Regulace a řízení II

Řízení nelineárních systémů

Obsah

Obsah přednášky

- řízení založené na „gain scheduling“
- zpětnovazební linearizace

Gain scheduling

Gain scheduling

- nelineární systém lze linearizovat v pevném pracovním bodě a navrhnout pevný lineární regulátor
  - vhodné jen pro systémy pracující v malé oblasti kolem pracovního bodu
- nelineární systém můžeme linearizovat v okolí více pracovních bodů, pro každý pracovní bod navrhnout lineární regulátor a následně přepínat regulátory podle aktuálních hodnot stavů a vstupů
  - metoda „gain scheduling“
- možné varianty „gain scheduling“
  - navrhnout regulátor parametrizovaný dle aktuálních hodnot stavů a vstupů
    - regulátor se spojitě mění v závislosti na stavech systému
  - navrhnout regulátory pro systém linearizovaný v konečném počtu pracovních bodů
    - regulátory přepínáme podle oblasti, ve které se vyskytují aktuální hodnoty stavu a vstupu
    - vhodné zejména pro po částech lineární systémy
    - obvykle požadujeme beznárazové přepnutí
  - navrhnout regulátory pro systém linearizovaný v konečném počtu pracovních bodů a interpolovat mezi nimi
    - řízení přechází plynule mezi dvěma regulátory

Příklad „gain scheduling“

- předpokládejme systém popsaný rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\beta(x)}\left(u - c\sqrt{2x}\right) = f(x, u)$$

- chceme vytvořit regulátor, který zajistí, že hodnota x bude sledovat referenci x_r
- v ustáleném stavu pro $x_r = \alpha$ bude muset platit $u_0(\alpha) = c\sqrt{2\alpha}$
- pracovní bod $x_0 = \alpha$, $u_0 = c\sqrt{2\alpha}$

Příklad „gain scheduling“

- provedeme linearizaci rozvojem do Taylorovy řady a dostaneme lineární model

$$\frac{\mathrm{d}\Delta x}{\mathrm{d}t} = a(\alpha)\Delta x + b(\alpha)\Delta u$$

$$\Delta x = x - \alpha \quad \Delta u = u - c\sqrt{2\alpha}$$

$$a(\alpha) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\alpha, u=c\sqrt{2\alpha}} = \left[\frac{1}{\beta(x)}\frac{-c}{\sqrt{2x}} - \frac{\beta'(x)}{\beta^2(x)}\left(u - c\sqrt{2x}\right)\right]_{x=\alpha, u=c\sqrt{2\alpha}} = -\frac{c\sqrt{2\alpha}}{2\alpha\beta(\alpha)}$$

$$b(\alpha) = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x=\alpha, u=c\sqrt{2\alpha}} = \left.\frac{1}{\beta(x)}\right|_{x=\alpha} = \frac{1}{\beta(\alpha)}$$

- pro řízení navrhneme PI regulátor

$$\Delta u = k_1 e + k_2 \sigma$$

$$e = x_r - x = \alpha - x = -\Delta x \quad \dot{\sigma} = e$$

Příklad „gain scheduling“

- přenos regulátoru

$$F_R(p) = k_1 + k_2 \frac{1}{p}$$

- přenos soustavy

$$F_S(p) = \frac{b}{p-a}$$

- přenos uzavřené smyčky

$$F = \frac{F_R F_S}{1 + F_R F_S} = \frac{k_1 b p + k_2 b}{p^2 + p(a + k_1 b) + k_2 b}$$

- předpokládejme požadovaný tvar jmenovatele přenosu

$$p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2 \qquad \omega_0^2 > 0 \qquad 0 < \xi < 1$$

- porovnáním koeficientů dostaneme

$$k_1(\alpha) = \frac{2\xi\omega_0 + a(\alpha)}{b(\alpha)} \qquad k_2(\alpha) = \frac{\omega_0^2}{b(\alpha)}$$

- konstanty regulátoru se mění v závislosti na žádané hodnotě α

Příklad „gain scheduling“

- PI regulátor

$$F_R(p) = k_1(\alpha) + k_2(\alpha)\frac{1}{p} \qquad k_1(\alpha) = \frac{2\xi\omega_0 + a(\alpha)}{b(\alpha)} \qquad k_2(\alpha) = \frac{\omega_0^2}{b(\alpha)}$$

- jiný tvar regulátoru

$$F_R(p) = k(\alpha)\left(1 + \frac{1}{T(\alpha)p}\right) \qquad k(\alpha) = \frac{2\xi\omega_0 + a(\alpha)}{b(\alpha)} \qquad T(\alpha) = \frac{2\xi\omega_0 + a(\alpha)}{\omega_0^2}$$

- předpokládejme, že budeme požadovat málo kmitavý a rychlý přechodový děj, pak můžeme předpokládat, že $|a(\alpha)| \ll 2\xi\omega_0$, a bude platit

$$k(\alpha) \approx \frac{2\xi\omega_0}{b(\alpha)} = 2\xi\omega_0\beta(\alpha) \qquad T(\alpha) \approx \frac{2\xi\omega_0}{\omega_0^2} = \frac{2\xi}{\omega_0}$$

- měníme jen jeden parametr $k(\alpha)$ v závislosti na žádané hodnotě α

Příklad „gain scheduling“

- PI regulátor tedy bude mít tvar

$$F_R(p) = 2\xi\omega_0\beta(\alpha)\left(1 + \frac{\omega_0}{2\xi}\frac{1}{p}\right) = \frac{2\xi\omega_0\beta(\alpha)p + \omega_0^2\beta(\alpha)}{p}$$

- přenos uzavřené smyčky - spojení linearizované soustavy a lineárního regulátoru

$$F = \frac{F_R F_S}{1 + F_R F_S} = \frac{b(\alpha)\left(2\xi\omega_0\beta(\alpha)p + \omega_0^2\beta(\alpha)\right)}{p^2 + p(b(\alpha)\beta(\alpha)2\xi\omega_0 - a(\alpha)) + b(\alpha)\beta(\alpha)\omega_0^2} =$$

$$= \frac{2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}{p^2 + p(2\xi\omega_0 - a(\alpha)) + \omega_0^2}$$

Příklad „gain scheduling“

- pokusíme se najít linearizaci systému složeného z původní nelineární soustavy a lineárního regulátoru - chování v okolí pracovního bodu by mělo být shodné s předchozím případem
- stavové rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\beta(x)}\left(k(x_r)\left(x_r - x + \frac{1}{T}\sigma\right) - c\sqrt{2x}\right)$$
$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = x_r - x$$

- rovnovážný stav při $x_r = \alpha$ je $x_0 = \alpha$ a $\sigma_0 = \frac{c\sqrt{2\alpha}}{\omega_0^2\beta(\alpha)}$

Příklad „gain scheduling“

- provedeme linearizaci kolem rovnovážného stavu (x_0, σ_0)

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\Delta x}{\mathrm{d}t} \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\Delta \sigma}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\alpha) - 2\xi\omega_n & \omega_n^2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta\sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi\omega_0 + \gamma(\alpha) \\ 1 \end{bmatrix} \Delta x_r$$

$$\Delta y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta\sigma \end{bmatrix}$$

$$\gamma(\alpha) = \frac{\left.\dfrac{\mathrm{d}k(x_r)}{\mathrm{d}x_r}\right|_{x_r=\alpha} \sigma_0(\alpha)}{T\beta(\alpha)}$$

- můžeme vypočítat přenosovou funkci vztahem

$$F(p) = \left[\frac{1}{\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A})} \mathbf{C}\,\mathrm{adj}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B} + \mathbf{D}\right] = \frac{(2\xi\omega_0 + \gamma(\alpha))p + \omega_0^2}{p^2 + p(2\xi\omega_0 - a(\alpha)) + \omega_0^2}$$

Příklad „gain scheduling“

- pokud jsme provedli linearizaci jen soustavy a k ní připojili lineární regulátor, přenos uzavřené smyčky je

$$F(p) = \frac{2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}{p^2 + p(2\xi\omega_0 - a(\alpha)) + \omega_0^2}$$

- pokud k nelineární soustavě připojíme lineární regulátor a pak provedeme linearizaci celé regulační smyčky, dostaneme

$$F(p) = \frac{(2\xi\omega_0 + \gamma(\alpha))p + \omega_0^2}{p^2 + p(2\xi\omega_0 - a(\alpha)) + \omega_0^2}$$

- oba přenosy by měly být shodné
- rozdíl v přenosech může způsobit zhoršení dynamických vlastností
  - zůstane zachována schopnost regulátoru regulovat na nulovou ustálenou odchylku
  - pokud zhoršení dynamických vlastností je podstatné, je třeba provést návrh tak, aby se přenosy shodovaly

Příklad „gain scheduling“

- změníme způsob výpočtu PI regulátoru, místo
  $u = k(x_r)\left(e + \frac{1}{T}\sigma\right) \quad \dot{\sigma} = e$
  použijeme $u = k(x_r)e + \frac{1}{T}z \quad \dot{z} = k(x_r)e$
- stavové rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\beta(x)}\left(k(x_r)(x_r - x) + \frac{1}{T}z - c\sqrt{2x}\right)$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = k(x_r)(x_r - x)$$

- rovnovážný stav při $x_r = \alpha$ je $x_0 = \alpha$,$z_0 = cT\sqrt{2\alpha}$
- provedeme linearizaci v okolí rovnovážného stavu

Příklad „gain scheduling“

- linearizace

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\Delta x}{\mathrm{d}t} \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\Delta z}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\alpha) - 2\xi\omega_n & \frac{\omega_n}{2\xi\beta(\alpha)} \\ -2\xi\omega_0\beta(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi\omega_0 \\ 2\xi\omega_0\beta(\alpha) \end{bmatrix} \Delta x_r$$

$$\Delta y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

- můžeme vypočítat přenosovou funkci vztahem

$$F(p) = \left[\frac{1}{\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A})} \mathbf{C} \,\mathrm{adj}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B} + \mathbf{D} \right] = \frac{2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}{p^2 + p(2\xi\omega_0 - a(\alpha)) + \omega_0^2}$$

Příklad „gain scheduling“

- v tomto případě obě linearizace vedou na systém se stejnou přenosovou funkcí
- systém

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\beta(x)}\left(u - c\sqrt{2x}\right)$$

tedy můžeme řídit regulátorem

$$u = k(x_r)e + \frac{1}{T}z \qquad \dot{z} = k(x_r)e$$

kde zesílení regulátoru je

$$k(x_r) = 2\xi\omega_0\beta(x_r)$$

přičemž musí platit pro všechna x_r z pracovního rozsahu

$$2\xi\omega_0 \gg \frac{c\sqrt{2x_r}}{2x_r\beta(x_r)}$$

Postup při návrhu „gain scheduling“

- návrh lze shrnout do následujících bodů
  1. linearizovat nelineární model v okolí pracovních bodů, parametrizovat linearizaci pomocí proměnných používaných k přepínání
  2. pro jednotlivé pracovní body navrhnout lineární regulátory, parametrizovat regulátory pomocí proměnných používaných k přepínání
  3. sestavit takový regulátor s přepínáním, že v každém pracovním bodě platí
     - v konstantním pracovním bodě regulátor dosahuje nulové ustálené odchylky
     - linearizace uzavřené smyčky v každém pracovním bodě se shoduje se zpětnovazebním spojením lineárního regulátoru a linearizace soustavy v daném pracovním bodě
  4. ověřit vlastnosti regulátoru simulací pro velké změny pracovního bodu
- pozor - rychlé přepínání regulátorů může vést ke zhoršení dynamických vlastností a případně i nestabilitě
- metoda je vhodná především pro systémy, u kterých se pracovní bod mění pomalu

Zpětnovazební linearizace

Metody linearizace

- dosud jsme řešili linearizaci rozvojem do Taylorovy řady
  - získáme lineární aproximaci platnou v okolí pracovního bodu
  - pokud se vzdálíme od pracovního bodu může dojít ke zhoršení dynamických vlastností, případně i k nestabilitě
  - většinou velmi snadná metoda
- exaktní linearizace
  - lze provést korekci signálu vstupujícího do řízeného systému na základě měření stavů nebo výstupu systému tak, že kompenzujeme nelineární chování
  - zpětnovazební linearizace
  - spojením řízeného systému a korekčního bloku dostaneme skutečný lineární systém (ne pouhou aproximaci)
  - v reálných případech většinou značně komplikované řešení

Exaktní zpětnovazební linearizace

- zpětnovazební linearizace je použitelná pro systémy popsané ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

- linearizace vstup - stav
  - pomocí zavedení zpětných vazeb od jednotlivých stavových proměnných se snažíme převést diferenciální rovnice systému do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{v}$$

- linearizace vstup - výstup
  - řeší případ, kdy výstupní funkce je nelineární

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Linearizace vstup stav

- metodu si přiblížíme na příkladě
- předpokládejme nelineární systém

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{S(h)}(u - a\sqrt{2hg})$$

- zvolíme řízení korigované zpětnou vazbou od veličiny h

$$u = a\sqrt{2hg} + S(h)v$$

  kde v je nový „řídící vstup“ soustavy
- dostaneme lineární systém

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = v$$

- jedná se o čistě integrační systém, který můžeme řídit proporcionálním regulátorem $v = K(h_w - h)$
- výsledkem je řízení ve tvaru

$$u = a\sqrt{2hg} + S(h)K(h_w - h)$$

Linearizace vstup stav

- linearizace bylo dosaženo vstupní transformací

$$\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})\mathbf{v}$$

- vstupní transformace je použitelná jen pokud je nelineární systém ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\beta^{-1}(\mathbf{x})[\mathbf{u} - \alpha(\mathbf{x})]$$

- pokud nelineární systém není v požadovaném tvaru, musíme použít stavovou transformaci

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$$

  která převede systém do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\beta^{-1}(\mathbf{z})[\mathbf{u} - \alpha(\mathbf{z})]$$

- transformace $\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ i její inverze $\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})$ musí mít spojitou první derivaci

Linearizace vstup stav

- předpokládejme systém popsaný rovnicemi

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -2x_1 + ax_2 + \sin x_1$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -x_2 \cos x_1 + u \cos(2x_1)$$

- je zřejmé, že první rovnici nelze linearizovat vstupní transformací
- zavedeme transformaci stavu

$$z_1 = x_1$$
$$z_2 = ax_2 + \sin x_1$$

- nové stavové rovnice

$$\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t} = -2z_1 + z_2$$
$$\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t} = -2z_1 \cos z_1 + \cos z_1 \sin z_1 + au \cos(2z_1)$$

Linearizace vstup stav

- vstupní transformace

$$u = \frac{1}{a\cos(2z_1)}(v - \cos z_1 \sin z_1 + 2z_1 \cos z_1)$$

- výsledné stavové rovnice

$$\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t} = -2z_1 + z_2$$
$$\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t} = v$$

- kombinací transformace stavu a transformace vstupu jsme získali lineární systém
- lze nalézt podmínky existence linearizace a obecnou metodu pro nalezení vhodné transformace
  - značně složitá matematická analýza
  - lze nalézt v doporučené literatuře

Linearizace vstup výstup

- cílem je získání lineárního chování mezi vstupem a výstupem
- předpokládejme systém s jedním vstupem a jedním výstupem ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \quad y = h(\mathbf{x})$$

- hledáme odpovídající lineární systém

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{z} + bv \quad \tilde{y} = \tilde{h}(\mathbf{x})$$

- oba systémy budou vstupně – výstupně ekvivalentní, pokud bude platit

$$\frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}t^i} = \frac{\mathrm{d}^i \tilde{y}}{\mathrm{d}t^i} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

- vhodné transformace najdeme tak, že budeme postupně derivovat výstup systému, dokud nenajdeme závislost na u, pak najdeme transformaci stavů porovnáním derivací a transformaci vstupu

Linearizace vstup výstup

- předpokládejme nelineární systém

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sin x_2 + (x_2+1)x_3\\ \dot{x}_2 &= x_1^5 + x_3\\ \dot{x}_3 &= x_1^2 + u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

- pokusíme se najít náhradu ve tvaru

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2\\ \dot{z}_2 &= v\\ \tilde{y} &= z_1\end{aligned}$$

- vypočteme derivace

$$\dot{y} = \sin x_2 + (x_2+1)x_3 \qquad \ddot{y} = (x_3 + \cos x_2)(x_1^5 + x_3) + (x_2+1)(x_1^2+u)$$

- transformace vstupu

$$u = \frac{1}{x_2+1}\left(v - (x_1^5 + x_3)(x_3 + \cos x_2)\right)$$

Linearizace vstup výstup

- výsledná transformace

$$
\begin{aligned}
z_1 &= x_1 \\
z_2 &= \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3 \\
u &= \frac{1}{x_2 + 1}\left(v - (x_1^5 + x_3)(x_3 + \cos x_2)\right)
\end{aligned}
$$

- dostaneme lineární systém

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= v \\
\tilde{y} &= z_1
\end{aligned}
$$

- můžeme navrhnout lineární řízení v a pak vypočítat řízení u pomocí transformačního vztahu

Linearizace vstup výstup

- původní systém byl 3 řádu, po transformaci jsme dostali systém druhého řádu
- transformací je způsobeno, že část dynamiky systému je „nepozorovatelná“
- vzniká interní dynamika

$$\dot{x}_3 = x_1^2 + \frac{1}{x_2+1}(v - (x_1^5 + x_3)(x_3 + \cos x_2))$$

- pokud je interní dynamika stabilní (v uzavřené smyčce), je navržený regulátor použitelný
- v případě, že je interní dynamika nestabilní, nelze navržený regulátor použít
- analýza stability interní dynamiky může být značně komplikovaná
- detailní popis metody - viz. doporučená literatura

Literatura

Detailní popis metody zpětnovazební linearizace:

- Slotine: Applied Nonlinear Control
- Khalil: Nonlinear Systems
- Razím, Štecha: Nelineární systémy