Regulace a řízení II

Stabilita nelineárních systémů

Obsah

Obsah přednášky

- Stabilita nelineárních systémů
- Ljapunovova funkce

Stabilita nelineárních dynamických systémů

- lineární systém
  - systém je stabilní, pokud se po ukončení působení vstupního signálu vrátí zpět do počátečního stavu
  - stabilita je záležitostí vnitřní struktury systému
  - stabilita nezávisí na počátečním stavu a vstupním signálem
  - stabilitu je možné ověřit relativně snadno analyticky nebo použitím algebraických kritérií
- nelineární systém
  - existuje celá řada různých definic stability
  - za stabilní je možné považovat i periodické řešení
  - stabilita závisí nejen na vnitřní struktuře, ale i počátečním stavu a vstupním signálu
  - hovoříme spíše o stabilitě trajektorie

Ljapunovova definice stability

- stabilitou nelineárních diferenciální rovnic se zabýval ruský matematik Ljapunov již koncem 19 století
- uvažujeme nelineární neřízený (volný) dynamický systém

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

- předpokládáme, že systém má rovnovážný stav $\mathbf{x}_0$
- v čase t_0 se systém nachází v počátečním stavu $\mathbf{x}_{t_0}$

- Rovnovážný stav $\mathbf{x}_0$ volného dynamického systému je lokálně stabilní, jestliže pro libovolné reálné číslo $\varepsilon > 0$ a $t_0 \in \langle \tau; \infty \rangle$ existuje takové reálné číslo $\delta(\varepsilon, t_0)$, že při $\|\mathbf{x}_{t_0} - \mathbf{x}_0\| \leq \delta$ je $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_{t_0}, t_0) - \mathbf{x}_0\| \leq \varepsilon$ pro všechna $t > t_0$

- popisuje stabilitu v malém okolí rovnovážného stavu
- lze najít takové okolí singulárního bodu, že všechny trajektorie začínající v této oblasti směřují do zvoleného libovolně malého okolí singulárního bodu
- lokálně stabilní může být i systém, jehož trajektorie po vychýlení se nevrací k počátku

Lokální asymptotická stabilita

- Rovnovážný stav $\mathbf{x}_0$ volného dynamického systému je lokálně asymptoticky stabilní tehdy, když platí
  1. je lokálně stabilní podle definice lokální stability
  2. existuje reálné číslo $\Delta(\varepsilon, t_0)$ takové, že pro každé $\|\mathbf{x}_{t_0} - \mathbf{x}_0\| \leq \Delta$ a $t_0 \in \langle \tau; \infty \rangle$ platí $\lim\limits_{t \to \infty} \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_{t_0}, t_0) - \mathbf{x}_0\| = 0$
- existuje okolí singulárního bodu, přičemž trajektorie z něj vycházející s rostoucím časem konvergují k singulárnímu bodu
- stabilitu lze vyšetřit linearizací systému v okolí singulárního bodu a posouzením stability lineární náhrady

Příklad lokální asymptotické stability

- předpokládejme systém s parametry $a = c = 1{,}b = 2$

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_2$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = \frac{b^2}{2}x_1 - c^2x_1^3 - 2ax_2$$

- singulární body $(x_1, x_2) \in \left\{(0;0), \left(\frac{b}{c\sqrt{2}};0\right), \left(-\frac{b}{c\sqrt{2}};0\right)\right\}$
- linearizace rozvojem do Taylorovy řady

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{b^2}{2} - 3c^2x_1^2 & -2a \end{bmatrix}_{x_0}$$

Příklad lokální asymptotické stability

- linearizace v okolí $(0,0)$ - vlastní čísla $\lambda_1 = 0.73$,$\lambda_2 = -2.73$ - nestabilní

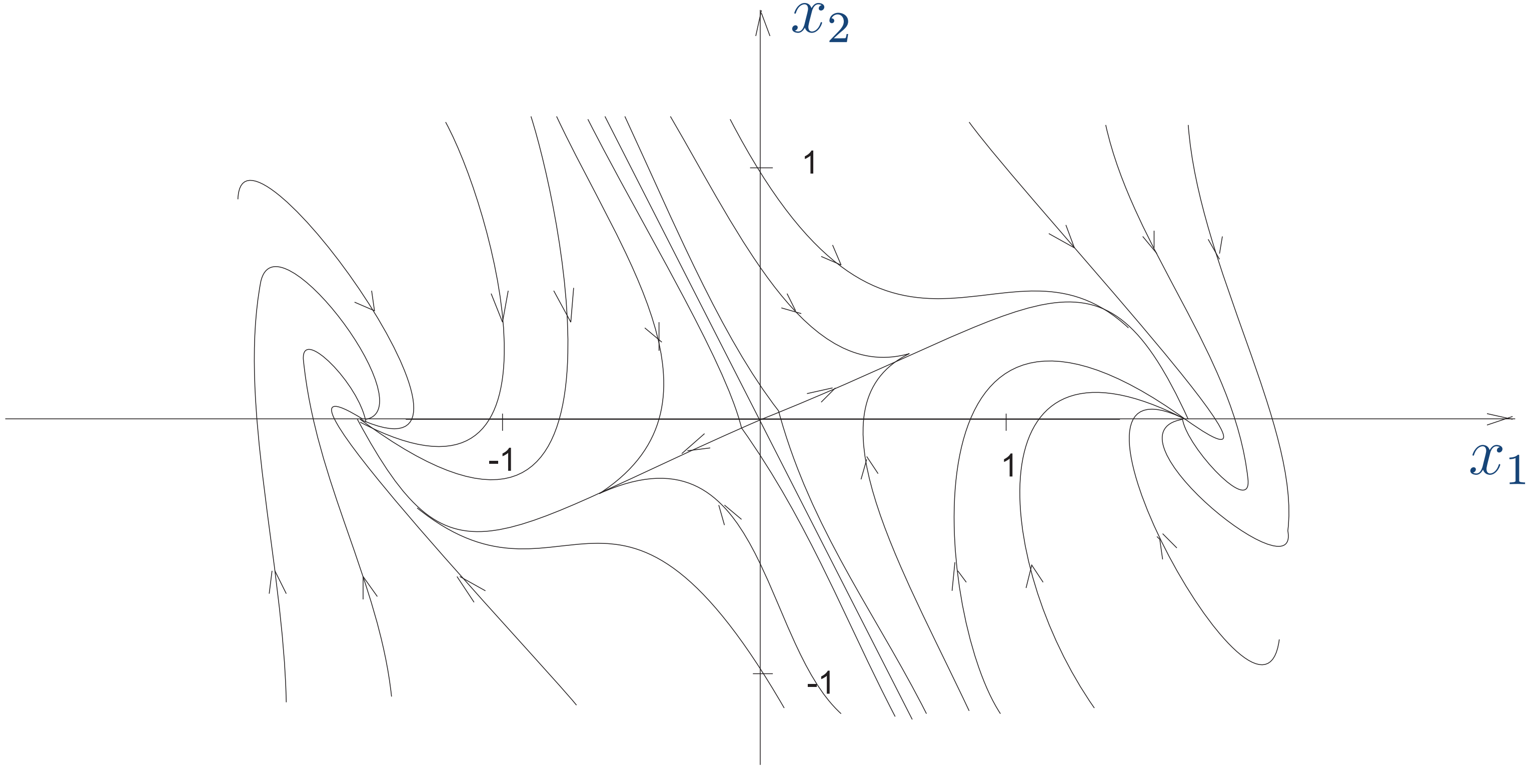
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

- linearizace v okolí $\left(\pm\frac{b}{c\sqrt{2}}; 0\right)$ - vlastní čísla $\lambda_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3}$ - stabilní

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

- systém je lokálně stabilní v blízkosti singulárních bodů $\left(\pm\frac{b}{c\sqrt{2}}; 0\right)$ a není lokálně stabilní v okolí $(0,0)$

Příklad lokální asymptotické stability



Globální stabilita (stabilita ve velkém)

- Nechť rovnovážný stav $\mathbf{x}_0$ systému je lokálně asymptoticky stabilní. Množina všech všech bodů $\mathbf{x}_{t_0}$ ze stavového prostoru $\mathbb{R}^n$, pro které platí $\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_{t_0}, t_0) - \mathbf{x}_0\| = 0$ při $t_0 \in \langle \tau; \infty \rangle$ se nazývá oblast přitažlivosti řešení. Je-li oblastí přitažlivosti celý stavový prostor, pak je rovnovážný stav volného dynamického systému globálně asymptoticky stabilní.
- definice globální stability je tak silná, že ji vyhovuje jen málo reálných nelineárních systémů
- všechny lineární systémy, které jsou stabilní podle kritérií stability lineárních systémů, jsou globálně asymptoticky stabilní

- Nechť je rovnovážný stav $\mathbf{x}_0$ systému lokálně asymptoticky stabilní a existuje oblast přitažlivosti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Pak je rovnovážný stav volného dynamického systému prakticky stabilní v oblasti Ω.
- obvykle najdeme několik oblastí stavového prostoru, na kterých je systém prakticky stabilní

Stabilita trajektorie

- definice stability popisují stabilitu rovnovážného stavu
- snadno lze definice rozšířit na stabilitu trajektorie
- předpokládejme, že známe řešení $\mathbf{x}_S$ stavových rovnic, tj. platí

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_S}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_s, t)$$

- chceme definovat stabilitu trajektorie $\mathbf{x}_S$
- zavedeme odchylku mezi aktuální trajektorií $\mathbf{x}$ a vyšetřovanou trajektorií $\mathbf{x}_S$

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_S$$

- dynamický systém odchylek

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_S}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_S + \Delta\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_S, t)$$

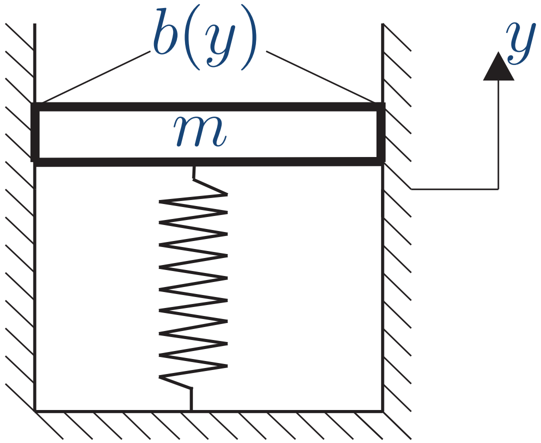
- soustava diferenciálních rovnic vzhledem k $\Delta\mathbf{x}$ se singulárním bodem v počátku
- stabilita odchylkového systému odpovídá stabilitě trajektorie
- nutnost znalosti řešení $\mathbf{x}_S$, rovnice mají obvykle složitý tvar

Ljapunovova metoda ověření stability

Ljapunovova metoda

- *první Ljapunovova metoda*
  - je nutné vyřešit stavové rovnice, řešení (průběh trajektorie) se porovnává s definicemi stability
  - zjištění lokální asymptotické stability vyšetření stability lineární náhrady v okolí singulárního bodu
    - o stabilitě nelze rozhodnout, pokud má lineární náhrada póly na imaginární ose - vlivem zanedbaných členů Taylorovy řady budou posunuty do stabilní nebo nestabilní oblasti
- *druhá Ljapunovova metoda*
  - nehledáme řešení systému
  - snažíme se najít tzv. Ljapunovovu funkci
  - pokud Ljapunovovu funkci nalezneme, je systém stabilní, v opačném případě nelze rozhodnout

Příklad k výkladu Ljapunovovy funkce



- diferenciální rovnice $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + b\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) + k(y) = 0$
- stavové rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_2$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -k(x_1) - b(x_2)$$

- singulární bod $x_1 = x_2 = 0$
- chceme vyšetřit stabilitu

Příklad k výkladu Ljapunovovy funkce

- předpokládejme, že v systému není tlumení $b(x_2) = 0$
- řešení trajektorie

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{k(x_1)}{x_2}$$

$$\frac{x_2^2}{2} + \int\limits_0^{x_1} k(x_1)dx_1 = konst$$

- řešení odpovídá křivkám, na kterých je zachována konstantní celková energie systému

Příklad k výkladu Ljapunovovy funkce

- předpokládejme systém s tlumením, kdy platí $x_2 b(x_2) > 0$ pro $x_2 \neq 0$
- celková energie systému

$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int\limits_0^{x_1} k(x_1)dx_1$$

- časová změna energie

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = x_2\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + k(x_1)\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_2\left[\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + k(x_1)\right] = -x_2 b(x_2)$$

- stavová trajektorie probíhá tak, že energie systému klesá
- je zřejmé, že trajektorie směřuje k singulárnímu bodu a systém je stabilní

Příklad k výkladu Ljapunovovy funkce