Regulace a řízení II

Stabilita nelineárních systémů

Obsah

Obsah přednášky

- matematický aparát
- Ljapunovova metoda
- volba Ljapunovovy funkce

Obsah
Matematika
Ljapunovova metoda
Volba LF

Obsah

Matematika
Vlastní čísla
Definitnost
Kvadratická forma
Sylvestrovo kritérium
Příklad definitnosti

Ljapunovova metoda

Volba LF

Matematický aparát k výkladu Ljapunovovy funkce

$$\mathbf{AX} = \lambda \mathbf{X}$$

- pokud existuje $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n \neq 0$
  - $\mathbf{X}$ je vlastní vektor matice $\mathbf{A}$
  - skalár λ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$
- úpravou rovnice dostaneme $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{X} = 0$
- podle Cramerova pravidla existuje nenulové řešení jen když

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

- charakteristický polynom $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$
- vlastní čísla λ vypočteme jako kořeny charakteristického polynomu

Obsah

Matematika
Vlastní čísla
Definitnost
Kvadratická forma
Sylvestrovo kritérium
Příklad definitnosti

Ljapunovova metoda

Volba LF

Definitnost funkce

- skalární funkce $f(\mathbf{x})$ je pozitivně definitní v oblasti $\mathbb{S}$, pokud

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{S} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow f(\mathbf{x}) > 0 \quad \wedge f(\mathbf{0}) \geq 0$$

- skalární funkce $f(\mathbf{x})$ je pozitivně semidefinitní v oblasti $\mathbb{S}$, pokud

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{S} \quad f(\mathbf{x}) \geq 0$$

- skalární funkce $f(\mathbf{x})$ je negativně definitní v oblasti $\mathbb{S}$, pokud

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{S} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow f(\mathbf{x}) < 0 \quad \wedge f(\mathbf{0}) \leq 0$$

- skalární funkce $f(\mathbf{x})$ je negativně semidefinitní v oblasti $\mathbb{S}$, pokud

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{S} \quad f(\mathbf{x}) \leq 0$$

- skalární funkce $f(\mathbf{x})$ je indefinitní v oblasti $\mathbb{S}$, pokud mění v oblasti $\mathbb{S}$ znaménko

Definitnost kvadratické formy

- kvadratická forma

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \langle \mathbf{x}; \mathbf{A} \mathbf{x} \rangle \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^T$$

- lze dokázat následující věty
  - kvadratická forma $Q(\mathbf{x})$ je pozitivně definitní, právě když jsou všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ kladná. Matice $\mathbf{A}$ je pak pozitivně definitní.
  - kvadratická forma $Q(\mathbf{x})$ je pozitivně semidefinitní, právě když jsou všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ nezáporná. Matice $\mathbf{A}$ je pak pozitivně semidefinitní.
  - kvadratická forma $Q(\mathbf{x})$ je negativně definitní, právě když jsou všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ záporná. Matice $\mathbf{A}$ je pak negativně definitní.
  - kvadratická forma $Q(\mathbf{x})$ je negativně semidefinitní, právě když jsou všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ nekladná. Matice $\mathbf{A}$ je pak negativně semidefinitní.

Sylvestrovo kritérium

- pro určení definitnosti kvadratické formy není nutné počítat vlastní čísla matice
- kvadratická forma s maticí $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$
  - je pozitivně definitní právě když

$$\forall k = 1, 2, \ldots, n \quad \det([a_{ij}]_{1\leq i,j\leq k}) > 0$$

  - je pozitivně semidefinitní právě když

$$\forall k = 1, 2, \ldots, n \quad \det([a_{ij}]_{1\leq i,j\leq k}) \geq 0$$

  - je negativně definitní právě když

$$\forall k = 1, 2, \ldots, n \quad (-1)^k \det([a_{ij}]_{1\leq i,j\leq k}) > 0$$

Příklad definitnosti

- $V(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)^2 + x_3^2; n = 3$ je pozitivně semidefinitní, protože je pozitivní všude vyjma $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ a $x_1 = -x_2; x_3 = 0$, kdy je nulová
- $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2; n = 2$ je pozitivně definitní, protože je pozitivní všude vyjma bodu $\mathbf{0}$, kdy je nulová
- $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2; n = 3$ je pozitivně semidefinitní, protože je pozitivní všude vyjma bodu $x_1 = x_2 = 0$ a x_3 je libovolné, kdy je nulová
- $V(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} q_{ij} x_i x_j; q_{ij} = q_{ji}$ je kvadratická forma, kterou můžeme vyjádřit jako skalární součin $\langle \mathbf{x}; \mathbf{Q}\mathbf{x} \rangle$, kde $\mathbf{Q}$ je matice koeficientů q_{ij}. Podle Sylvestrova teorému je tato funkce pozitivně definitní tehdy a jen tehdy, když všechny hlavní subdeterminanty matice $\mathbf{Q}$ jsou větší než 0

Ljapunovova metoda ověření stability

Obsah

Matematika

Ljapunovova metoda
Definice Ljapunovovy funkce
Teorémy o stabilitě
Příklad

Volba LF

Definice Ljapunovovy funkce

- uvažujeme neřízený t-invariantní systém
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$
- předpokládáme, že systém má jediný singulární bod v počátku $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
- skalární funkce stavových proměnných $V(\mathbf{x})$
- časová derivace funkce $V(\mathbf{x})$

$$W(\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{d}V(\mathbf{x})}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}$$

$$W(\mathbf{x}) = (\mathbf{grad}\, V(\mathbf{x}))^T \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Obsah
Matematika
Ljapunovova metoda
Definice Ljapunovovy funkce
Teorémy o stabilitě
Příklad
Volba LF

Definice Ljapunovovy funkce

Ljapunovova funkce je taková skalární funkce $V(\mathbf{x})$, která splňuje následující podmínky:

1. $V(\mathbf{x})$ je spojitá a má spojité první parciální derivace v dané oblasti Ω definované v okolí počátku souřadnic vztahem $\|\mathbf{x}\| < a; \quad a > 0$
2. $V(\mathbf{x})$ je v oblasti Ω pozitivně definitní
3. $W(\mathbf{x})$ je v oblasti Ω negativně definitní případně semidefinitní

Obsah

Matematika

Ljapunovova metoda

Definice Ljapunovovy funkce

Teorémy o stabilitě

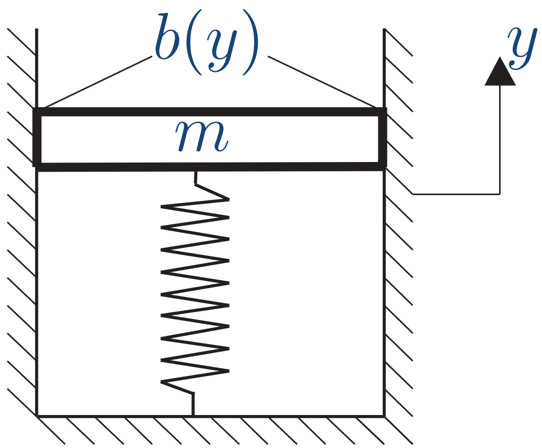
Příklad

Volba LF

Teorémy o stabilitě

- Teorém o lokální stabilitě
  - Jestliže může být pro systém nalezena taková Ljapunovova funkce, u které je $W(\mathbf{x})$ negativně semidefinitní, pak je počátek stavového prostoru lokálně stabilní.
- Teorém o asymptotické stabilitě
  - Jestliže může být pro systém nalezena taková Ljapunovova funkce, u které je $W(\mathbf{x})$ negativně definitní, pak je počátek stavového prostoru lokálně asymptoticky stabilní.
- Teorém o globální asymptotické stabilitě
  - Jestliže může být pro systém nalezena taková Ljapunovova funkce, u které je oblast $\Omega = R^n$ (celý stavový prostor) a $V(\mathbf{x}) \to \infty$ pro $\|\mathbf{x}\| \to \infty$ a $W(\mathbf{x})$ je negativně definitní, pak je počátek stavového prostoru globálně asymptoticky stabilní.

Příklad lokální stability



- diferenciální rovnice $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + b\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) + k(y) = 0$
- stavové rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_2$$

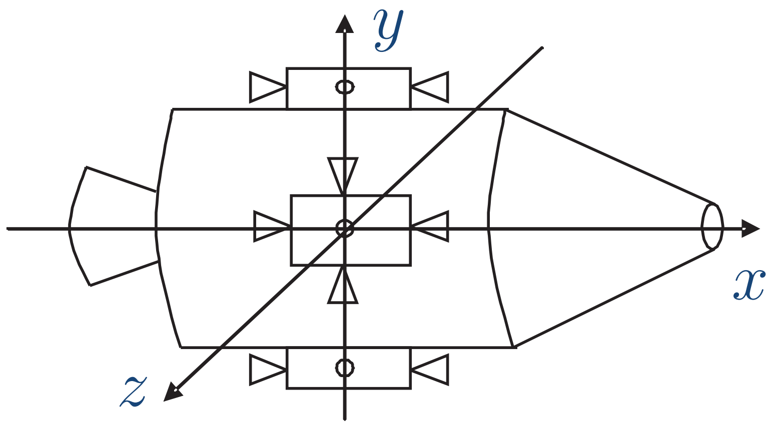
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -k(x_1) - b(x_2)$$

- předpokládáme $x_1 k(x_1) > 0$ a $x_2 b(x_2) > 0$ pro $x_1 \neq 0$ a $x_2 \neq 0$
- singulární bod $x_1 = x_2 = 0$
- chceme vyšetřit stabilitu

Příklad lokální stability

- jako kandidáta na Ljapunovovu funkci zvolíme jako celkovou energii systému
$$V(\mathbf{x}) = E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int\limits_0^{x_1} k(x_1)dx_1$$
- je zřejmé, že $V(\mathbf{x})$ je pozitivně definitní
- derivace Ljapunovovy funkce
$$W(\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{d}V(\mathbf{x})}{\mathrm{d}t} = x_2\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + x_2k(x_1) = -x_2b(x_2)$$
- za předpokladů uvedených v zadání je $W(\mathbf{x})$ negativně semidefinitní
- $V(\mathbf{x})$ splňuje požadavky na Ljapunovovu funkci a systém je dle definice lokálně stabilní
- fyzikálním rozborem lze dospět k závěru, že systém je dokonce globálně asymptoticky stabilní
    - tento závěr nevyplývá ze zvolené Ljapunovovy funkce

Příklad globální asymptotické stability



- model družice

$$J_x \frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t} - (J_y - J_z)\omega_y\omega_z = M_x$$

$$J_y \frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t} - (J_z - J_x)\omega_x\omega_z = M_y$$

$$J_z \frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t} - (J_x - J_y)\omega_x\omega_y = M_z$$

- předpokládejme řízení

$$M_x = -k_x\omega_x$$

$$M_y = -k_y\omega_y$$

$$M_z = -k_z\omega_z$$

- za jakých podmínek bude systém stabilní

Obsah
Matematika
Ljapunovova metoda
Definice
Ljapunovovy funkce
Teorémy o stabilitě
Příklad
Volba LF

Příklad globální asymptotické stability

- stavové rovnice

$$\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{J_x}[-k_x\omega_x + (J_y - J_z)\omega_y\omega_z]$$
$$\frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{J_y}[-k_y\omega_y + (J_z - J_x)\omega_x\omega_z]$$
$$\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{J_z}[-k_z\omega_z + (J_x - J_y)\omega_x\omega_y]$$

- v maticovém tvaru $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}(\omega)\omega$

$$\mathbf{A}(\omega) = \begin{bmatrix} -\frac{k_x}{J_x} & \frac{J_y}{J_x}\omega_z & -\frac{J_z}{J_x}\omega_y \\ -\frac{J_x}{J_y}\omega_z & -\frac{k_y}{J_y} & \frac{J_z}{J_y}\omega_x \\ \frac{J_x}{J_z}\omega_y & -\frac{J_y}{J_z}\omega_x & -\frac{k_z}{J_z} \end{bmatrix}, \quad \omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Obsah
Matematika
Ljapunovova metoda
Definice
Ljapunovovy funkce
Teorémy o stabilitě
Příklad
Volba LF

Příklad globální asymptotické stability

- za Ljapunovovu funkci zvolíme pozitivně definitní kvadratickou formu

$$V(\omega) = \langle \omega, \mathbf{Q}\omega \rangle$$

- matici $\mathbf{Q}$ musíme volit tak, aby byla symetrická a měla všechna vlastní čísla kladná

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} J_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & J_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & J_z^2 \end{bmatrix}$$

- derivace Ljapunovovy funkce

$$W(\omega) = \frac{\mathrm{d}V(\omega)}{\mathrm{d}t} = \left\langle \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}, \mathbf{Q}\omega \right\rangle + \left\langle \omega, \mathbf{Q}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \right\rangle$$

Příklad globální asymptotické stability

- dosazením ze stavových rovnic a úpravou

$$
\begin{aligned}
W(\omega) &= \langle \mathbf{A}(\omega)\omega, \mathbf{Q}\omega \rangle + \langle \omega, \mathbf{QA}(\omega)\omega \rangle = [\mathbf{A}(\omega)\omega]^T \mathbf{Q}\omega + \omega^T \mathbf{QA}(\omega)\omega = \\
&= \omega^T \mathbf{A}^T(\omega)\mathbf{Q}\omega + \omega^T \mathbf{QA}(\omega)\omega = \langle \omega, [\mathbf{A}^T(\omega)\mathbf{Q} + \mathbf{QA}(\omega)]\omega \rangle = \\
&= -\langle \omega, \mathbf{P}\omega \rangle
\end{aligned}
$$

$$
P = -[\mathbf{A}^T(\omega)\mathbf{Q} + \mathbf{QA}(\omega)] = \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2k_x J_x & 0 & 0 \\ 0 & 2k_y J_y & 0 \\ 0 & 0 & 2k_z J_z \end{bmatrix}
$$

- aby byl systém globálně asymptoticky stabilní, musí být funkce W negativně definitní
- funkce W bude negativně definitní, pokud bude $\langle \omega, \mathbf{P}\omega \rangle$ pozitivně definitní
- $\langle \omega, \mathbf{P}\omega \rangle$ je pozitivně definitní, pokud jsou všechna vlastní čísla matice $\mathbf{P}$ kladná
- systém bude stabilní pro $k_x > 0$, $k_y > 0$, $k_z > 0$

Příklad globální asymptotické stability

- řešení bez použití maticového počtu
- kandidát na Ljapunovovu funkci $V(\omega) = J_x^2\omega_x^2 + J_y^2\omega_y^2 + J_z^2\omega_z^2$
  - je zřejmé, že $V(\omega)$ je pozitivně definitní
- derivace Ljapunovovy funkce

$$W(\omega) = \frac{\mathrm{d}V(\omega)}{\mathrm{d}t} = 2J_x^2\omega_x\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t} + 2J_y^2\omega_y\frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t} + 2J_z^2\omega_z\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t}$$

- dosadíme stavové rovnice

$$W(\omega) = 2J_x^2\omega_x\frac{1}{J_x}[-k_x\omega_x + (J_y - J_z)\omega_y\omega_z] + 2J_y^2\omega_y\frac{1}{J_y}[-k_y\omega_y + (J_z - J_x)\omega_x\omega_z] +$$

$$+ 2J_z^2\omega_z\frac{1}{J_z}[-k_z\omega_z + (J_x - J_y)\omega_x\omega_y] = -(2J_xk_x\omega_x^2 + 2J_yk_y\omega_y^2 + 2J_zk_z\omega_z^2)$$

- $W(\mathbf{x})$ bude negativně definitní v celém stavovém prostoru a systém bude tedy stabilní pro $k_x > 0, k_y > 0, k_z > 0$

Volba Ljapunovovy funkce

Obsah

Matematika

Ljapunovova metoda

Volba LF
Metody
Krasovského metoda
Příklad

Metody volby Ljapunovovy funkce

- neexistuje jednoduchá obecná a spolehlivá metoda pro volbu Ljapunovovy funkce
- základní prakticky používané metody
  - volba na základě fyzikální podstaty systému
    - za Ljapunovovu funkci volíme celkovou energii systému, případně významově analogickou veličinu
    - vhodné spíše pro systémy nižšího řádu
  - volba Ljapunovovy funkce jako obecné kvadratické formy
    - Krasovského metoda
    - úspěšně lze najít Ljapunovovu funkci jen pro málo reálných systémů
  - metoda variabilního gradientu
    - poměrně pracná k použití
    - viz. elektronický text

Obsah
Matematika
Ljapunovova metoda
Volba LF
Metody
Krasovského metoda
Příklad

Krasovského metoda

- Ljapunovovu funkci volíme ve tvaru obecné kvadratické formy

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} l_{ij} f_i f_j = \langle \mathbf{f}; \mathbf{L}\mathbf{f} \rangle$$

- matice $\mathbf{L}$ je symetrická pozitivně definitní $\Rightarrow V(\mathbf{x})$ bude pozitivně definitní
- derivace Ljapunovovy funkce

$$W(\mathbf{x}) = \left\langle \frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t}; \mathbf{L}\mathbf{f} \right\rangle + \left\langle \mathbf{f}; \mathbf{L}\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t} \right\rangle$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \mathbf{J}$$

Krasovského metoda

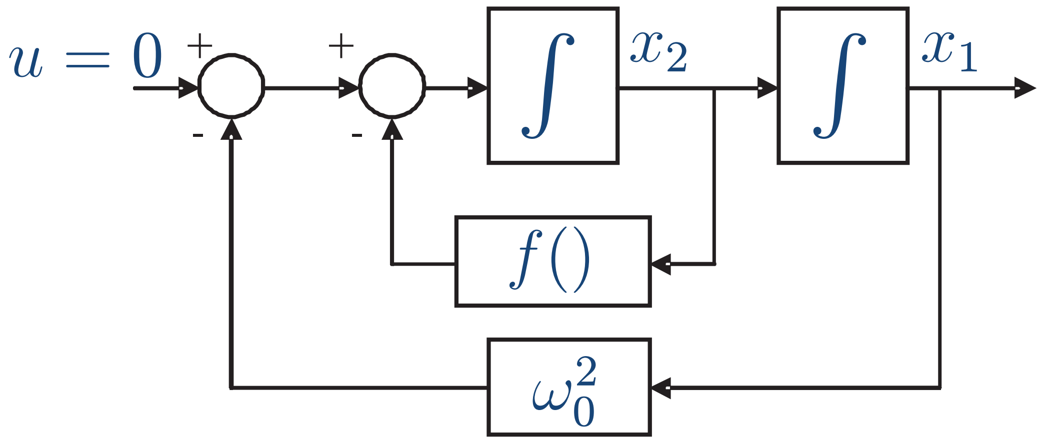
- po dosazení dostaneme

$$W(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{Jf}; \mathbf{Lf} \rangle + \langle \mathbf{f}; \mathbf{LJf} \rangle =$$
$$= (\mathbf{Jf})^T \mathbf{Lf} + \mathbf{f}^T \mathbf{LJf} = \mathbf{f}^T \mathbf{J}^T \mathbf{Lf} + \mathbf{f}^T \mathbf{LJf} =$$
$$= \mathbf{f}^T (\mathbf{J}^T \mathbf{L} + \mathbf{LJ}) \mathbf{f} = \mathbf{f}^T \mathbf{Tf} = \langle \mathbf{f}; \mathbf{Tf} \rangle$$

- $\mathbf{T} = \mathbf{J}^T \mathbf{L} + \mathbf{LJ}$
- pro dosažení negativní definitnosti $W(\mathbf{x})$ postačuje zajistit, aby matice $-\mathbf{T}$ byla pozitivně definitní
- můžeme určit podmínky pro parametry systému, tak aby $-\mathbf{T}$ byla pozitivně definitní

Obsah
Matematika
Ljapunovova metoda
Volba LF
Metody
Krasovského metoda
Příklad

Obsah
Matematika
Ljapunovova metoda
Volba LF
Metody Krasovského metoda
Příklad



- stavové rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_2 = f_1(x_1, x_2)$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -f(x_2) - \omega_0^2 x_1 = f_2(x_1, x_2)$$

- chceme zjistit, jaké podmínky musí splňovat funkce f, aby bylo dosaženo stability

Příklad

- zvolíme Ljapunovovu funkci

$$V(\mathbf{x}) = [f_1 f_2] \begin{bmatrix} \frac{l_{11}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{l_{22}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} l_{11} f_1^2 + \frac{1}{2} l_{22} f_2^2$$

- dosazení stavových rovnic

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} l_{11} x_2^2 + \frac{1}{2} l_{22} [f(x_2) + \omega_0^2 x_1]^2$$

- derivace podle času

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{d}V(\mathbf{x})}{\mathrm{d}t} &= l_{11} x_2 \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + l_{22}[f(x_2) + \omega_0^2 x_1] \left[\frac{\mathrm{d}f(x_2)}{\mathrm{d}x_2} \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \right] \\ &= l_{11} x_2 [-f(x_2) - \omega_0^2 x_1] + l_{22}[f(x_2) + \omega_0^2 x_1] \left[-\frac{\mathrm{d}f(x_2)}{\mathrm{d}x_2} (f(x_2) + \omega_0^2 x_1) + \omega_0^2 x_2 \right] = \\ &= (-l_{11} + l_{22} \omega_0^2)(f(x_2) + \omega_0^2 x_1) x_2 - l_{22} \frac{\mathrm{d}f(x_2)}{\mathrm{d}x_2} [f(x_2) + \omega_0^2 x_1]^2 \end{aligned}$$

- zvolíme-li $l_{11} = \omega_0^2$ a $l_{22} = 1$, dostaneme

$$W(\mathbf{x}) = -\frac{\mathrm{d}f(x_2)}{\mathrm{d}x_2} [f(x_2) + \omega_0^2 x_1]^2$$

$$W(\mathbf{x}) = -\frac{\mathrm{d}f(x_2)}{\mathrm{d}x_2}[f(x_2) + \omega_0^2 x_1]^2$$

- postačující podmínkou pro globální asymptotickou stabilitu je, že $W(\mathbf{x})$ je negativně definitní
- pokud bude platit $\frac{\mathrm{d}f(x_2)}{\mathrm{d}x_2} > 0$ bude systém stabilní
- lze ukázat, že zjištěná podmínka je v daném případě příliš přísná, systém může být stabilní i při nesplnění této podmínky

Obsah
Matematika
Ljapunovova metoda
Volba LF
Metody Krasovského metoda
Příklad