Regulace a řízení II

Řízení nelineárních systémů

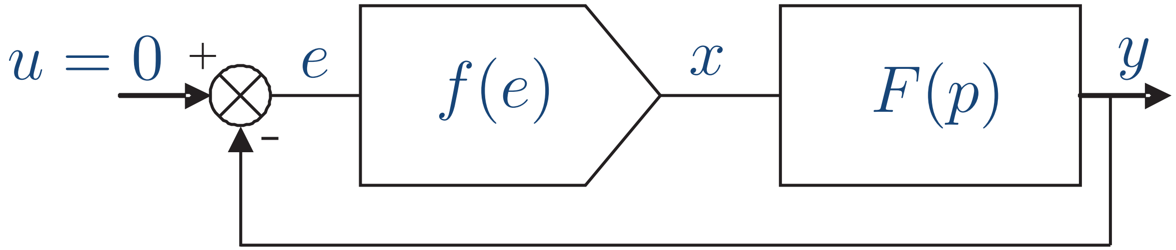
Obsah

Obsah přednášky

- Popovovo kritérium stability
- věty o nestabilitě
- "wind-up" jev

Popovovo kritérium stability

Popovovo kritérium stability



1. $f(0) = 0$
2. má-li $F(p)$ póly jen s negativní reálnou částí, musí nelinearita splňovat podmínku $0 \leq \frac{f(e)}{e} \leq k, \quad e \neq 0$
3. Má-li $F(p)$ nějaké póly na imaginární ose a žádné póly s pozitivní reálnou částí (tzv. kritický případ), platí pro nelinearitu podmínka $0 < \frac{f(e)}{e} \leq k, \quad e \neq 0$. Pro operátorový přenos $F(p)$ musí navíc v platit následující omezení. Nahradíme-li nelineární funkci $f(e)$ lineární funkcí $f(e) = \delta e$, nesmí být uzavřená smyčka nestabilní pro $\delta \to 0+$, tj. póly uzavřené smyčky musí být pro malé hodnoty δ v levé polorovině komplexní roviny.

Popovův teorém

Nelineární systém vyhovující výše uvedeným podmínkám je globálně asymptoticky stabilní tehdy, existuje-li libovolné reálné číslo q takové, že nerovnost

$$\Re\{(1 + j\omega q)F(j\omega)\} + \frac{1}{k} > 0$$

kde $F(j\omega)$ je frekvenční charakteristika lineární části systému a k je směrnice přímky omezující nelinearitu, je splněna pro všechna $\omega \geq 0$.

- podmínka postačující, nikoli nutná, nesplnění neznamená nestabilitu

Zjištění platnosti podmínky

- řešíme graficky
- upravíme výraz v nerovnosti kritéria

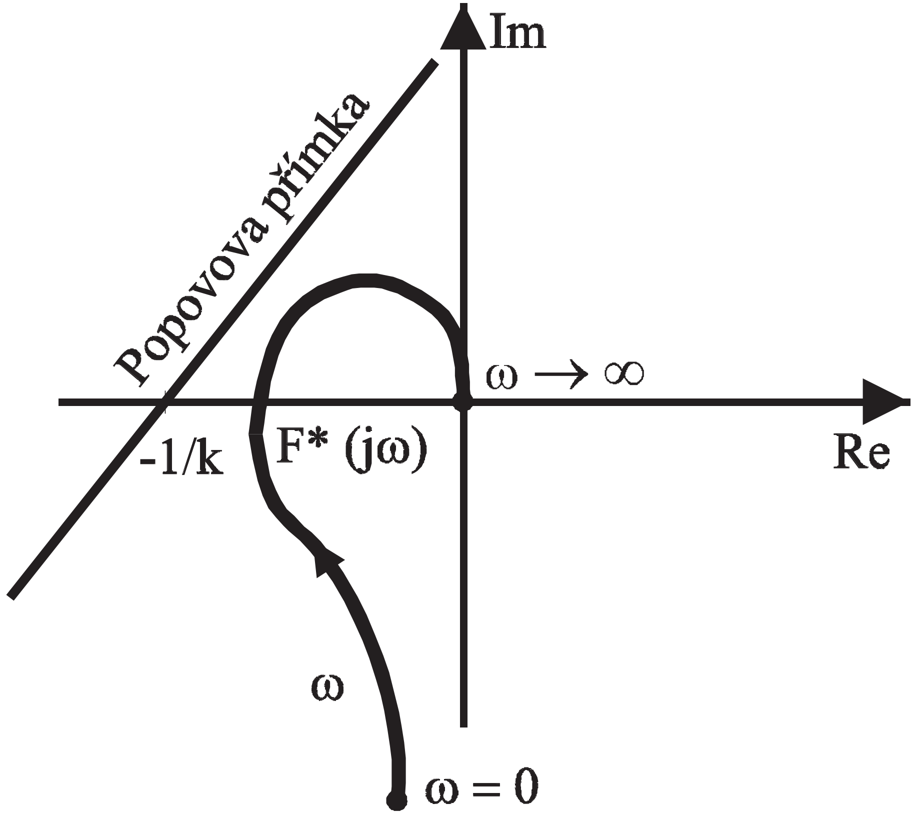
$$\Re\{(1+j\omega q)F(j\omega)\} = \Re\{(1+j\omega q)[\Re F(j\omega) + j\Im F(j\omega)]\} =$$
$$= \Re F(j\omega) - q\omega\Im F(j\omega)$$

- označíme

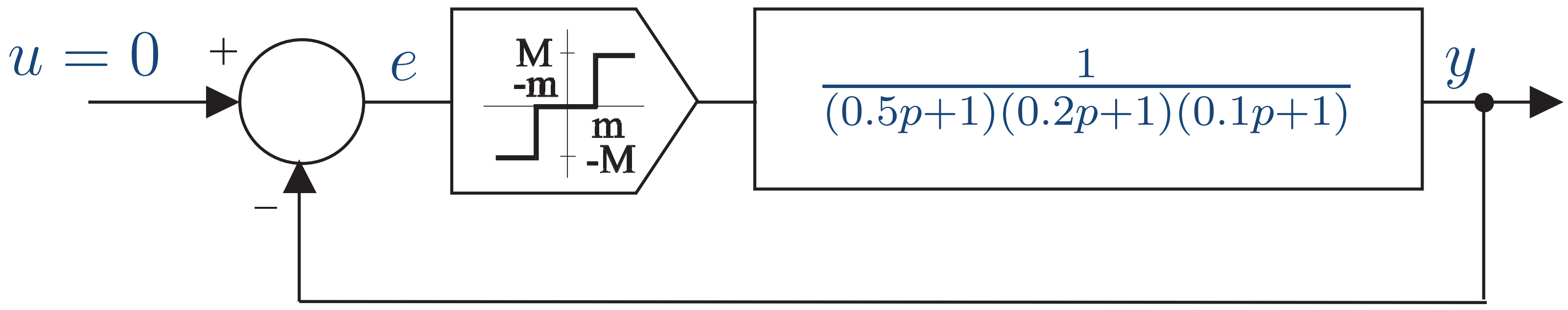
$$\Re F(j\omega) = X$$
$$\omega\Im F(j\omega) = Y$$

- Popovovo kritérium přejde do tvaru $X - qY + \frac{1}{k} > 0$
- Popovova přímka $X - qY + \frac{1}{k} = 0$
- modifikovaná frekvenční charakteristika
  $F^*(j\omega) = \Re F(j\omega) + j\omega\Im F(j\omega)$

Zjištění platnosti podmínky



Nelineární systém vyhovující podmínkám Popovova kritéria je globálně asymptoticky stabilní tehdy, jestliže lze bodem $-\frac{1}{k}$ na reálné ose vést přímku tak, že modifikovaná frekvenční charakteristika $F^*(j\omega)$ leží pro všechna $\omega \geq 0$ napravo od této přímky.

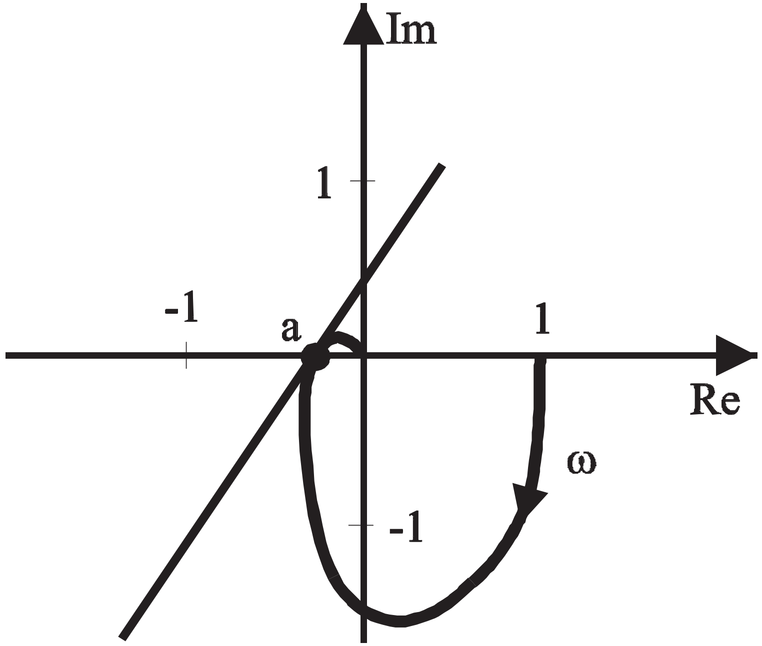


- chceme určit podmínky, které musí nelinearita splňovat, aby byl systém globálně asymptoticky stabilní
- statická charakteristika nelinearity je omezena přímkou se směrnicí $k = \frac{M}{m}$
- modifikovaná frekvenční charakteristika

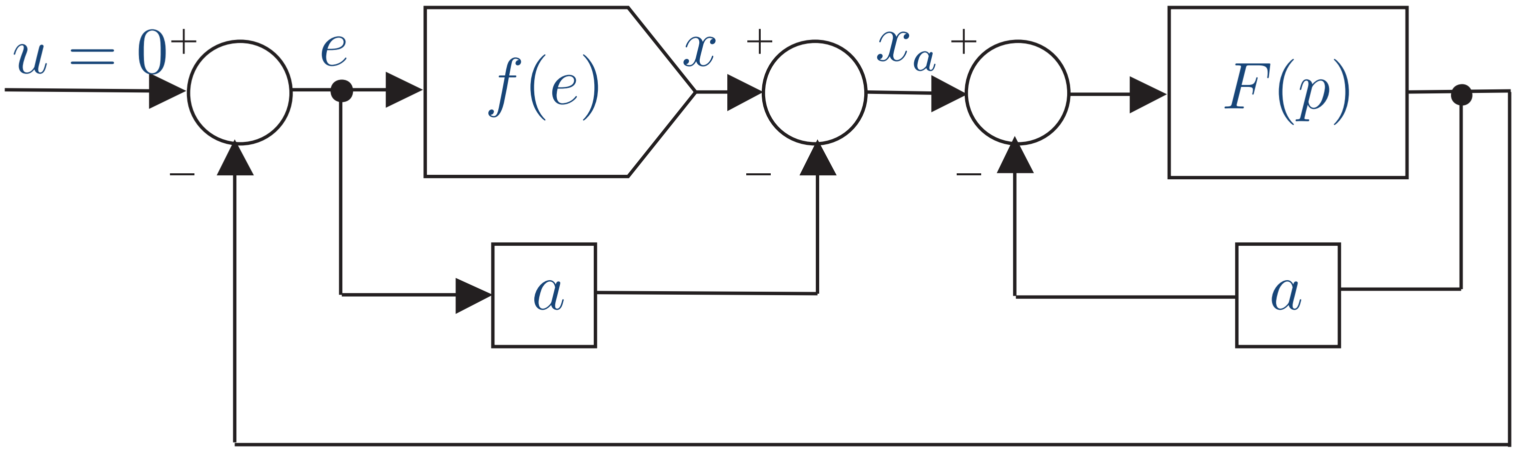
$$\Re F^*(j\omega) = \Re F(j\omega) = \frac{1 - 0.17\omega^2}{(1 + 0.25\omega^2)(1 + 0.04\omega^2)(1 + 0.01\omega^2)}$$

$$\Im F^*(j\omega) = \omega \Im F(j\omega) = \frac{-0.8\omega^2 + 0.01\omega^4}{(1 + 0.25\omega^2)(1 + 0.04\omega^2)(1 + 0.01\omega^2)}$$

Příklad

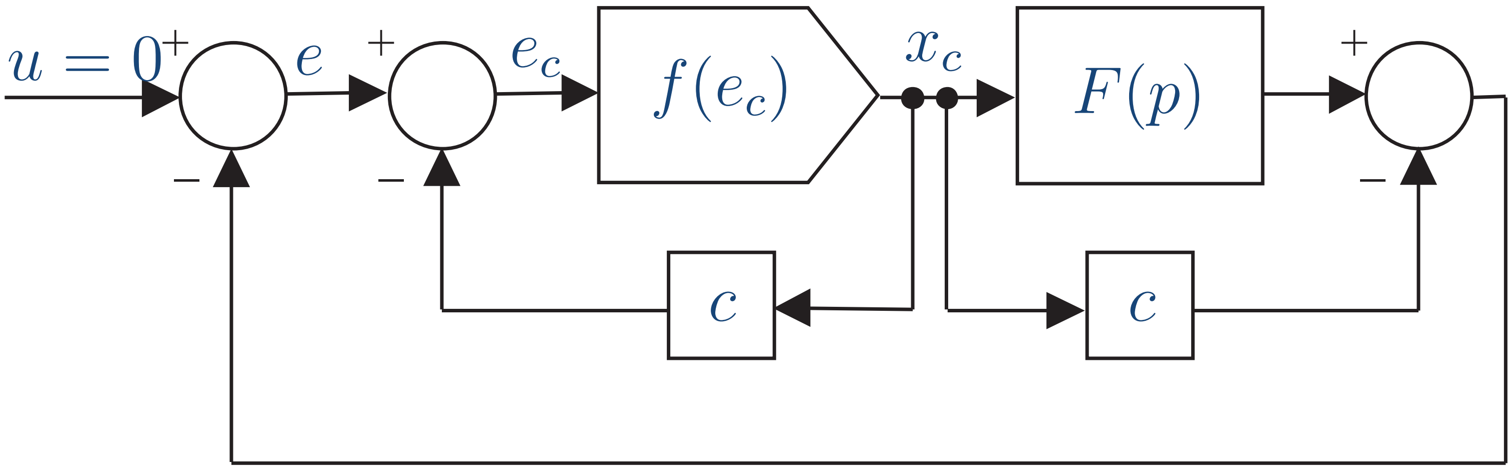


- Popovova přímka může být tečna k modifikované frekvenční charakteristice v průsečíku s reálnou osou
- z rovnice $\Im F^*(j\omega) = 0$ dostáváme $\omega = 8.94$
- průsečík se reálnou osou $a = \Re F^*(j8.94) = -0.08 = -\frac{1}{k} \Rightarrow k = 12.5$
- aby byl systém globálně asymptoticky stabilní, stačí, aby platilo $\frac{M}{m} \leq 12.5$
- nesplnění podmínky neznamená nestabilitu



- dojde ke změně přenosu lineární části - posun pólů $F_a(p) = \frac{F(p)}{1+aF(p)}$
- změní se nelinearita $x_a = f(e) - ae = f_a(e)$
- jestliže původní nelinearita byla v sektoru omezeném přímkami se směrnicemi 0 a k, bude nová nelinearita v sektoru omezeném přímkami se směrnicemi 0 a $k - a$

Transformace měnící tvar nelinearity



- změní se lineární část, nedojde k posunu pólů $F_c(p) = F(p) - c$
- výslednou nelinearitu vypočteme řešením rovnice $x_c = f(e - x_c c)$
- je-li původní nelinearita uvnitř sektoru omezeného přímkami se směrnicemi a a b, bude transformovaná nelinearita uvnitř sektoru se směrnicemi $\frac{a}{1+ac}$ a $\frac{b}{1+bc}$

Věty o nestabilitě

Věty o nestabilitě

- nalezení Ljapunovovy funkce i splnění Popovova kritéria jsou postačující nikoli nutné podmínky stability
- jednoznačně lze rozhodnout o stabilitě rovnovážného stavu na základě linearizace
  - první Ljapunovova metoda
  - nelze rozhodnout, když má linearizovaná náhrada vlastní čísla vlevo a současně na imaginární ose
- existují věty o nestabilitě, které jsou postačující podmínkou pro nestabilitu rovnovážného stavu

Četajevova věta o nestabilitě

Nechť má systém rovnovážný stav v počátku stavového prostoru a nechť funkce $V(\mathbf{x})$ má spojitou první derivaci a platí

- $V(\mathbf{0}) = 0$
- pro libovolně malé $\varepsilon > 0$ existuje bod $\mathbf{x}$ takový, že $\|\mathbf{x}\| < \varepsilon$ a $V(\mathbf{x}) > 0$
- existuje takové δ-okolí počátku souřadnic $\mathbb{B}_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| \leq \delta\}$, že pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{U}$, kde $\mathbb{U} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{B}_\delta | V(\mathbf{x}) > 0\}$, platí $\dfrac{\mathrm{d}V(\mathbf{x})}{\mathrm{d}t} > 0$

Pak je rovnovážný bod v počátku stavového prostoru nestabilní.

Příklad

- předpokládejme systém popsaný stavovými rovnicemi

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_1 + g_1(x_1, x_2)$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -x_2 + g_2(x_1, x_2)$$

- nelineární funkce g_1, g_2 splňují na oblasti $\mathbb{D}$ zahrnující počátek stavové roviny podmínku

$$|g_1(x_1, x_2)| \leq k(x_1^2 + x_2^2)$$

$$|g_2(x_1, x_2)| \leq k(x_1^2 + x_2^2)$$

- chceme zjistit, zda rovnovážný bod $(0, 0)$ je stabilní
- zvolme funkci $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$
- pro $x_2 = 0$ je $V(\mathbf{x}) > 0$ libovolně blízko počátku
- derivace funkce V na stavové trajektorii je

$$\frac{\mathrm{d}V(\mathbf{x})}{\mathrm{d}t} = x_1\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} - x_2\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = x_1^2 + x_2^2 + x_1 g_1(x_1, x_2) - x_2 g_2(x_1, x_2)$$

- velikost členu $x_1 g_1(x_1, x_2) - x_2 g_2(x_1, x_2)$ splňuje nerovnost

$$|x_1 g_1(x_1, x_2) - x_2 g_2(x_1, x_2)| \leq |x_1 g_1(x_1, x_2)| + |x_2 g_2(x_1, x_2)| \leq$$
$$\leq (|x_1| + |x_2|) k (x_1^2 + x_2^2) \leq 2k (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}$$

- proto

$$\frac{\mathrm{d}V(\mathbf{x})}{\mathrm{d}t} \geq x_1^2 + x_2^2 - 2k(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}} = (x_1^2 + x_2^2)\left(1 - 2k\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)$$

- pokud zvolíme δ takové, že $\mathbb{B}_\delta \subset \mathbb{D}$ a $\delta < \frac{1}{2k}$ jsou splněny podmínky Čatajevovy věty
- rovnovážný stav je nestabilní

První Ljapunovova věta o nestabilitě

Nechť má systém rovnovážný stav v počátku stavového prostoru. Jestliže existuje spojitá funkce $V(\mathbf{x})$ se spojitou první derivací taková, že v oblasti $\mathbb{D}$ zahrnující počátek platí

- $V(\mathbf{0}) = 0$
- $\dfrac{\mathrm{d}V(\mathbf{x})}{\mathrm{d}t}$ je pozitivně definitní
- $V(\mathbf{x})$ není negativně definitní nebo semidefinitní v libovolně malém ε okolí počátku stavového prostoru

pak je rovnovážný bod v počátku stavového prostoru nestabilní.

- předpokládejme systém popsaný stavovými rovnicemi

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^4)$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^4)$$

- chceme zjistit, zda je rovnovážný stav $(0, 0)$ stabilní
- pokud provedeme linearizaci kolem rovnovážného stavu $(0, 0)$, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_2$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -x_1$$

- vlastní čísla systému jsou $\pm j$ - o stabilitě nelze rozhodnout

- zvolme funkci $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$
- derivace

$$\frac{\mathrm{d}V(\mathbf{x})}{\mathrm{d}t} = 2x_1 \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + 2x_2 \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^4)$$

- $V(\mathbf{x})$ i $\dot{V}(\mathbf{x})$ je pozitivně definitní
- podmínky první Ljapunovovy věty o nestabilitě jsou splněny
- rovnovážný stav je nestabilní

Druhá Ljapunovova věta o nestabilitě

Nechť má systém rovnovážný stav v počátku stavového prostoru. Jestliže existuje spojitá funkce $V(\mathbf{x})$ se spojitou první derivací taková, že v oblasti $\mathbb{D}$ zahrnující počátek platí

- $V(\mathbf{0}) = 0$
- $\dfrac{\mathrm{d}V(\mathbf{x})}{\mathrm{d}t} = \lambda V(\mathbf{x}) + W(\mathbf{x})$, kde $\lambda > 0$ a $W(\mathbf{x})$ je pozitivně semidefinitní
- $V(\mathbf{x})$ není negativně definitní nebo semidefinitní v libovolně malém ε okolí počátku stavového prostoru

pak je rovnovážný bod v počátku stavového prostoru nestabilní.

Příklad

- uvažujme systém popsaný rovnicemi

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_1 + 2x_2 + x_1 x_2^2$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = 2x_1 + x_2 - x_1^2 x_2$$

- chceme zjistit, zda je rovnovážný stav $(0,0)$ stabilní.
- zvolíme $V(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2$
- derivace

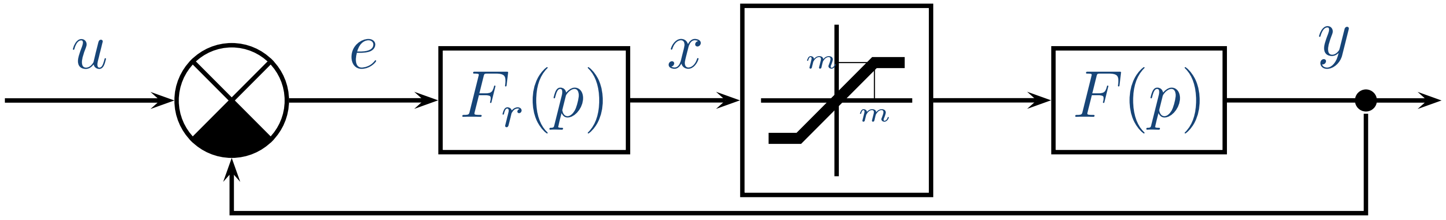
$$\frac{\mathrm{d}V(\mathbf{x})}{\mathrm{d}t} = 2x_1\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} - 2x_2\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = 2x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1^2x_2^2 = 2V(\mathbf{x}) + 4x_1^2x_2^2$$

- výraz $4x_1^2x_2^2$ je pozitivně definitní
- jsou splněny podmínky druhé Ljapunovovy věty o nestabilitě
- rovnovážný stav je nestabilní

Řízení nelineárních systémů

- metody založené na linearizaci nelineárního systému v okolí pracovního bodu
- k řízení je použit lineární regulátor
- typy řešených problémů
  - linearizace v okolí pevného pracovního bodu
  - po částech lineární systémy, linearizace v okolí více pracovních bodů, případně s pohyblivým pracovním bodem
  - anti wind-up, vyřešení vlivu parazitní nelinearity typu nasycení.

Wind-up jev



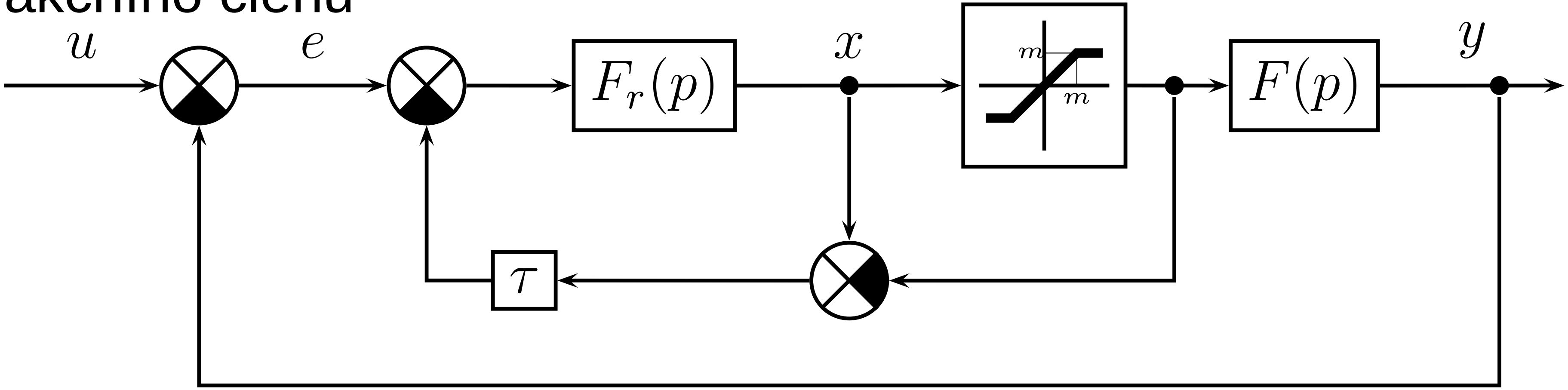
- regulátor i soustava je lineární, v akčním členu je nasycení
- v okamžiku nasycení dojde k faktickému rozpojení regulační smyčky
- pokud obsahuje regulátor integrační složku, po dosažení nasycení výstup regulátoru neustále roste
- regulátor reaguje opožděně na změnu znaménka regulační odchylky
  - musí "odintegrovat" hodnotu zapamatovanou na integrátoru

Základní metody pro odstranění wind-up jevu

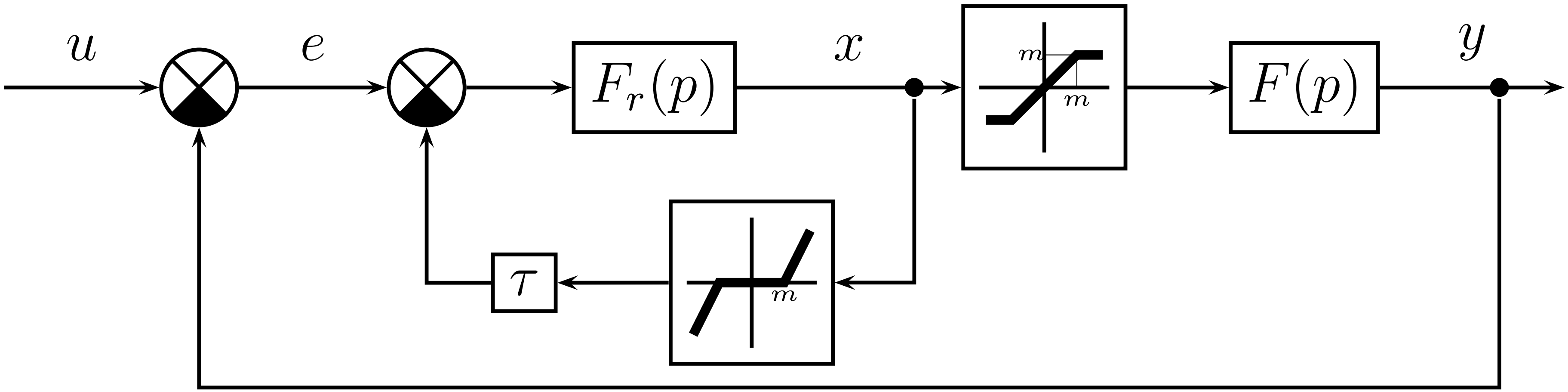
- je nesmyslné, aby výstup regulátoru rostl nad hodnotu nasycení v akčním členu
- musíme zajistit, aby se hodnota na integrátoru dále nezvyšovala po dosažení nasycení
  - nastavení mezí pro integrátor v regulátoru
  - zastavení integrace při dosažení nasycení
    - problematické, pokud má regulátor složitější strukturu
  - korekce vstupu do regulátoru porovnáním výstupu regulátoru a skutečné akční veličiny
- konkrétní provedení anti wind-up metody závisí na provedení regulátoru

Obecné schema pro anti wind-up

- porovnání výstupu regulátoru se skutečným výstupem akčního členu



- kontrola výstupu regulátoru na překročení meze nasycení



Obecné schema pro anti wind-up

- parametrem τ můžeme ovlivnit dynamiku kompenzace
- pokud se pohybujeme v proporcionální oblasti mimo omezení, kompenzace je nulová
- pozor - v případě, že je v regulátoru proporcionální složka, obě metody vytváří algebraickou smyčku, kterou musíme odstranit
  - přidáním dynamiky
  - vyřešením algebraické rovnice