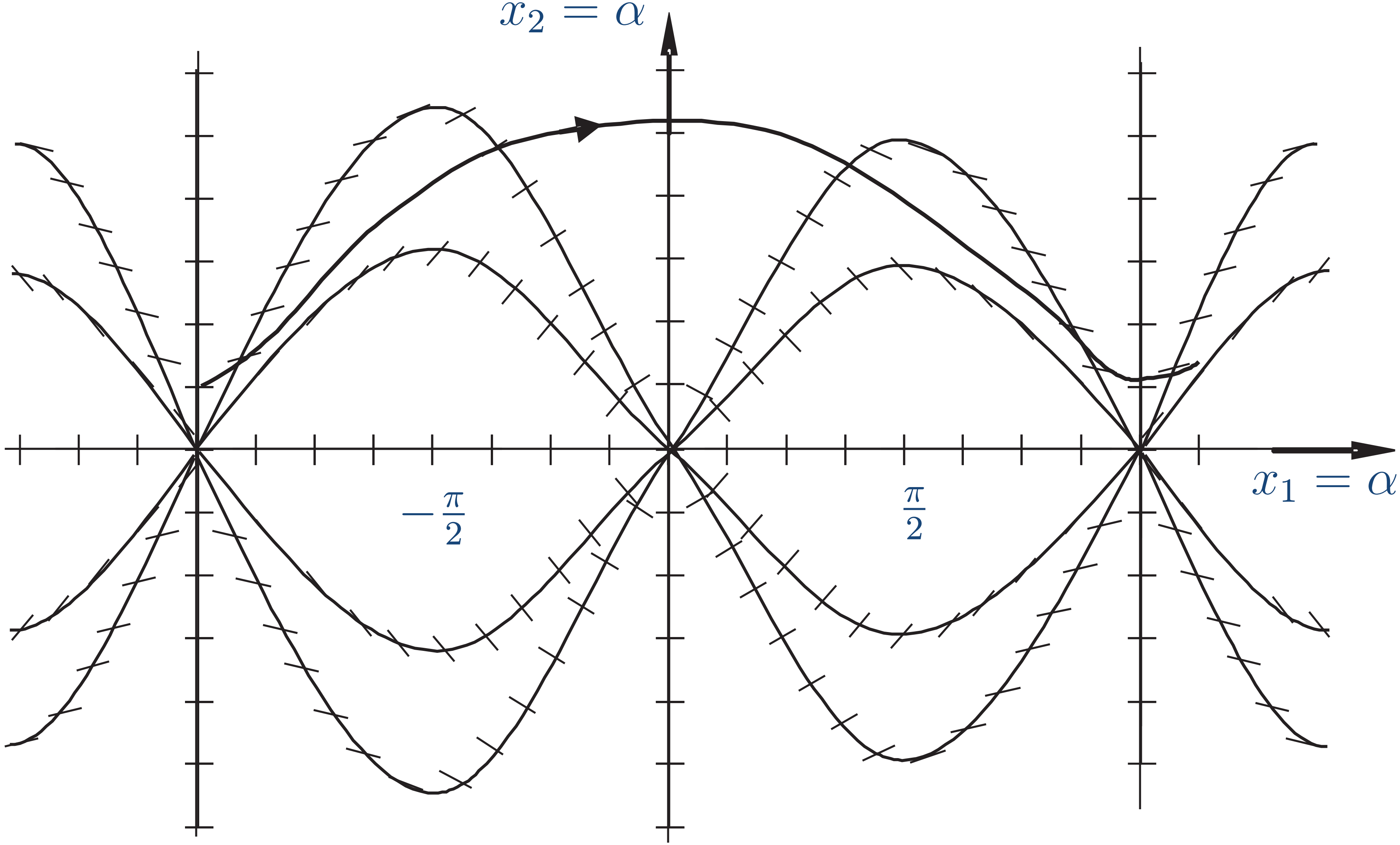
- charakteristická čísla $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{g}{l}}$ jsou ryze imaginární - portrét typu střed
- linearizace v okolí bodu $\omega_0 = 0 \quad \alpha_0 = (2k+1)\pi$

$$\dot{\Delta\alpha} = \Delta\omega$$

$$\dot{\Delta\omega} = \frac{g}{l}\alpha$$

- charakteristická čísla $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$ jsou reálná - portrét typu sedlo

- směrnice tečen $\kappa = \frac{\dot{\omega}}{\dot{\alpha}} = -\frac{g}{l}\frac{\sin\alpha}{\omega}$
- rovnice izoklin $\omega = -\frac{g}{l}\frac{\sin\alpha}{\kappa}$
- izokliny mají sinusový průběh



$x_2 = \dot{\alpha}$
$x_1 = \alpha$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$

Postup pro metodu izoklin

1. vhodnou substitucí převedeme systém na neřízený, t-invariantní
   - stavový portrét lze rozumně sestavit jen pro neřízené systémy (případně systémy s konstantním řízením), jejichž parametry a struktura nezávisí na čase
   - pro studium regulačních dějů je užitečné volit substituci tak, aby jednou ze stavových proměnných byla přímo regulační odchylka
2. vypočteme singulární body systému
3. provedeme linearizaci v okolí singulárních bodů
4. podle typu singulárního bodu určíme stavový portrét v blízkosti singulárního bodu
5. pokud je systém po částech lineární, určíme ve stavové rovině meze platnosti jednotlivých lineárních náhrad
6. určíme izokliny - křivky, na kterých je směrnice tečny k trajektorii konstantní
7. pokud jsou izokliny přímky, najdeme izoklinu se sklonem odpovídajícím příslušné směrnici tečny k trajektorii - trajektorie nemůže tuto izoklinu protnout
8. stavovou rovinu pokryjeme polem směrových vektorů a načrtneme možné průběhy stavové trajektorie