
Regulace a řízení II

Řízení nelineárních systémů

Obsah

Klouz. rež.

Obsah

- řízení v klouzavém režimu
- robustní řízení

Obsah

Klouz. rež.

Řízení v klouzavém režimu

Obsah

Klouz. rež.
Opakování
Odvození
Postup návrhu
Vlastnosti
Příklad
Servomechanismus
Problémy
Náhrada relé
Závěr

- předpokládejme, že přepínací přímky mají menší strmost, než trajektorie v neutrální oblasti
- použijeme třístavové relé s hysterezí

Obsah

Klouz. rež.

Opakování

Odvození

Postup návrhu

Vlastnosti

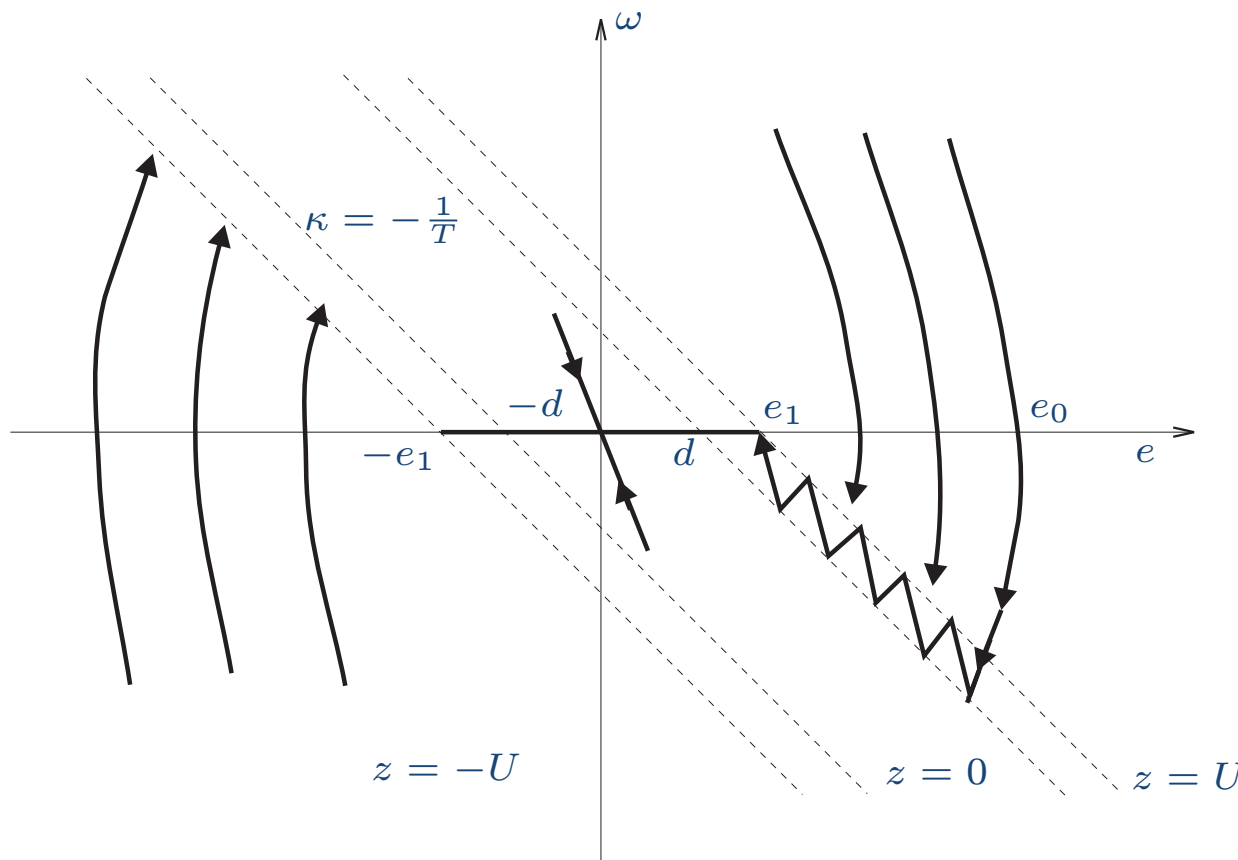
Příklad

Servomechanismus

Problémy

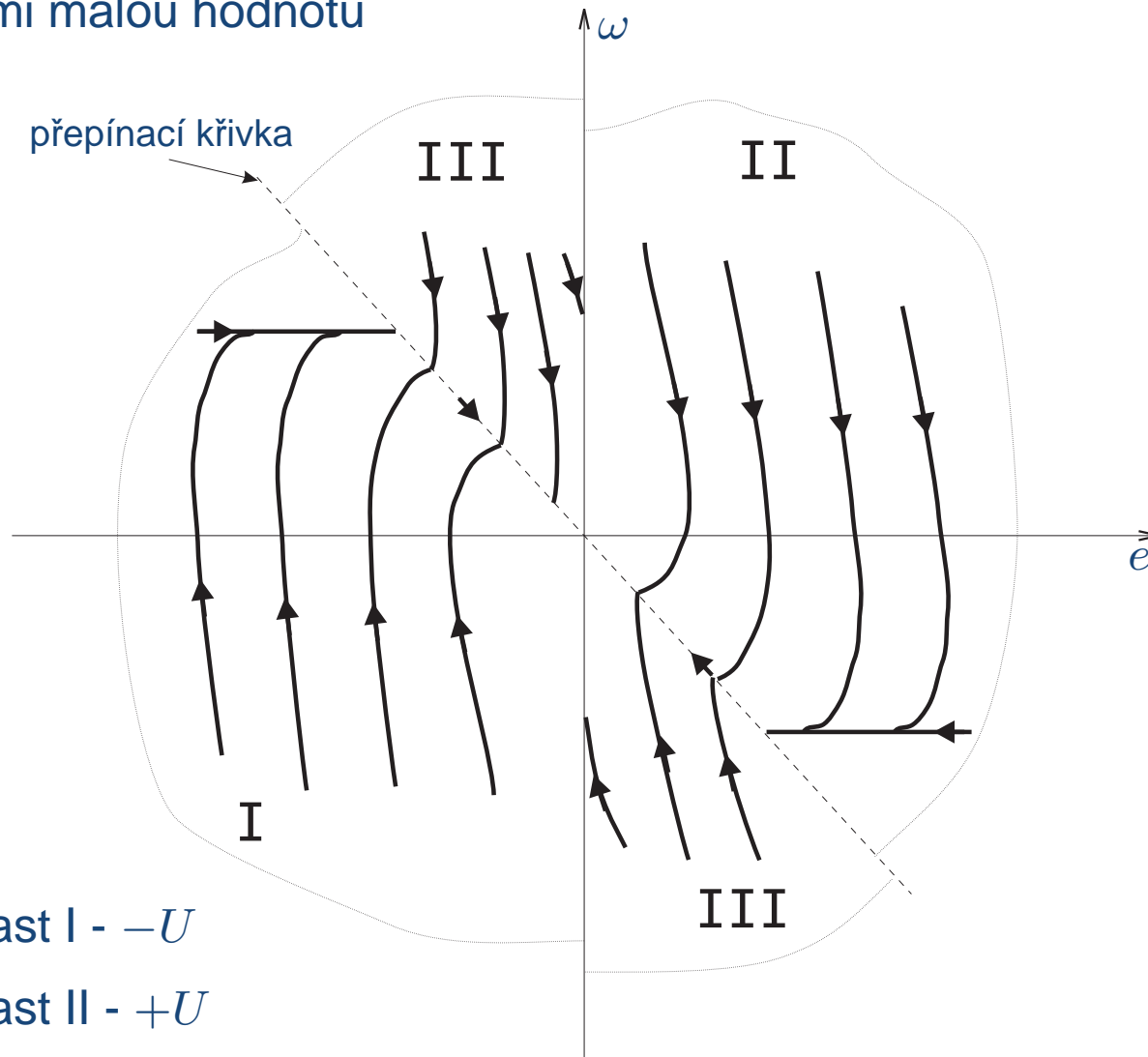
Náhrada relé

Závěr



Opakování

- předpokládejme, že pásmo necitlivosti a hystereze snížíme na velmi malou hodnotu



- oblast I - $-U$
- oblast II - $+U$
- oblast III - $u = 0$ a brzdění třením

Obsah

Klouz. rež.

Opakování

Odvození

Postup návrhu

Vlastnosti

Příklad

Servomechanismus

Problémy

Náhrada relé

Závěr

- v každém okamžiku použijeme takové řízení, že trajektorie směřuje k přepínací křivce
- stav systému se pohybuje (klouže) po přepínací křivce
- přepínací křivka $\omega = \dot{e} = Ke$
 - ◆ přechodový děj bude odpovídat lineárnímu systému prvního řádu

Obsah

Klouz. rež.

Opakování

Odvození

Postup návrhu

Vlastnosti

Příklad

Servomechanismus

Problémy

Náhrada relé

Závěr

- předpokládejme systém popsany soustavou diferenciálních rovnic

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\delta}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})[\mathbf{u} + \boldsymbol{\delta}_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})]$$

kde $\boldsymbol{\delta}_1$ a $\boldsymbol{\delta}_2$ nemusí být přesně známé

- vhodnou transformací stavových proměnných systém převedeme do tvaru

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\delta}_\eta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$$

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{f}_a(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) + \mathbf{G}_a(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})[\mathbf{u} + \boldsymbol{\delta}_\xi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{u})]$$

- budeme řešit problém stabilizace systému, tak, aby bylo dosaženo stavu $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$
- předpokládáme, že platí $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{f}_a(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\delta}_\eta(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

Obsah

Klouz. rež.

Opakování

Odvození

Postup návrhu

Vlastnosti

Příklad

Servomechanismus

Problémy

Náhrada relé

Závěr

- v první fázi budeme řešit stabilizaci systému

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\delta}_\eta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$$

- vektor $\boldsymbol{\xi}$ považujeme nyní za řídicí vstup
- zvolíme hodnotu řízení jako funkci stavových proměnných $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\eta})$, $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
- systém

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\eta})) + \boldsymbol{\delta}_\eta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\eta}))$$

musí být asymptoticky stabilní. Na základě tohoto požadavku určíme funkci $\boldsymbol{\phi}$

Obsah

Klouz. rež.

Opakování

Odvození

Postup návrhu

Vlastnosti

Příklad

Servomechanismus

Problémy

Náhrada relé

Závěr

- předpokládejme, že se nám podařilo najít funkci $\xi = \phi(\eta)$
- musíme zajistit, aby stavový vektor ξ sledoval hodnotu $\phi(\eta)$
- nechť $z = \xi - \phi(\eta)$
- pokud bude $z = 0$, bude platit $\xi = \phi(\eta)$, stavový vektor η půjde asymptoticky k 0 a tím i ξ půjde asymptoticky k 0
- musíme najít takové řízení, které v konečném čase dosáhne stavu $z = 0$ a následně tento stav udrží

Obsah

Klouz. rež.

Opakování

Odvození

Postup návrhu

Vlastnosti

Příklad

Servomechanismus

Problémy

Náhrada relé

Závěr

- vypočteme derivaci vektoru proměnných \mathbf{z}

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{z}}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} - \frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\eta}} \frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} = \\ &= \mathbf{f}_a(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) + \mathbf{G}_a(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})[\mathbf{u} + \boldsymbol{\delta}_\xi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{u})] - \frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\eta}}[\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\delta}_\eta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})]\end{aligned}$$

- řízení zvolíme ve tvaru $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{eq} + \mathbf{G}_a^{-1}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})\mathbf{v}$
- část řízení \mathbf{u}_{eq} zvolíme tak, aby byly vykompenzovány známé členy

$$\mathbf{u}_{eq} = \mathbf{G}_a^{-1}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \left[-\mathbf{f}_a(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) + \frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\eta}} \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \right]$$

- dosadíme do vztahu pro derivaci $\dot{\mathbf{z}}$

- pokud by v systému nebyly žádné neurčitosti, bude řešením řízení $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{eq}$
- pokud jsou v systému neurčitosti dané funkcemi δ_η, δ_ξ dostaneme

$$\frac{dz}{dt} = \mathbf{v} + \Delta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v})$$

$$\Delta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) = \mathbf{G}_a(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})\delta_\xi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}_{eq} + \mathbf{G}_a^{-1}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})\mathbf{v}) - \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\eta}}\delta_\eta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$$

- předpokládejme, že maximální možná hodnota výrazu $\Delta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v})$ je omezená

$$\|\Delta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v})\|_\infty \leq \rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) + k\|\mathbf{v}\|_\infty$$

kde skalární funkce $\rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \geq 0$ a parametr $k \in \langle 0, 1 \rangle$ jsou známé

- musíme vytvořit takové řízení \mathbf{v} , které bude stav \mathbf{z} směřovat k přepínací závislosti $\mathbf{z} = \mathbf{0}$
- dostaneme soustavu rovnic

$$\frac{dz_i}{dt} = v_i + \Delta_i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) \quad i = 1, 2, \dots, p$$

- vhodné řízení pro každou z rovnic navrhne snadno pomocí Ljapunovovy metody analýzy stability

Obsah

Klouz. rež.

Opakování

Odvození

Postup návrhu

Vlastnosti

Příklad

Servomechanismus

Problémy

Náhrada relé

Závěr

- Ljapunovova funkce a její derivace

$$V_i = \frac{1}{2} z_i^2$$

$$\frac{dV_i}{dt} = z_i \frac{dz_i}{dt} = z_i v_i + z_i \Delta_i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) \leq z_i v_i + |z_i| [\rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) + k \|\mathbf{v}\|_\infty]$$

- necht'

$$v_i = -\frac{\beta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})}{1-k} \text{sign } z_i \quad i = 1, 2, \dots, p$$

kde $\beta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \geq \rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) + b$ a $b > 0$

- odtud vyplývá nerovnost

$$\begin{aligned} \frac{dV_i}{dt} &\leq -\frac{\beta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})}{1-k} |z_i| + \rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) |z_i| + k \frac{\beta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})}{1-k} |z_i| = \\ &= -\beta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) |z_i| + \rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) |z_i| \leq -b |z_i| \end{aligned}$$

- pro derivaci Ljapunovovy funkce při zvoleném řízení tedy platí

$$\frac{dV_i}{dt} \leq -b|z_i|$$

- je zřejmé, že pokud dosáhneme přepínací podmínku $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ (křivka, plocha, manifold), již na ní setrváme
- protože platí

$$\frac{dV_i}{dt} = z_i \frac{dz_i}{dt} \leq -b|z_i|$$

$$\frac{dz_i}{dt} \leq -b \quad z_i > 0$$

$$\frac{dz_i}{dt} \geq b \quad z_i < 0$$

je zřejmé, že hodnota $|z_i|$ klesá rychleji než lineárně a musí tedy v konečném čase dosáhnout $\mathbf{z} = \mathbf{0}$

1. převést systém na standardní tvar
2. navrhnout přepínací manifold (přímka, plocha,....) $\xi = \phi(\eta)$ odpovídající řízení systému se sníženým řádem
3. odhadnout hodnotu $\rho(\eta, \xi)$ a k
4. navrhnout řízení $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{eq} + \mathbf{G}_a^{-1}(\eta, \xi)\mathbf{v}$

Obsah

Klouz. rež.

Opakování

Odvození

Postup návrhu

Vlastnosti

Příklad

Servomechanismus

Problémy

Náhrada relé

Závěr

- řízení bude probíhat ve dvou fázích
 1. dosažení přepínacího manifoldu $z = 0$
 2. stav systému se pohybuje po manifoldu, na kterém dochází k přepínání
- po dosažení $z = 0$ bude dynamika regulační smyčky odpovídat systému nižšího řádu
- lze navrhnout regulátor, který stabilizuje soustavu pro dané rozmezí parametrů soustavy
 - ◆ robustní řízení

Obsah

Klouz. rež.

Opakování

Odvození

Postup návrhu

Vlastnosti

Příklad

Servomechanismus

Problémy

Náhrada relé

Závěr

- uvažujme systém druhého řádu popsany rovnicemi

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + \theta_1 x_1 \sin x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \theta_2 x_2^2 + x_1 + u$$

kde θ_1, θ_2 jsou neznámé parametry, o kterých víme $|\theta_1| \leq a, |\theta_2| \leq b$

- systém je již ve standardním tvaru
- v prvním kroku budeme navrhovat řízení systému

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + \theta_1 x_1 \sin x_2$$

vstupem x_2

Obsah

Klouz. rež.

Opakování

Odvození

Postup návrhu

Vlastnosti

Příklad

Servomechanismus

Problémy

Náhrada relé

Závěr

- zvolíme Ljapunovovu funkci $V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$,

$$\dot{V}(x_1) = x_1\dot{x}_1 = x_1x_2 + \theta_1x_1^2 \sin x_2 \leq x_1x_2 + ax_1^2$$

- možné stabilizující řízení je $x_2 = -(1+a)x_1$

$$\dot{V}(x_1) \leq -(1+a)x_1^2 + ax_1^2 = -x_1^2$$

- přepínací přímka $z = x_2 + (1+a)x_1 = 0$

$$\dot{z} = \dot{x}_2 + (1+a)\dot{x}_1 = \theta_2x_2^2 + x_1 + u + (1+a)(x_2 + \theta_1x_1 \sin x_2)$$

- známé členy eliminujeme $u_{eq} = -x_1 - (1+a)x_2$

- při řízení $u = u_{eq} + v$ pak dostaneme $\dot{z} = v + \Delta(\mathbf{x})$, kde

$$\Delta(\mathbf{x}) = \theta_2x_2^2 + (1+a)\theta_1x_1 \sin x_2$$

- je zřejmé, že $|\Delta(\mathbf{x})| \leq a(1+a)|x_1| + bx_2^2$

- můžeme tedy zvolit $\beta(\mathbf{x}) = a(1+a)|x_1| + bx_2^2 + b_0 \quad b_0 > 0$

- výsledné řízení

$$u = u_{eq} - \beta(\mathbf{x}) \operatorname{sign} z =$$

$$= -x_1 - (1+a)x_2 - (a(1+a)|x_1| + bx_2^2 + b_0) \operatorname{sign}(x_2 + (1+a)x_1)$$

Obsah

Klouz. rež.

Opakování

Odvození

Postup návrhu

Vlastnosti

Příklad

Servomechanismus

Problémy

Náhrada relé

Závěr

Příklad servomechanismus

- rovnice systému

$$\frac{dy}{dt} = \omega_m$$
$$\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{C}{JR_a} [-C\omega_m + u]$$

- konstanta stroje C je neměnná a lze předpokládat, že její hodnotu známe
- skutečný moment setrvačnosti J a odpor kotvy R_a se může měnit, budeme předpokládat, že $J \geq \hat{J}$ a $R_a \geq \hat{R}_a$, kde \hat{J} a \hat{R}_a jsou nominální hodnoty
- rovnice lze upravit do tvaru

$$\frac{dy}{dt} = \omega_m$$
$$\frac{d\omega_m}{dt} = a[-C\omega_m + u]$$
$$a = \frac{C}{JR_a}$$

- je zřejmé, že bude platit $a \leq \hat{a}$
- rovnice převedeme do standardního tvaru pro metodu návrhu klouzavého režimu

$$\frac{dy}{dt} = \omega_m$$
$$\frac{d\omega_m}{dt} = \hat{a} \left[u + \frac{a - \hat{a}}{\hat{a}} u - \frac{Ca}{\hat{a}} \omega_m \right]$$

Příklad servomechanismus

- navrhne stabilizující řízení pro systém $\dot{y} = \omega_m$, kde řídicím vstupem je nyní ω_m

$$\omega_m = -Ky \quad K > 0$$

- přepínací přímka $z = \omega_m + Ky = 0$
- navrhne řízení, které stabilizuje novou proměnnou z

$$\dot{z} = \dot{\omega}_m + K\dot{y} = \hat{a} \left[u + \frac{a - \hat{a}}{\hat{a}}u + \frac{K - Ca}{\hat{a}}\omega_m \right]$$

- řízení zvolíme ve tvaru $u = u_{eq} + \frac{v}{\hat{a}}$, $u_{eq} = 0$

$$\dot{z} = v + \frac{a - \hat{a}}{\hat{a}}v + (K - Ca)\omega_m = v + \Delta$$

$$\Delta = \frac{a - \hat{a}}{\hat{a}}v + (K - Ca)\omega_m$$

Příklad servomechanismus

- najdeme omezení hodnoty Δ

$$|\Delta| \leq |\delta_a| |v| + |K - Ca| |\omega_m|$$

- vzhledem k tomu, že $|\delta_a| = \left| \frac{a - \hat{a}}{\hat{a}} \right| < 1$ odpovídá nerovnost pro Δ tvaru $|\Delta| \leq \rho + k|v|$, kde $k = \delta_a$ a $\rho = |K - Ca| |\omega_m|$

- hledáme omezení $\beta > \rho$

$$\beta = |K - Ca| \omega_{max}$$

- výsledné řízení

$$v = -\frac{\beta}{1 - k} \text{sign } z = -\frac{|K - Ca| \omega_{max}}{1 - |\delta_a|} \text{sign}(y + K\omega_m)$$

$$u = -\frac{|K - Ca| \omega_{max}}{\hat{a}(1 - |\delta_a|)} \text{sign}(y + K\omega_m) = -\frac{|K - Ca| \omega_{max}}{\hat{a} - |a - \hat{a}|} \text{sign}(y + K\omega_m)$$

- vzhledem k tomu, že předpokládáme $a < \hat{a}$, platí

$$\begin{aligned} u &= -\frac{|K - Ca| \omega_{max}}{a} \text{sign}(y + K\omega_m) = -\left| \frac{K}{a} - C \right| \omega_{max} \text{sign}(y + K\omega_m) = \\ &= -|KTC - C| \omega_{max} \text{sign}(y + K\omega_m) = -|KT - 1| C \omega_{max} \text{sign}(y + K\omega_m) \end{aligned}$$

- můžeme použít řízení

$$u = -U \text{sign}(y + K\omega_m) \quad U \geq |KT - 1| C \omega_{max}$$

Problémy řízení v klouzavém režimu

- použití reléového regulátoru vede často na neřešitelný systém
 - ◆ viz diskuze řešitelnosti systému nelineárních rovnic
 - ◆ přepínání je výrazně ovlivněno dynamikou přepínacího systému
 - ◆ k přepínání nedochází přesně na definovaném přepínacím rozhraní
 - ◆ stav systému neklouže po definovaném rozhraní, ale kmitá v okolí tohoto rozhraní
- i v blízkosti ustáleného stavu dochází k neustálému přepínání řízení
 - ◆ v případě elektrických systémů obvykle toto nepředstavuje problém
 - ◆ v řadě případů není neustálé přepínání možné z technologických důvodů

Obsah

Klouz. rež.

Opakování

Odvození

Postup návrhu

Vlastnosti

Příklad

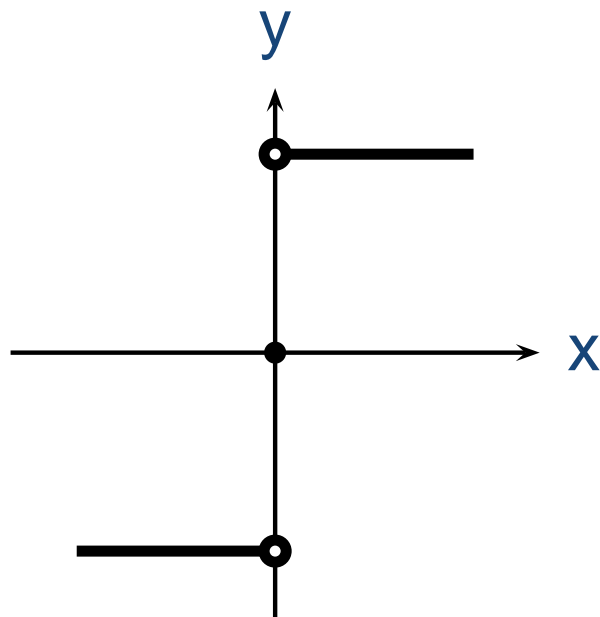
Servomechanismus

Problémy

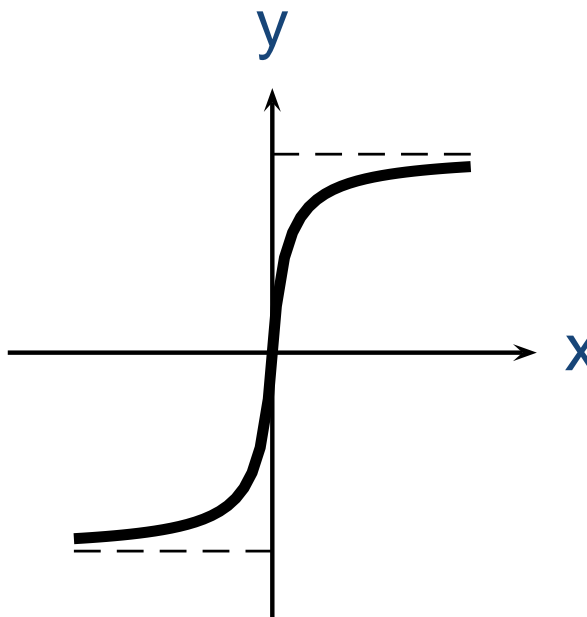
Náhrada relé

Závěr

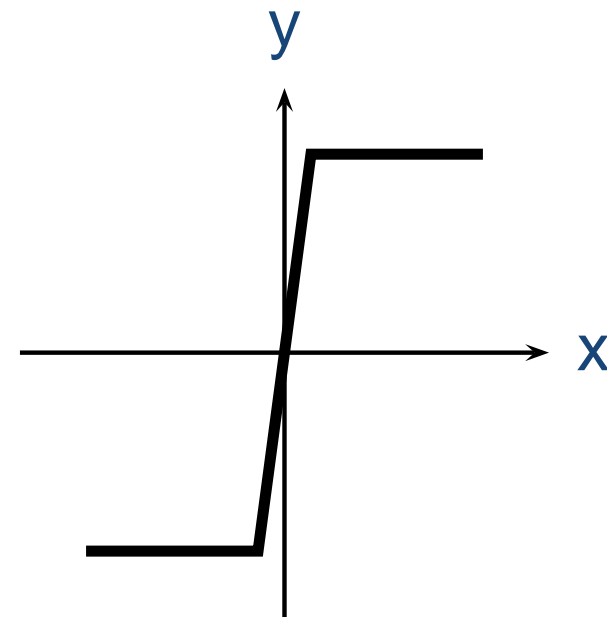
Náhrada relé



(a) signum



(b) Ambrosinova aproximace



(c) nasycení

- reléová charakteristika způsobuje problémy z důvodu nespojitosti, dochází k neustálému přepínání akční veličiny
- aproximace funkcí $y_{max} \frac{x}{|x|+\delta}$, nebo nasycení se zesílením K
- pro $\delta \rightarrow 0$, případně $K \rightarrow \infty$ se blížíme reléové charakteristice

- při použití aproximace lze omezit kmitání akční veličiny a systém je řešitelný
- na spínacím rozhraní se bude výstup regulátoru blížit $u = u_{eq}$ bez kmitání
- trajektorie systému se nebude pohybovat po spínacím rozhraní, ale v oblasti kolem tohoto rozhraní
- šířka oblasti, ve které se pohybuje stav systému, se zmenšuje s rostoucí strmostí aproximace
- malá strmost aproximace způsobuje snížení robustnosti, velká strmost může vyvolat kmitání
- strmost aproximace se často volí experimentálně

Obsah

Klouz. rež.

Opakování

Odvození

Postup návrhu

Vlastnosti

Příklad

Servomechanismus

Problémy

Náhrada relé

Závěr

- relativně jednoduchý návrh regulátoru
- jednoduchá realizace regulátoru
- lze dosáhnout stabilizace systému i při změnách parametrů soustavy - robustní řízení
- volbou přepínacího rozhraní můžeme dosáhnout požadovaného chování

Obsah

Klouz. rež.

Opakování

Odvození

Postup návrhu

Vlastnosti

Příklad

Servomechanismus

Problémy

Náhrada relé

Závěr