

---

# **Regulace a řízení II**

## ***Řízení nelineárních systémů***

Obsah

Relé

Řešitelnost

# Obsah

# Obsah přednášky

- reléové regulátory
- řešitelnost nelineárních systémů

Obsah

Relé

Řešitelnost

# Reléové regulátory

Relé

Příklady

Teplota

Potlačení

vibrací

Průběh teploty

Změna

hystereze

Servomechanismus

Trajektorie

Hystereze

Zpětná vazba

Klouzavý

režim

Optimální

Změna struk.

Návrh

Příklad

Výhody

Řešitelnost

# Příklady reléových regulátorů

- reléové regulátory patří k nejstarším používaným regulátorům
- jednoduché regulátory
  - ◆ teploty
    - pokojové termostaty vytápění
    - žehličky
    - ledničky
  - ◆ tlaku
    - domácí vodárny
    - kompresory
- typy regulace
  - ◆ „on-off“ - výstup regulátoru přechází mezi stavy vypnuto a zapnuto
  - ◆ „bang-bang“ - výstup přechází mezi hodnotami  $u_{max}$  a  $-u_{max}$  - časově optimální systémy

Relé

## Příklady

Teplota

Potlačení

vibrací

Průběh teploty

Změna

hystereze

Servomechanismus

Trajektorie

Hystereze

Zpětná vazba

Klouzavý

režim

Optimální

Změna struk.

Návrh

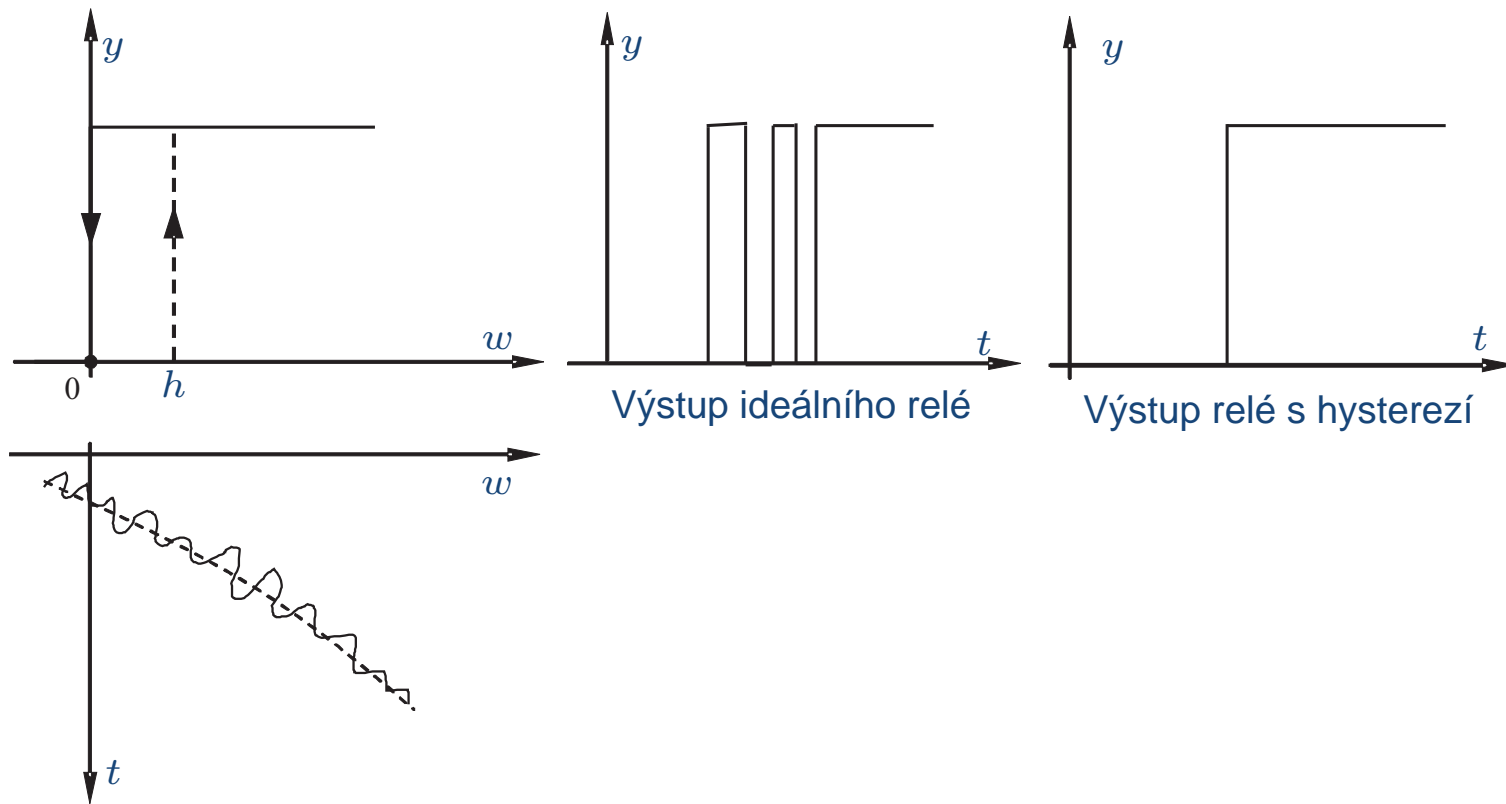
Příklad

Výhody

Řešitelnost



# Potlačení vibrací



Relé

Příklady

Teplota

Potlačení  
vibrací

Průběh teploty

Změna

hystereze

Servomechanismus

Trajektorie

Hystereze

Zpětná vazba

Klouzavý

režim

Optimální

Změna struk.

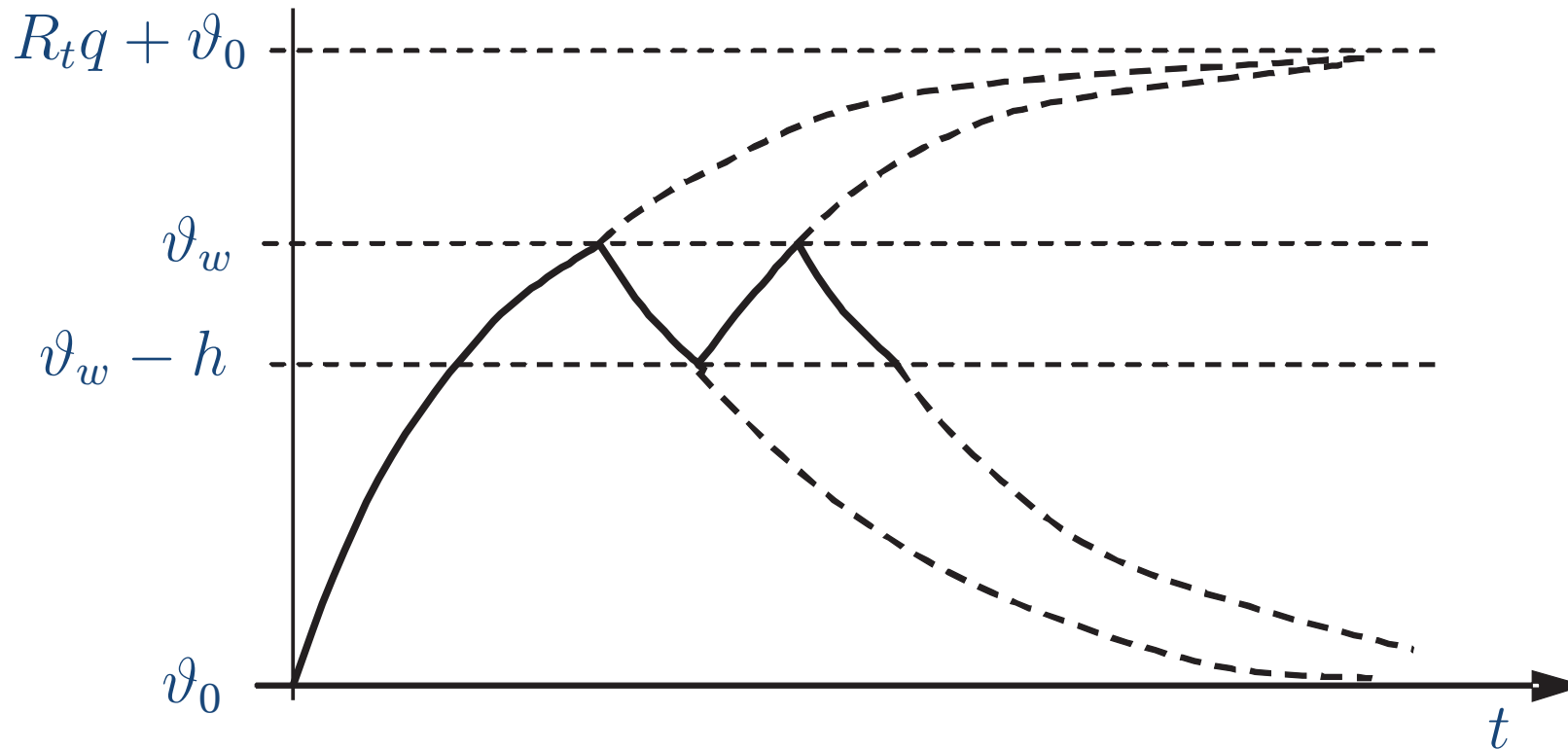
Návrh

Příklad

Výhody

Řešitelnost

# Průběh regulace teploty

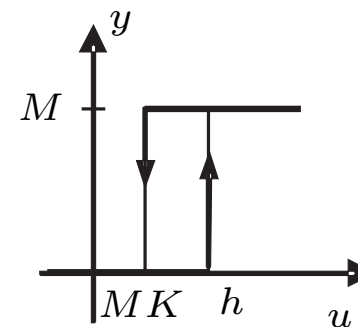
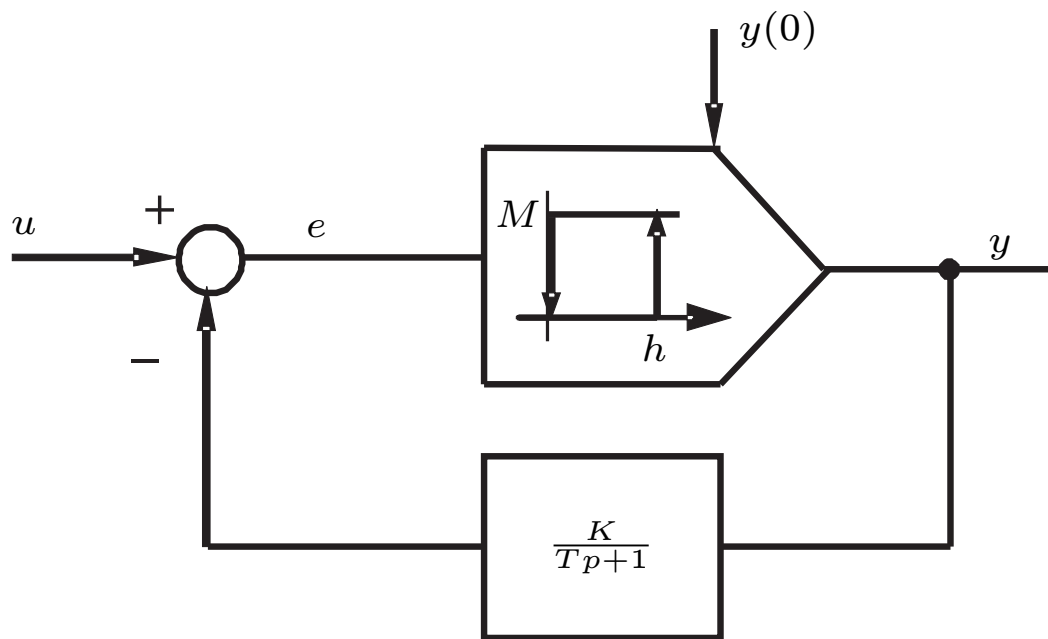


- Relé
- Příklady
- Teplota
- Potlačení vibrací
- Průběh teploty**
- Změna hystereze
- Servomechanismus
- Trajektorie
- Hystereze
- Zpětná vazba
- Klouzavý režim
- Optimální
- Změna struk.
- Návrh
- Příklad
- Výhody
- Řešitelnost



# Změna hystereze

- velikost kmitů závisí na pásmu hystereze
- v řadě případů není možné snadno změnit hysterezi samotné nelinearity
  - ◆ hystereze bimetalového regulátoru teploty je dána jeho mechanickou konstrukcí
- snížení hystereze zavedením zpětné vazby



- Relé
- Příklady
- Teplota
- Potlačení vibrací
- Průběh teploty
- Změna hystereze**
- Servomechanismus
- Trajektorie
- Hystereze
- Zpětná vazba
- Klouzavý režim
- Optimální
- Změna struk.
- Návrh
- Příklad
- Výhody
- Řešitelnost

# Změna hystereze

- zesílení  $K$  musí být v mezích  $0 < KM < h$
- časová konstanta  $T$  musí být malá
  - ◆ změna hystereze se musí projevit u nejvyšší frekvence šířící se obvodem
- u termostatu s bimetalem se řeší pomocí topného tělíska

Relé

Příklady

Teplota

Potlačení

vibrací

Průběh teploty

Změna  
hystereze

Servomechanismus

Trajektorie

Hystereze

Zpětná vazba

Klouzavý

režim

Optimální

Změna struk.

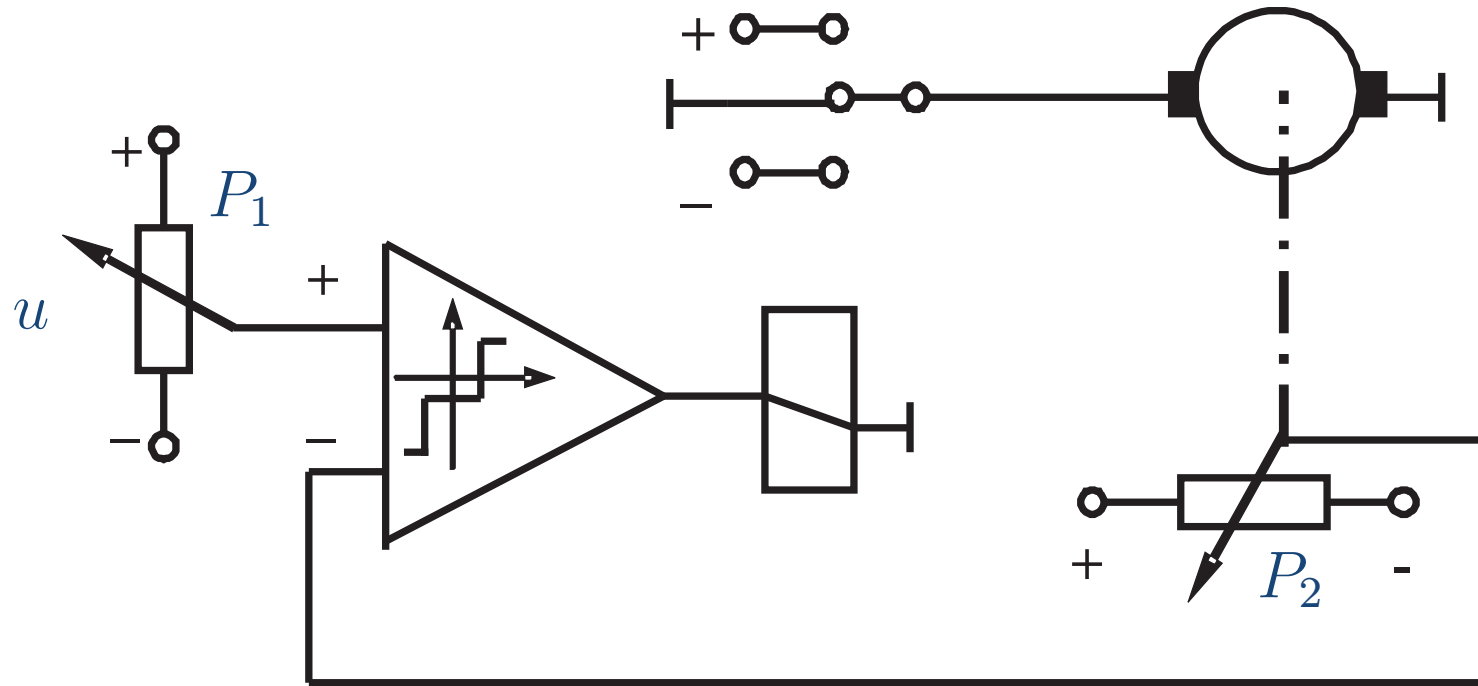
Návrh

Příklad

Výhody

Řešitelnost

# Polohový servomechanismus

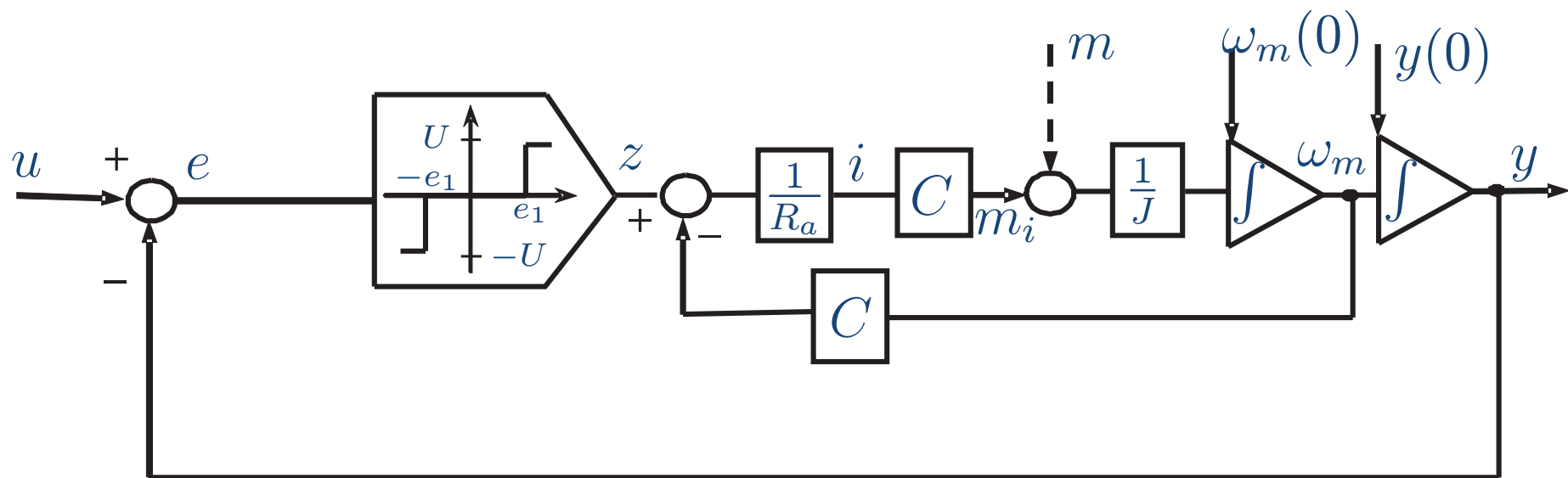


- Relé
- Příklady
- Teplota
- Potlačení vibrací
- Průběh teploty
- Změna hystereze
- Servomechanismus**
- Trajektorie
- Hystereze
- Zpětná vazba
- Klouzavý režim
- Optimální
- Změna struk.
- Návrh
- Příklad
- Výhody

Řešitelnost

$$\frac{dy}{dt} = \omega_m$$
$$\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{C}{JR_a} [-C\omega_m + f(u - y)]$$

# Polohový servomechanismus

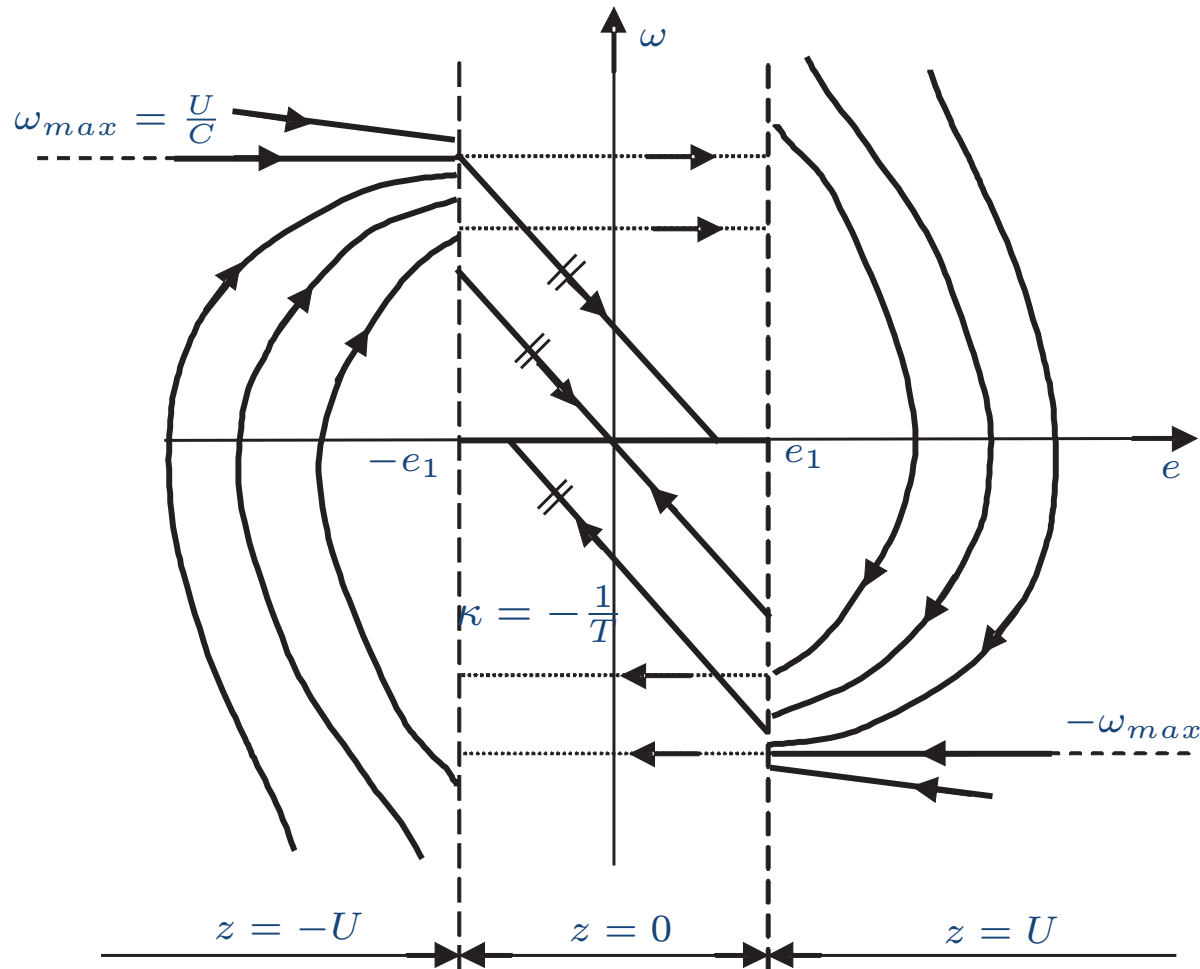


substituce  $u - y = e$ ,  $\omega = -\omega_m$ ,  $T = \frac{JR_a}{C^2}$

$$\frac{de}{dt} = \omega$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{T}\omega - \frac{1}{CT}f(e)$$

# Fázová trajektorie polohového servomechanismu



Postačující podmínka zamezení oscilací  $\frac{\omega_{max}}{2e_1} < \frac{1}{T}$

- Relé
- Příklady
- Teplota
- Potlačení vibrací
- Průběh teploty
- Změna hystereze
- Servomechanismus
- Trajektorie**
- Hystereze
- Zpětná vazba
- Klouzavý režim
- Optimální
- Změna struk.
- Návrh
- Příklad
- Výhody
- Řešitelnost

# Pásmo necitlivosti servomechanismu

- množina rovnovážných stavů je úsečka  
 $\omega = 0, |e| < e_1$
- servomechanismus bude pracovat s chybou  $\pm e_1$
- chybu nelze snížit jen zmenšením pásma necitlivosti
  - ◆ vznik oscilací
- působení tření v pásmu necitlivosti omezuje oscilace

$$\frac{de}{dt} = \omega$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{T}\omega - M_t \operatorname{sign} \omega$$

Relé

Příklady

Teplota

Potlačení  
vibrací

Průběh teploty

Změna

hystereze

Servomechanismus

Trajektorie

**Hystereze**

Zpětná vazba

Klouzavý  
režim

Optimální

Změna struk.

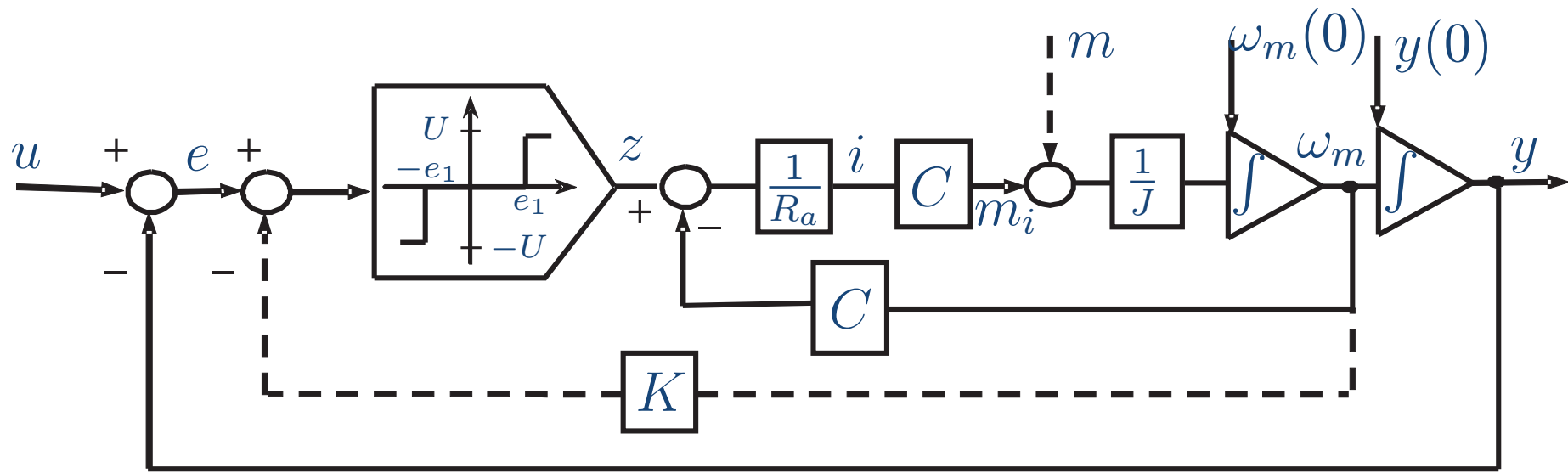
Návrh

Příklad

Výhody

Řešitelnost

## Odstranění kmitů zavedením zpětné vazby

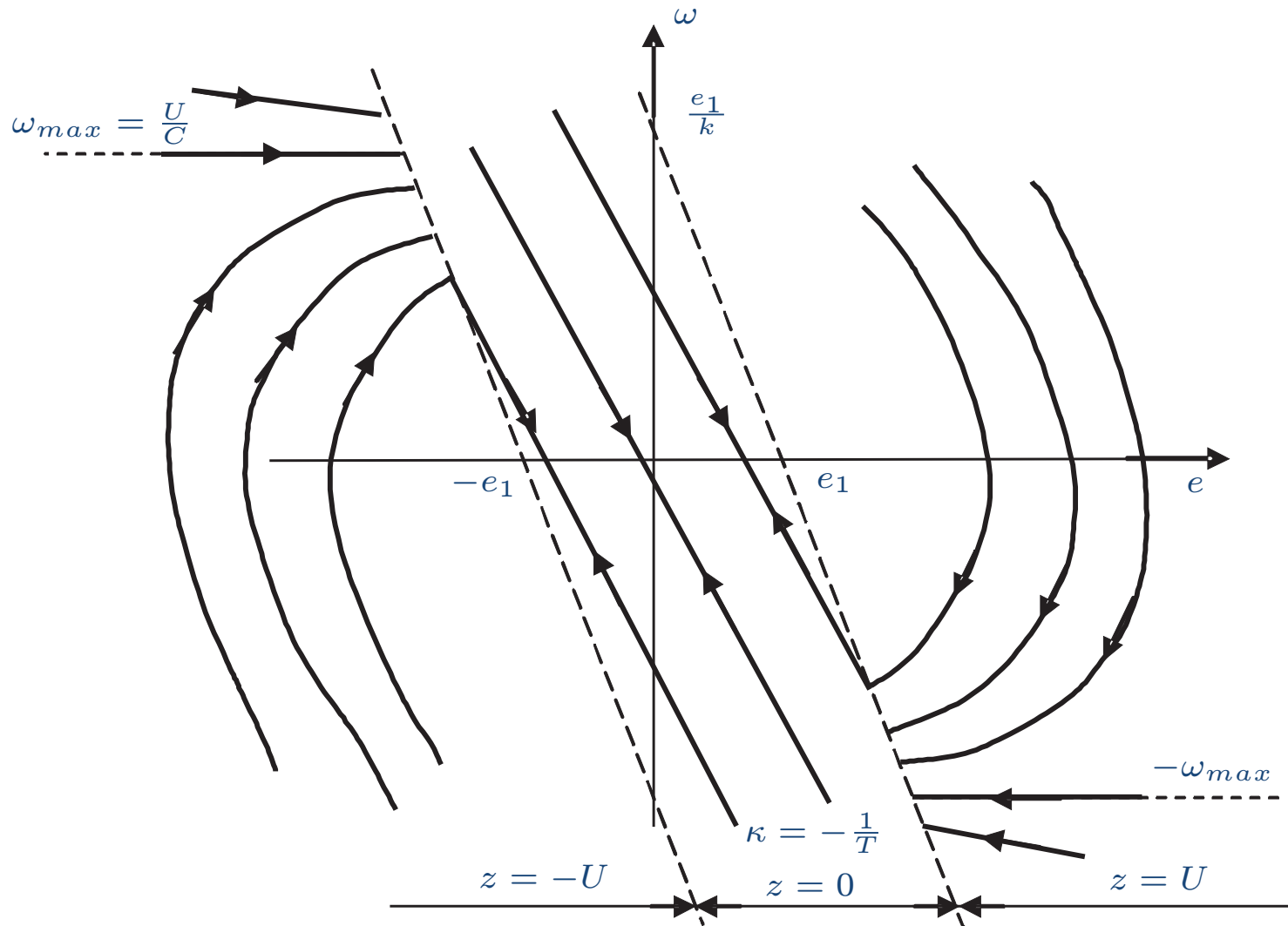


$$\frac{de}{dt} = \omega$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{T}\omega + \frac{1}{CT}f(e + K\omega)$$

- původní systém má oblast necitlivosti pro  $|e| < e_1$
- zpětná vazba změní oblast necitlivosti na  $|e + K\omega| < e_1$

# Odstranění kmitů zavedením zpětné vazby



- Relé
- Příklady
- Teplota
- Potlačení vibrací
- Průběh teploty
- Změna hystereze
- Servomechanismus
- Trajektorie
- Hystereze
- Zpětná vazba**
- Klouzavý režim
- Optimální
- Změna struk.
- Návrh
- Příklad
- Výhody

Postačující podmínka pro zamezení oscilací

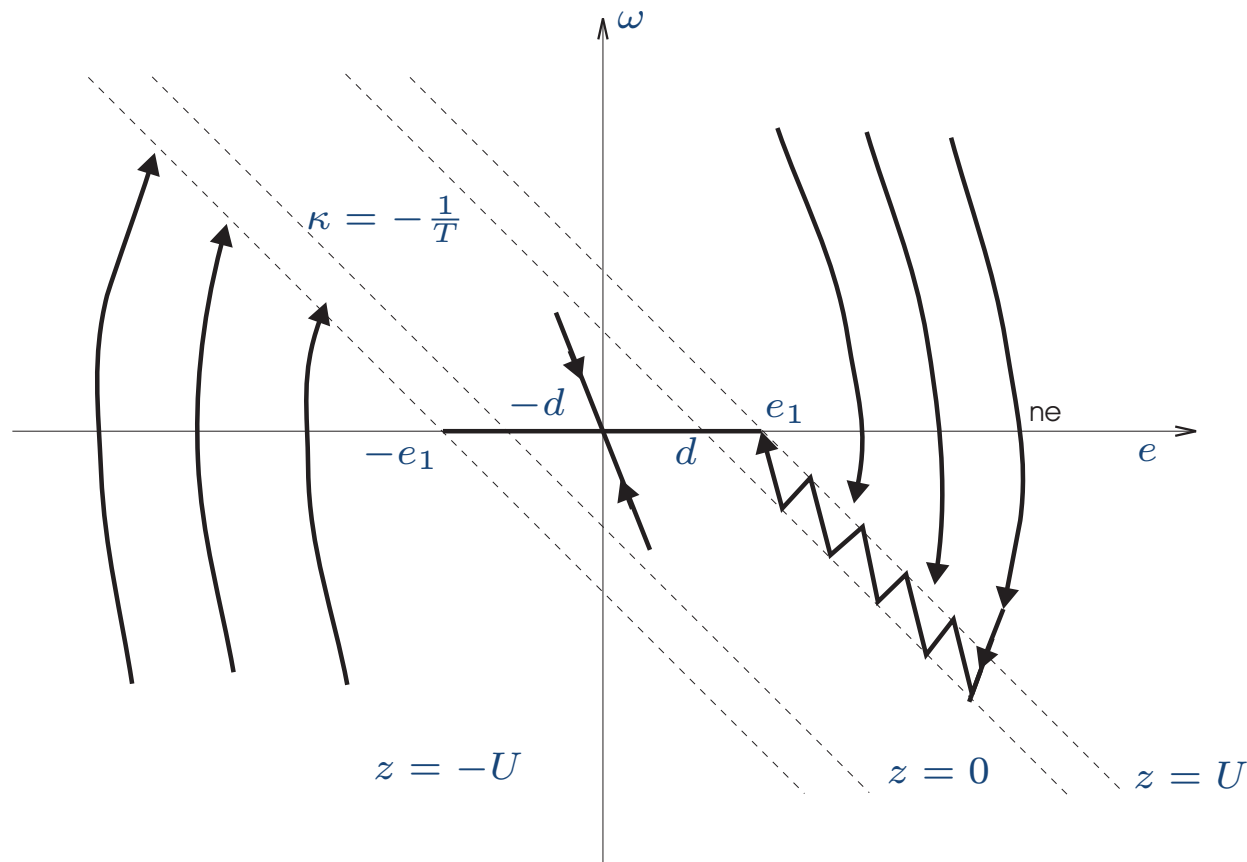
$$\frac{\omega_{max}}{2e_1 + K\omega_{max}} < \frac{1}{T}$$

Řešitelnost



# Klouzavý režim

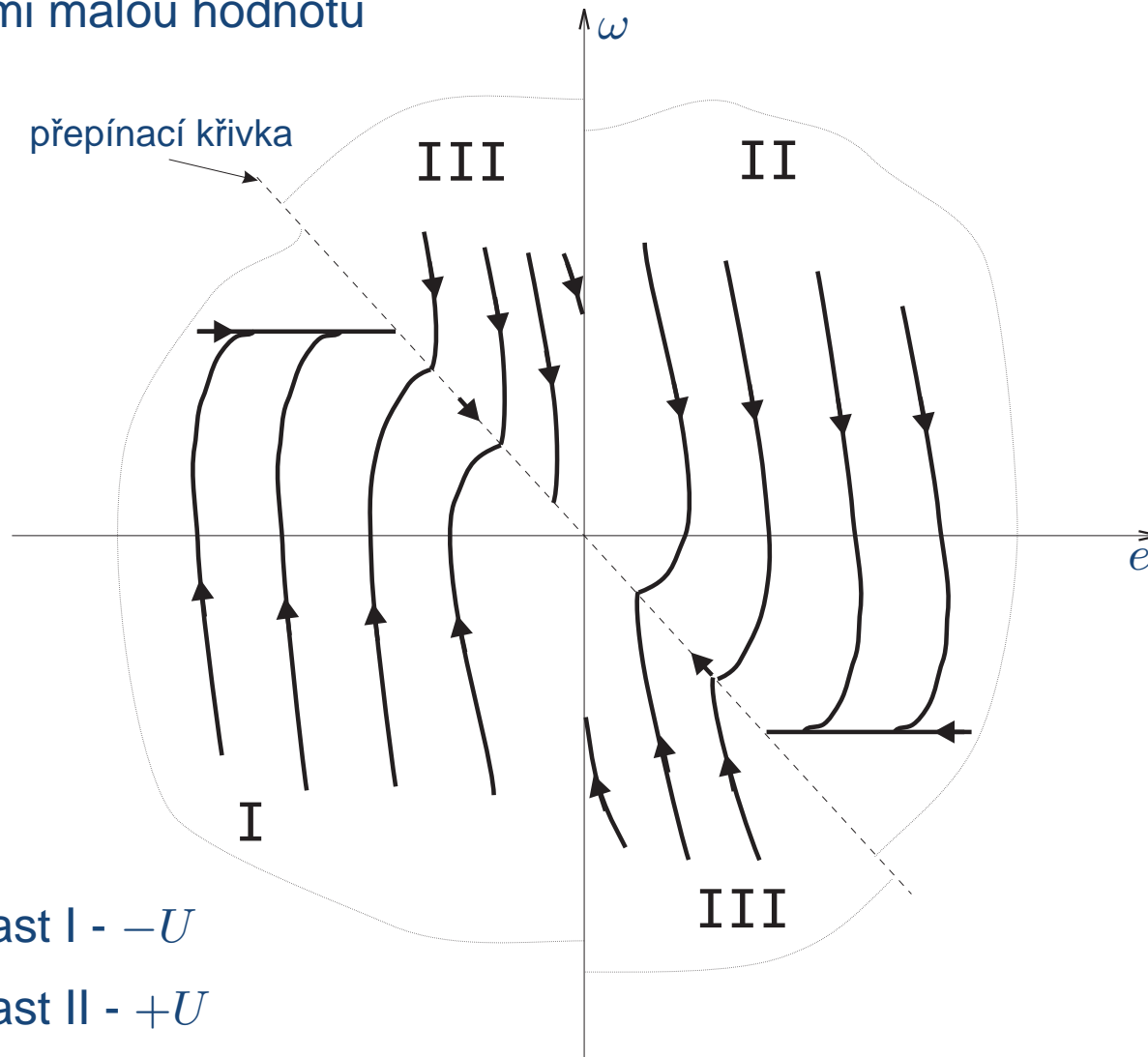
- předpokládejme  $K > T$ 
  - ◆ přepínací přímky mají menší strmost, než trajektorie v neutrální oblasti
- použijeme třístavové relé s hysterezí



Relé
Příklady
Teplota
Potlačení vibrací
Průběh teploty
Změna hystereze
Servomechanismus
Trajektorie
Hystereze
Zpětná vazba
<b>Klouzavý režim</b>
Optimální
Změna struk.
Návrh
Příklad
Výhody
Řešitelnost

# Klouzavý režim

- předpokládejme, že pásmo necitlivosti a hystereze snížíme na velmi malou hodnotu



- oblast I -  $-U$
- oblast II -  $+U$
- oblast III -  $u = 0$  a brzdění třením

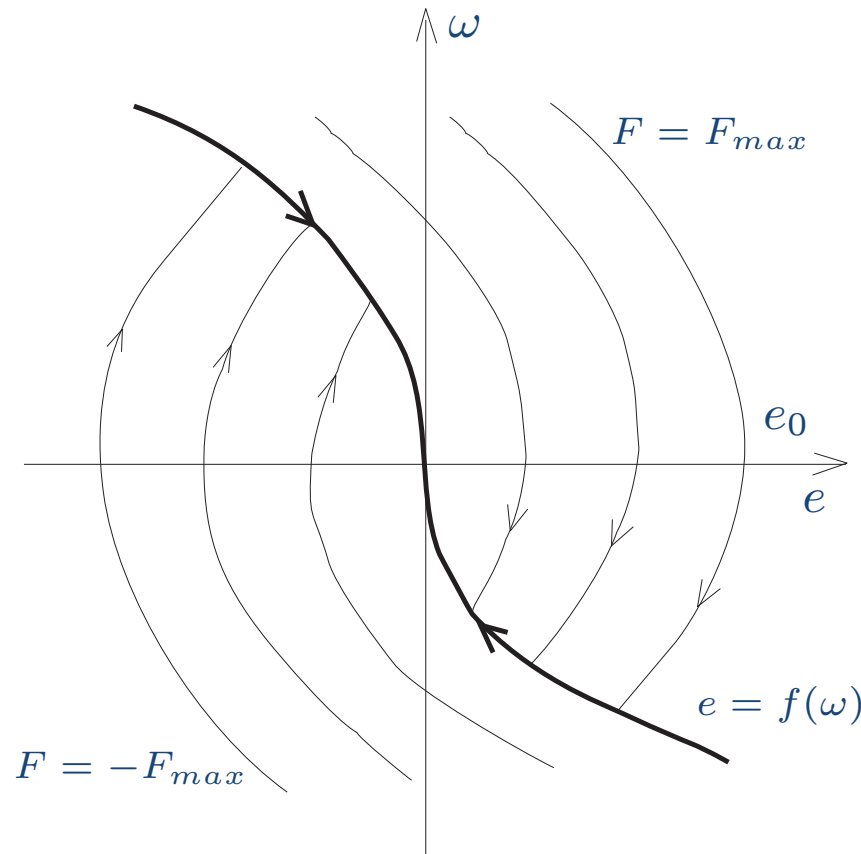
Relé
Příklady
Teplota
Potlačení vibrací
Průběh teploty
Změna hystereze
Servomechanismus
Trajektorie
Hystereze
Zpětná vazba
<b>Klouzavý režim</b>
Optimální
Změna struk.
Návrh
Příklad
Výhody
Řešitelnost

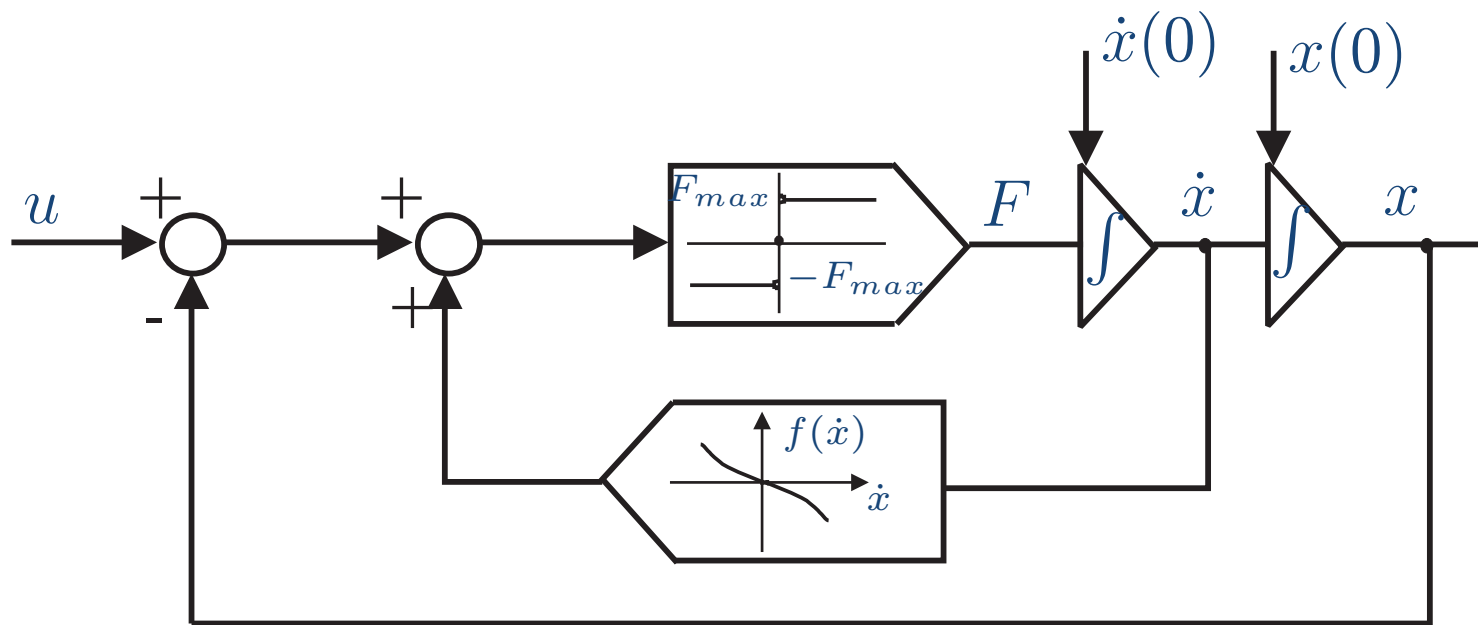
- v každém okamžiku použijeme takové řízení, že trajektorie směřuje k přepínací křivce
- stav systému se pohybuje (klouže) po přepínací křivce
- přepínací křivka  $\omega = \dot{e} = Ke$ 
  - ◆ přechodový děj bude odpovídat lineárnímu systému prvního řádu

- Relé
- Příklady
- Teplota
- Potlačení vibrací
- Průběh teploty
- Změna hystereze
- Servomechanismus
- Trajektorie
- Hystereze
- Zpětná vazba
- Klouzavý režim**
- Optimální
- Změna struk.
- Návrh
- Příklad
- Výhody
- Řešitelnost

# Časově optimální reléové řízení

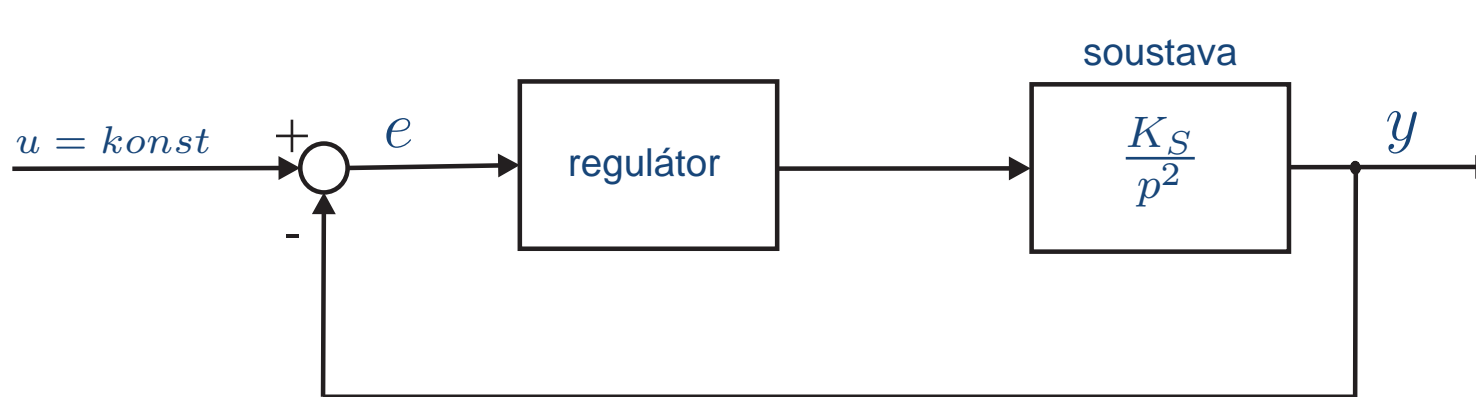
- předpokládejme systém  $m \frac{d^2 x}{dt^2} = F$
- chceme přemístit těleso do počátku za minimální čas
- časově optimální bude patrně takové řízení, kdy budeme nejdříve maximálně zrychlovat a následně maximálně brzdit tak, aby k zastavení došlo v počátku





<u>Relé</u>
Příklady
Teplota
Potlačení vibrací
Průběh teploty
Změna hystereze
Servomechanismus
Trajektorie
Hystereze
Zpětná vazba
Klouzavý režim
<b>Optimální</b>
Změna struk.
Návrh
Příklad
Výhody
<u>Řešitelnost</u>

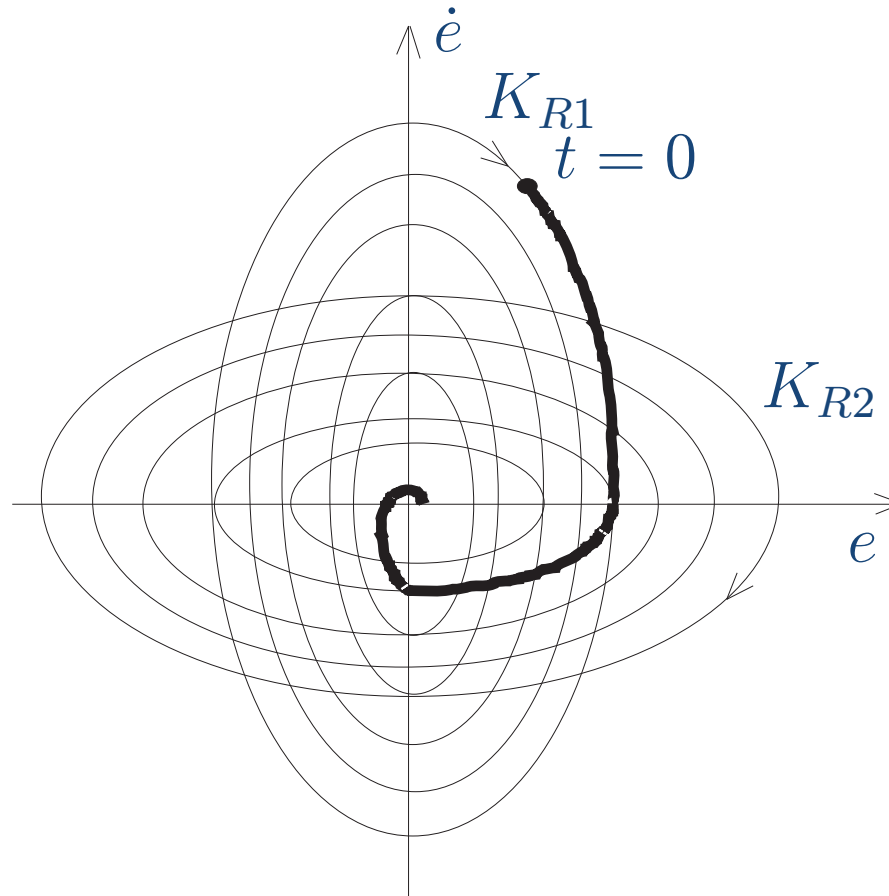
# Jednoduchý regulátor založený na změně struktury



- použijeme P regulátor se zesílením  $K_R > 0$
- předpokládejme  $K_{R1} > \frac{1}{K_S}$  a  $K_{R2} < \frac{1}{K_S}$
- pro obě zesílení jsou trajektorie elipsy s rozdílnou délkou poloos

Relé
Příklady
Teplota
Potlačení vibrací
Průběh teploty
Změna hystereze
Servomechanismus
Trajektorie
Hystereze
Zpětná vazba
Klouzavý režim
Optimální
<b>Změna struk.</b>
Návrh
Příklad
Výhody
Řešitelnost

# Jednoduchý regulátor založený na změně struktury



- Relé
- Příklady
- Teplota
- Potlačení vibrací
- Průběh teploty
- Změna hystereze
- Servomechanismus
- Trajektorie
- Hystereze
- Zpětná vazba
- Klouzavý režim
- Optimální
- Změna struk.**
- Návrh
- Příklad
- Výhody

$$K_R = K_{R1} > \frac{1}{K_S} \quad \text{pro } ew \geq 0 \text{ a neplatí } e = \omega = 0$$

$$K_R = K_{R2} < \frac{1}{K_S} \quad \text{pro } ew < 0$$

$$K_R = 0 \quad \text{pro } e = \omega = 0$$

Řešitelnost

# Návrh reléového regulátoru

- návrh reléového regulátoru lze provést na základě analýzy stability
- předpokládejme lineární systém  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}m$
- hledáme Ljapunovovu funkci a  $m$  pak zvolíme tak, aby  $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt}$  byla negativně definitní
- Ljapunovovu funkci zvolíme ve tvaru kvadratické formy  $V(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{Q}\mathbf{x} \rangle$
- matici  $\mathbf{Q}$  volíme tak, aby  $\mathbf{Q}$  byla pozitivně definitní a  $\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A} = -\mathbf{P}$ , kde  $\mathbf{P}$  je pozitivně definitní
- lze odvodit (skripta)
$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = W(\mathbf{x}) = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{P}\mathbf{x} \rangle + 2\langle m, \mathbf{B}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} \rangle$$
- postačující podmínkou negativní definitnosti  $W(\mathbf{x})$  je  $m_i = -M_i \text{sign}[\mathbf{B}^T \mathbf{Q}\mathbf{x}]_i$



# Příklad návrhu reléového regulátoru

- předpokládejme systém daný maticemi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad a > 0, b > 0$$

- matici  $\mathbf{P}$  zvolíme jednotkovou, řešením soustavy rovnic  $\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A} = -\mathbf{P}$

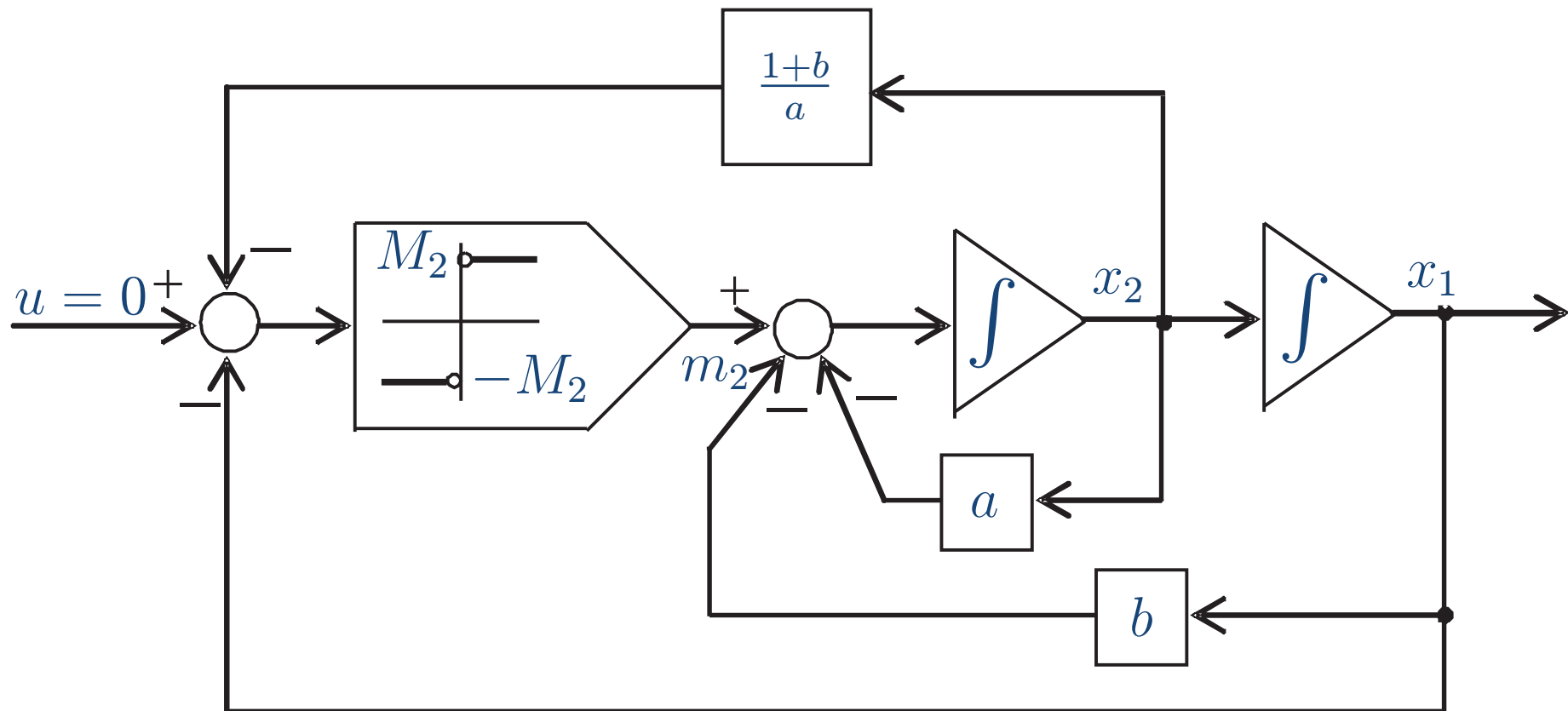
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{a^2 + b(1+b)}{2ab} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{2b} & \frac{1+b}{2ab} \end{bmatrix}$$

- dostaneme vektor

$$\mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{x_1}{2b} + \frac{(1+b)x_2}{2ab} \end{bmatrix}$$

- výsledné řízení  $m_1 = 0; m_2 = -M_2 \operatorname{sign} \left[ x_1 + \frac{1+b}{a} x_2 \right]$
- problémem je nalezení vhodných matic  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{Q}$

# Příklad návrhu reléového regulátoru



# Výhody použití reléových regulátorů

- reléový regulátor lze realizovat poměrně jednoduchými hardwarovými prostředky
- reléové regulátory jsou obvykle značně odolné ke změně parametrů soustavy - robustní řízení
- k návrhu a analýze chování můžeme použít metody známé z analýzy chování nelineárních systémů

Relé

Příklady

Teplota

Potlačení

vibrací

Průběh teploty

Změna

hystereze

Servomechanismus

Trajektorie

Hystereze

Zpětná vazba

Klouzavý

režim

Optimální

Změna struk.

Návrh

Příklad

**Výhody**

Řešitelnost

Relé

Řešitelnost

Ověření  
řešitelnosti  
Příklad

# Řešitelnost nelineárních systémů

# Ověření řešitelnosti

- soustava lineárních diferenciálních rovnic  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$  je vždy řešitelná
- řešitelnost soustavy nelineárních diferenciálních lze zjistit podle věty  
Nechť je dána Cauchyova počáteční úloha

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

v oblasti  $G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  a čísla  $a, b$  taková, že funkce  $\mathbf{f}$  je spojitá na množině

$R = \{(\mathbf{x}, t) \in G \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq b, \|t - t_0\| \leq a\}$ . Označme

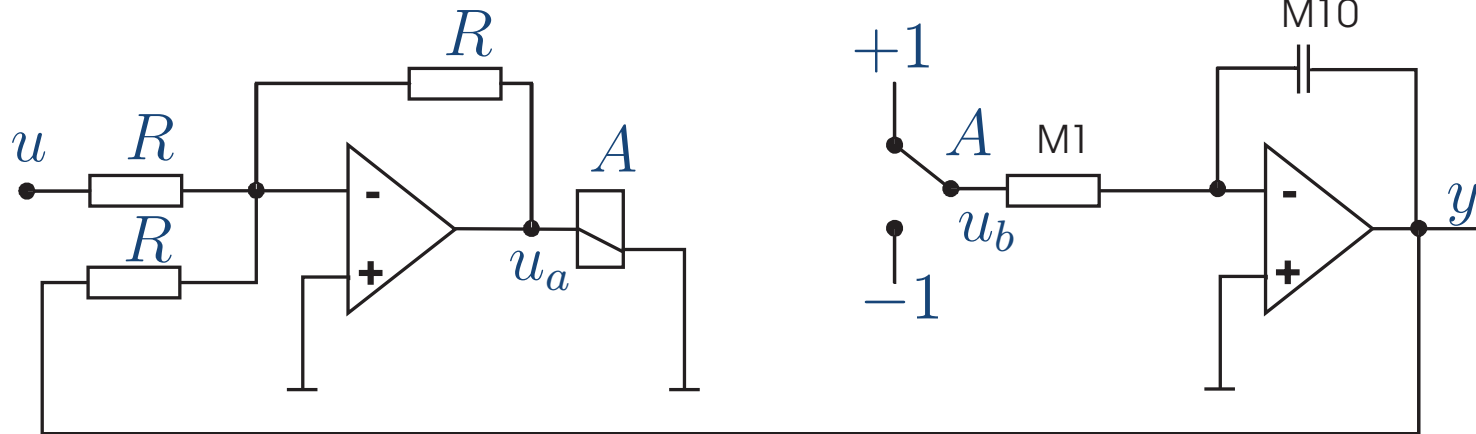
$$M = \max_{(\mathbf{x}, t)} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)\| \quad \alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$$

Pak existuje řešení Cauchyovy počáteční úlohy definované a spojitě diferencovatelné na intervalu  $\langle t_0 - \alpha, t_0 + \alpha \rangle$ .

# Ověření řešitelnosti

- uvedená věta je podmínkou postačující nikoli nutnou, řešení může existovat, i když není splněna
- v technické praxi řešitelnost většinou neověřujeme
- nebezpečí vniku „dvojí chyby“
  1. k reálnému fyzikálnímu systému sestavíme neřešitelný model
    - ◆ první chyba - každý fyzikální systém má nějaké chování a jeho model musí být řešitelný, neřešitelný model vznikl chybou nebo zanedbáním podstatné dynamiky systému
  2. neřešitelný model řešíme s použitím jiného fyzikálního systému
    - ◆ systém použitý k řešení je reálný fyzikální systém, který dá nějaké řešení. Toto řešení je však chybné
- získané řešení vypovídá spíše o vlastnostech systému použitého k řešení

# Příklad



Relé

Řešitelnost

Ověření

řešitelnosti

Příklad

$$\frac{dy}{dt} = \begin{cases} -1 & -u - y < 0 \\ 1 & -u - y \geq 0 \end{cases}$$