

VŠB – Technická universita Ostrava
Fakulta strojní
Katedra automatizační techniky a řízení
Česká republika

STAVOVÉ ŘÍZENÍ

Prof. Ing. Miluše Vítečková, CSc.
Prof. Ing. Antonín Víteček, CSc., Dr.h.c.

Ostrava 2016

Lektor: Doc. Ing. Milan Heger, CSc.

Copyright ©: Prof. Ing. Miluše Vítěčková, CSc.

Prof. Ing. Antonín Vítěček, CSc., Dr.h.c.

STAVOVÉ ŘÍZENÍ

ISBN 978-80-248-3900-4

PŘEDMLUVA

Učební texty „Stavové řízení“ jsou věnovány základům automatického řízení. Hlavní důraz je kladen na popis principů stavového prostoru a záporné zpětné vazby a jejich využití pro řízení lineárních dynamických systémů. Učební texty se věnují nejdůležitější oblasti stavového řízení SISO systémům.

Vzhledem k tomu, že učební texty pojednávají o základech stavového řízení, nejsou v textech uváděny přesné důkazy. Pro prohloubení a rozšíření studijního materiálu jsou doporučeny níže uvedené publikace:

OGATA, K. *Modern Control Engineering*. 5th Edition. Prentice-Hall, Boston, 2010

FRANKLIN, G.F., POWELL, J.D., EMAMI-NAEINI, A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 4th Edition. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002

MANDAL, A. K. *Introduction to Control Engineering. Modeling, Analysis and Design*. New Age International (P) Publishers, New Delhi, 2006

NISE, N. S. *Control Systems Engineering*. 6th Edition. John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey, 2011

NOSKIEVIČ, P. *Modelování a identifikace systémů*. Montanex, Ostrava, 1999.

Předpokládá se, že studenti mají základní znalosti z klasické automatické regulace v rozsahu učebních textů, např.:

VÍTEČEK, A., VÍTEČKOVÁ, M. *Zpětnovazební řízení mechatronických systémů*. VŠB-TU Ostrava, 2013

Učební texty jsou určeny pro studenty, kteří se zabývají teorií automatického řízení.

OBSAH

Předmluva.....	3
Obsah.....	4
Seznam základního značení a symbolů.....	5
1 Úvod.....	10
2 Matematické modely dynamických systémů	11
2.1 Obecné matematické modely	11
2.2 Lineární dynamické modely	14
2.3 Základní lineární matematické modely	16
3 Stavové modely lineárních dynamických systémů	31
3.1 Asymptotická stabilita	31
3.2 Řiditelnost a pozorovatelnost	34
3.3 Základní kanonické tvary	38
3.4 Řešení lineárních stavových rovnic	50
4 Stavové řízení.....	58
4.1 Stavový regulátor	58
4.2 Stavový pozorovatel	68
4.3 Integrační stavové řízení	80
Příloha A	88
Příloha B.....	89
Příloha C.....	90
Příloha D	94
Příloha E.....	96
Literatura	100

SEZNAM ZÁKLADNÍHO ZNAČENÍ A SYMBOLŮ

$a, a_i, b, b_i, \dots$	konstanty
a_i	koeficienty levé strany diferenciální rovnice, koeficienty mnohočlenu ve jmenovateli přenosu, koeficienty charakteristického mnohočlenu
a_i^l	požadované koeficienty charakteristického mnohočlenu pozorovatele
$\mathbf{a}^l$	vektor požadovaných koeficientů charakteristického mnohočlenu pozorovatele
a_i^w	požadované koeficienty charakteristického mnohočlenu uzavřeného systému řízení
$\mathbf{a}^w$	vektor požadovaných koeficientů charakteristického mnohočlenu uzavřeného systému řízení
$A(\omega) = \text{mod} G(j\omega) = G(j\omega) $	modul kmitočtového přenosu, grafické vyjádření $A(\omega) =$ amplitudová kmitočtová charakteristika
$\mathbf{A}$	stavová matice systému (dynamiky) řádu n $[(n \times n)]$
$\mathbf{A}_w$	stavová matice uzavřeného systému řízení (dynamiky) řádu n $[(n \times n)]$
$\mathbf{A}_l$	stavová matice pozorovatele (dynamiky) řádu n $[(n \times n)]$
b_i	koeficienty pravé strany lineární diferenciální rovnice, koeficienty mnohočlenu v čitateli přenosu
$\mathbf{b}$	stavový vektor vstupu dimenze n
$\mathbf{c}$	výstupní vektor stavu dimenze n
C	kapacita
d	konstanta převodu
e	regulační odchylka
$e(\infty)$	trvalá regulační odchylka
f	obecná funkce
$f = \frac{\omega}{2\pi}$	kmitočet
$g(t)$	impulsní funkce
$G(s)$	přenos, obraz impulsní funkce
$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$	kmitočtový přenos, grafické vyjádření
$G(j\omega) = \text{amplitudofázová kmitočtová charakteristika}$	
$h(t)$	přechodová funkce
$H(s)$	obraz přechodové funkce
i	proud
$j = \sqrt{-1}$	imaginární jednotka

k	relativní diskretní čas ($k = 0, 1, 2, \dots$)
k_i	koeficient přenosu (zisk)
k_w	vstupní filtr, vstupní korekce
kT	diskretní čas
K_I	váha integrační složky regulátoru
K_P	zesílení regulátoru, váha proporcionální složky regulátoru
$\mathbf{k}$	vektor stavového regulátoru
L	indukčnost
L	operátor přímé L-transformace (Laplaceovy transformace)
L^{-1}	operátor zpětné (inverzní) L-transformace (Laplaceovy transformace)
$L(\omega) = 20 \log A(\omega)$	logaritmický modul kmitočtového přenosu
$\mathbf{l}$	vektor zesílení Luenbergerova pozorovatele, korekční vektor
m	stupeň mnohočlenu v čitateli přenosu, moment motoru, hmotnost
m_l	zátěžný moment
$m_L = 20 \log m_A$	logaritmická amplitudová bezpečnost
M	mnohočlen v čitateli přenosu (kořeny = nuly)
n	stupeň charakteristického mnohočlenu, stupeň mnohočlenu ve jmenovateli přenosu, dimenze vektoru stavových proměnných $\mathbf{x}$
N	charakteristický mnohočlen nebo kvazimonochočlen, mnohočlen nebo kvazimonochočlen ve jmenovateli přenosu (kořeny = póly)
N_k	charakteristický mnohočlen uzavřeného systému řízení se stavovým regulátorem
N_{kw}	požadovaný charakteristický mnohočlen uzavřeného systému řízení se stavovým regulátorem
N_l	charakteristický mnohočlen pozorovatele
N_{lw}	požadovaný charakteristický mnohočlen pozorovatele
$P(\omega) = \operatorname{Re} G(j\omega)$	reálná část kmitočtového přenosu
p_i	póly pozorovatele
$Q(\omega) = \operatorname{Im} G(j\omega)$	imaginární část kmitočtového přenosu
$\mathbf{Q}_{co}$	matice říditelnosti řádu n $[(n \times n)]$
$\mathbf{Q}_{ob}$	matice pozorovatelnosti řádu n $[(n \times n)]$
R	odpor
$s = \alpha + j\omega$	komplexní proměnná, nezávisle proměnná u obrazu v Laplaceově transformaci
s_i	póly lineárního dynamického systému = kořeny mnohočlenu $N(s)$
s_j^0	nuly lineárního dynamického systému = kořeny mnohočlenu $M(s)$
s_i^w	požadované póly uzavřeného systému řízení se stavovým regulátorem

t	(spojitý) čas
t_s	doba regulace
$t_\varphi = \frac{\varphi}{\omega}$	čas odpovídající fázi φ
$T = \frac{2\pi}{\omega}$	perioda
T	vzorkovací perioda, perioda
T_d	dopravní zpoždění
T_D	derivační časová konstanta
T_I	integrační časová konstanta
T_i	(setrvačná) časová konstanta
T_c, T_o	transformační matice řádu n $[(n \times n)]$
u	akční veličina, řízení, vstupní veličina (vstup), napětí
u_T	tvarovaná akční veličina
v	poruchová veličina (porucha)
w	žádaná veličina
x	stavová veličina (stav)
$\mathbf{x}$	vektor stavových veličin (stav) dimenze n
y	regulovaná veličina, výstupní veličina (výstup)
y_w	odezva vyvolaná žádanou veličinou
y_T	přechodná část odezvy
y_s	ustálená část odezvy
Z	impedance
α	stupeň stability (absolutní tlumení), sklon
$\alpha = \operatorname{Re} s$	reálná část komplexní proměnné s
$\delta(t)$	Diracův jednotkový impuls
Δ	přírůstek
ε	stavový vektor poruchy
$\eta(t)$	Heavisideův jednotkový skok
$\omega = 2\pi f$	úhlový kmitočet, úhlová rychlost
$\omega = \operatorname{Im} s$	imaginární část komplexní proměnné s
ω_0	přirozený úhlový kmitočet, úhlový kmitočet netlumených kmitů
$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$	fáze kmitočtového přenosu, grafické vyjádření $\varphi(\omega) =$ fázová kmitočtová charakteristika

ξ_i	koeficient relativního poměrného tlumení (relativní tlumení)
κ	překmit
τ_j	časová konstanta

Horní indexy

*	optimální, doporučený
-1	inverzní
T	transponovaný

Dolní indexy

c	regulátor, řízení
co	řiditelnost
d	diagonální
D	diskrétní
o	pozorovatel, pozorování
ob	pozorovatelnost
w	žádaný
t	transformovaný, transformace

Symboly nad písmeny

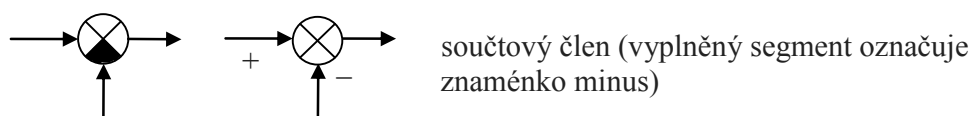
.	(totální) derivace podle času
$\wedge$	odhad

Relační znaménka

$\approx$	přibližně rovno
$\doteq$	po zaokrouhlení rovno
$\hat{=}$	korespondence mezi originálem a obrazem
$\Rightarrow$	implikace
$\Leftrightarrow$	ekvivalence

Grafické značky

$\circ$	(jednonásobná) nula
$\odot$	dvojnásobná nula
$\times$	(jednonásobný) pól
$\otimes$	dvojnásobný pól
	nelineární systém (prvek, člen)
	lineární systém (prvek, člen)
	jednorozměrový signál (veličina)
	mnohorozměrový signál (veličina)



Zkratky

arg	argument
dB	decibel
const	konstanta
dec	dekáda
det	determinant
dim	dimenze (rozměr)
Im	imaginární, imaginární část
lim	limita
max	maximální, maximum
min	minimální, minimum
mod	modul
rank	hodnost
Re	reálný, reálná část
sign	znaménko, znaménková funkce

1 ÚVOD

Konvenční regulátory P, I, PD, PI a PID mají jednoduchou strukturu a při vhodném seřízení dovedou zajistit pro běžné regulované soustavy poměrně kvalitní regulační procesy. Jejich výhodou je nízká cena, snadná implementace a jednoduché seřizování, které nevyžaduje hluboké teoretické znalosti. Správně navržený a seřízený konvenční regulátor dovede zajistit jak sledování změn žádané veličiny, tak i dostatečné potlačení negativního vlivu působících poruch. Konvenční regulace je také robustní, protože dovede zajistit požadovanou kvalitu regulace i při daných změnách vlastností regulované soustavy.

V některých případech použití konvenčních regulátorů již nemůže zaručit požadovanou kvalitu regulace. Je to především v případě nestabilních a složitějších regulovaných soustav a při vysokých požadavcích na kvalitu regulace. V tomto případě je vhodné použít stavové řízení. Jeho zrod a rozvoj je spojen s letectvím a kosmonautikou. Ve stavové teorii řízení se většinou místo pojmů soustava a regulace používají obecnější pojmy systém a řízení.

Stavové řízení odstraňuje některé vady konvenční regulace, výrazným způsobem umožňuje zvýšit kvalitu řízení, ale současně vyžaduje určité teoretické znalosti.

V učebních textech jsou uvedeny pouze základní přístupy a metody používané při analýze a syntéze jednorozměrových spojitých systémů řízení ve stavovém prostoru. Text je uspořádán tak, že umožňuje snadné rozšíření i na diskrétní i mnohorozměrové systémy řízení.

2 MATEMATICKÉ MODELY DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

2.1 Obecné matematické modely

Při návrhu a studiu vlastností systémů řízení používáme jejich **matematické modely**. Je to velmi výhodné, protože experimentování se skutečnými systémy řízení můžeme zastoupit experimentováním na jejich matematických modelech, tj. **simulací**. Umožňuje to výrazné snížení rizika zničení daného reálného systému řízení a nákladů. Dochází rovněž k zásadnímu zrychlení celého postupu. Často vznikají nová netradiční řešení.

V teorii automatického řízení v časové oblasti se používají algebraické, transcendentní, diferenciální, parciální diferenciální, diferenční, integrální, sumační rovnice a jejich kombinace. Matematický model lze získat **identifikací**, a to analytickou nebo experimentální cestou, příp. jejich kombinací. Např. analyticky se získá matematický model a jeho parametry se určí nebo zpřesní experimentálně. Někdy pod pojmem identifikace se rozumí nalezení matematického modelu pouze experimentální cestou. Dále se budeme zabývat pouze takovými matematickými modely, které se dají vyjádřit obyčejnými diferenciálními rovnicemi a které popisují reálné systémy se soustředěnými parametry.

Při interpretaci vlastního matematického modelu i výsledků simulace je třeba si vždy pamatovat, že *každý matematický model je jen určitou aproximací skutečného systému*.

Protože i velmi složitý mnohorozměrový systém vzniká spojením jednorozměrových systémů, hlavní pozornost bude věnována jednorozměrovým systémům.

Uvažujme **jednorozměrový systém** popsáný obecně nelineární diferenciální rovnicí

$$g[y^{(n)}(t), \dots, \dot{y}(t), y(t), u^{(m)}(t), \dots, \dot{u}(t), u(t)] = 0. \quad (2.1a)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{dy(t)}{dt}, \quad y^{(i)}(t) = \frac{d^i y(t)}{dt^i}; \quad i = 2, 3, \dots, n, \\ \dot{u}(t) &= \frac{du(t)}{dt}, \quad u^{(j)}(t) = \frac{d^j u(t)}{dt^j}; \quad j = 2, 3, \dots, m, \end{aligned} \right\} \quad (2.1b)$$

při počátečních podmínkách

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}, \\ u(0) &= u_0, \dot{u}(0) = \dot{u}_0, \dots, u^{(m-1)}(0) = u_0^{(m-1)}, \end{aligned} \right\} \quad (2.1c)$$

kde $u(t)$ je **vstupní veličina** (signál, proměnná) = **vstup**, $y(t)$ – **výstupní veličina** (signál, proměnná) = **výstup**, g – obecně nelineární funkce, n – řád systému.

Pokud platí

$$n > m \quad (2.2)$$

pak matematický model vyhovuje **silné podmínce fyzikální realizovatelnosti**.

V případě

$$n = m \quad (2.3)$$

vyhovuje pouze **slabé** podmínice fyzikální realizovatelnosti.

V případě

$$n < m \quad (2.4)$$

matematický model je **fyzikálně nerealizovatelný**, a tedy nevyjadřuje vlastnosti reálného systému.

Matematický model (2.1a), ve kterém vystupují derivace (2.1b) popisuje **dynamický systém** – s pamětí.

Z diferenciální rovnice (2.1a) pro

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y^{(i)}(t) &= 0; \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} u^{(j)}(t) &= 0; \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

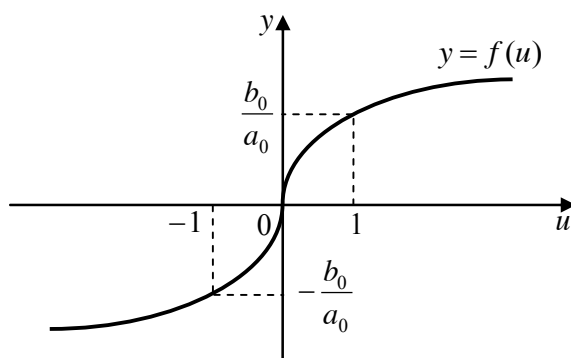
je možné získat rovnici (pokud existuje)

$$y = f(u), \quad (2.5)$$

kde

$$\left. \begin{aligned} y &= \lim_{t \rightarrow \infty} y(t), \\ u &= \lim_{t \rightarrow \infty} u(t). \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Rovnice (2.5) vyjadřuje **statickou charakteristiku** daného dynamického systému (2.1), viz např. obr. 2.1.



Obr. 2.1 Nelineární statická charakteristika – příklad 2.1

Statická charakteristika popisuje závislost mezi výstupní y a vstupní u veličinou v **ustáleném stavu**.

Pokud v rovnici (2.1a) nevystupují derivace, tj.

$$g[y(t), u(t)] = 0 \quad \text{nebo} \quad g(y, u) = 0, \quad (2.7)$$

pak je to matematický model **statického systému** – bez paměti.

Veliký význam mají stavové modely dynamických systémů, které se používají jak pro jednorozměrové, tak i mnohorozměrové dynamické systémy.

Stavový model jednorozměrového dynamického systému má tvar

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), u(t)], \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad - \text{stavová rovnice} \quad (2.8a)$$

$$y(t) = h[\mathbf{x}(t), u(t)] \quad - \text{výstupní rovnice} \quad (2.8b)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T,$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} = [g_1, g_2, \dots, g_n]^T,$$

kde $\mathbf{x}(t)$ je **vektor stavu** (stav) dimenze n , $\mathbf{g}$ – obecně nelineární vektorová funkce dimenze n , h – obecně nelineární funkce, T – symbol transpozice.

Z důvodu zjednodušení nezávisle proměnnou čas t budeme často vynechávat.

Složky $x_1, x_2, \dots, x_n$ stavu $\mathbf{x}$ vyjadřují vnitřní proměnné. Jejich znalost je důležitá při tzv. **stavovém řízení** (viz kapitola 4).

Řád systému n je dán počtem stavových proměnných. Pokud ve výstupní rovnici (2.8b) nevystupuje vstup $u(t)$, pak daný dynamický systém (2.8) je silně fyzikálně realizovatelný, jinak je pouze slabě fyzikálně realizovatelný.

Statickou charakteristiku (pokud existuje) ze stavového modelu (2.8) získáme pro $t \rightarrow \infty \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ a eliminací stavových proměnných (viz příklad 2.1).

Příklad 2.1

Nelineární dynamický systém je popsán diferenciální rovnicí 2. řádu

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 \operatorname{sign}[u(t)] \sqrt{|u(t)|}, \quad (2.9)$$

při počátečních podmínkách $y(0) = y_0$ a $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$.

Je třeba:

určit fyzikální realizovatelnost,

určit a nakreslit statickou charakteristiku,

vyjádřit matematický model (2.9) stavově.

Řešení:

a) Protože $n = 2 > m = 0$ [na pravé straně rovnice nevystupuje derivace $u(t)$], daný dynamický systém je silně fyzikálně realizovatelný.

b) V ustáleném stavu pro $t \rightarrow \infty$ derivace v rovnici (2.9) budou nulové, a proto v souladu s (2.6) lze psát

$$a_0 y = b_0 \operatorname{sign}(u) \sqrt{|u|} \Rightarrow$$

$$y = \frac{b_0}{a_0} \operatorname{sign}(u) \sqrt{|u|}.$$

Získaná nelineární statická charakteristika je na obr. 2.1.

c) Zvolíme např. stavové proměnné

$$x_1 = y,$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y},$$

po dosazení do diferenciální rovnice (2.9) a úpravě dostaneme

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = y_0,$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{a_0}{a_2} x_1 - \frac{a_1}{a_2} x_2 + \frac{b_0}{a_2} \operatorname{sign}(u) \sqrt{|u|}, \quad x_2(0) = \dot{y}_0.$$

Statickou charakteristiku získáme pro ustálený stav, tj. pro $t \rightarrow \infty \Rightarrow \dot{x}_1(t) \rightarrow 0$
a $\dot{x}_2(t) \rightarrow 0$ a eliminací stavových proměnných

$$\left. \begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= -\frac{a_0}{a_2} x_1 - \frac{a_1}{a_2} x_2 + \frac{b_0}{a_2} \operatorname{sign}(u) \sqrt{|u|} \\ y &= x_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$y = \frac{b_0}{a_0} \operatorname{sign}(u) \sqrt{|u|}.$$

2.2 Lineární dynamické modely

Velmi důležitou skupinou matematických modelů dynamických systémů jsou **lineární matematické modely**. Tyto matematické modely musí vyhovovat podmínce **linearity**, která sestává ze dvou dílčích vlastností **aditivity** a **homogeneity**.

Aditivita

$$\left. \begin{aligned} u_1 &\rightarrow \text{systém} \rightarrow y_1 \\ u_2 &\rightarrow \text{systém} \rightarrow y_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_1 + u_2 \rightarrow \text{systém} \rightarrow y_1 + y_2 \quad (2.10a)$$

Homogenita:

$$u \rightarrow \text{systém} \rightarrow y \Rightarrow au \rightarrow \text{systém} \rightarrow ay \quad (2.10b)$$

Tyto dílčí vlastnosti linearity mohou být sloučeny

$$\left. \begin{aligned} u_1 &\rightarrow \text{systém} \rightarrow y_1 \\ u_2 &\rightarrow \text{systém} \rightarrow y_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_1 u_1 + a_2 u_2 \rightarrow \text{systém} \rightarrow a_1 y_1 + a_2 y_2, \quad (2.11)$$

kde a, a_1, a_2 jsou libovolné konstanty; $u(t), u_1(t)$ a $u_2(t)$ – vstupní veličiny (vstupy); $y(t), y_1(t)$ a $y_2(t)$ – výstupní veličiny (výstupy).

Linearita dynamických systémů je tedy vlastnost, kdy váženému součtu vstupů odpovídá stejně vážený součet výstupů.

Velmi důležitou vlastností lineárních dynamických systémů je, že každá jejich lokální vlastnost je současně i jejich globální vlastností.

Příklad 2.2

Statický systém je popsán lineární algebraickou rovnicí

$$y(t) = k_1 u(t) + y_0, \quad (2.12)$$

kde k_1 a y_0 jsou konstanty.

Je třeba ověřit, zda matematický model (2.12) je lineární.

Řešení:

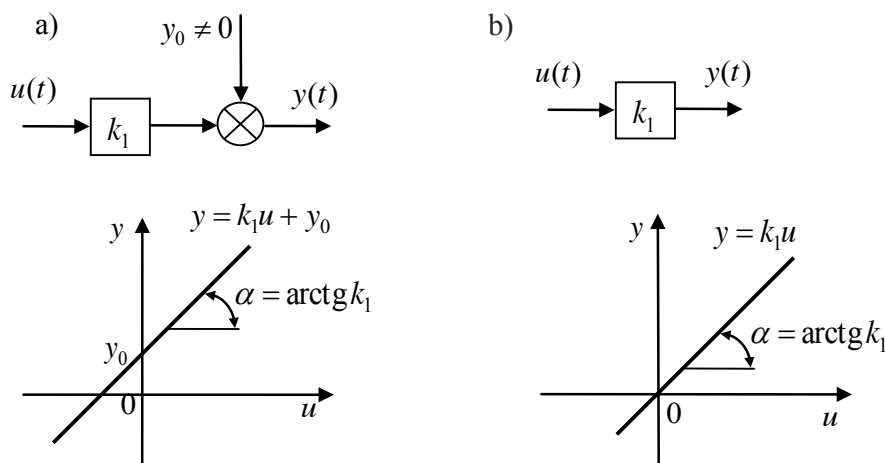
Jako vstupy volíme např. $u_1(t) = 2$ a $u_2(t) = 4t$.

Po dosazení do (2.12) dostaneme

$$\left. \begin{array}{l} u_1(t) = 2 \dots y_1(t) = 2k_1 + y_0 \\ u_2(t) = 4t \dots y_2(t) = 4k_1 t + y_0 \end{array} \right\} \Rightarrow y_1(t) + y_2(t) = 2k_1(1 + 2t) + 2y_0,$$

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = 2(1 + 2t) \dots y = 2k_1(1 + 2t) + y_0 \neq y_1(t) + y_2(t) = 2k_1(1 + 2t) + 2y_0.$$

Vidíme, že pro $y_0 \neq 0$ matematický model (2.12) z hlediska definice linearit (2.10) nebo (2.11) není lineární. Matematický model (2.12) statického systému bude lineární pouze pro $y_0 = 0$, viz obr. 2.2.



Obr. 2.2 Matematický model statického systému: a) nelineární, b) lineární – příklad 2.2

Z výše uvedeného je zřejmé, že u lineárních systémů statická charakteristika (pokud existuje) musí vždy procházet počátkem souřadnic.

Příklad 2.3

Dynamický systém (integrátor) je popsán lineární diferenciální rovnicí

$$\frac{d y(t)}{d t} = k_1 u(t), y(0) = y_0 \quad (2.13)$$

nebo ekvivalentní integrální rovnici

$$y(t) = k_1 \int_0^t u(\tau) d\tau + y_0. \quad (2.14)$$

Je třeba ověřit linearitu daného matematického modelu.

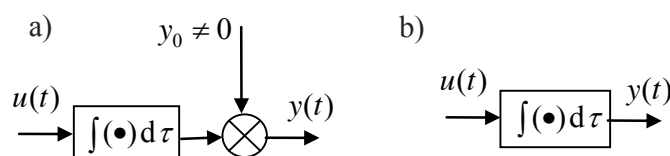
Řešení:

Zvolíme např. stejné vstupy jako v příkladě 2.2 a dostaneme

$$\left. \begin{aligned} u_1(t) &= 2 \dots y_1(t) = 2k_1 t + y_0 \\ u_2(t) &= 4t \dots y_2(t) = 2k_1 t^2 + y_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_1(t) + y_2(t) = 2k_1 t(1+t) + 2y_0,$$

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = 2(1+2t) \dots y = 2k_1 t(1+t) + y_0 \neq y_1(t) + y_2(t) = 2k_1 t(1+t) + 2y_0.$$

Znovu vidíme, že daný matematický model (2.13) nebo (2.14) pro $y_0 \neq 0$ nesplňuje podmínku linearitu (obr. 2.3).



Obr. 2.3 Matematický model integrátoru: a) nelineární, b) lineární – příklad 2.3

Tento konkrétní závěr může být zobecněn. ***U lineárních matematických modelů musíme uvažovat vždy nulové počáteční podmínky.*** V opačném případě s nimi nemůžeme pracovat jako s matematickými modely splňujícími podmínku linearitu.

2.3 Základní lineární matematické modely

Jednorozměrové lineární dynamické systémy v časové oblasti jsou nejčastěji popsány lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty (pouze takové systémy budeme uvažovat)

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t) \quad (2.15a)$$

při počátečních podmínkách

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} \\ u(0) &= u_0, \dot{u}(0) = \dot{u}_0, \dots, u^{(m-1)}(0) = u_0^{(m-1)} \end{aligned} \right\} \quad (2.15b)$$

Podmínky fyzikální realizovatelnosti jsou dány vztahy (2.2) – (2.4).

Použitím Laplaceovy transformace na diferenciální rovnici n -tého řádu (2.15a) při uvažování počátečních podmínek (2.15b) dostaneme její obraz, tj. algebraickou rovnici n -tého stupně

$$(a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0)Y(s) - L(s) = (b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0)U(s) - R(s)$$

a z ní můžeme vypočítat obraz výstupní veličiny

$$Y(s) = \underbrace{\frac{M(s)}{N(s)}U(s)}_{\text{obraz odezvy na vstup}} + \underbrace{\frac{L(s)-R(s)}{N(s)}}_{\substack{\text{obraz odezvy na} \\ \text{počáteční podmínky} \\ \text{(obraz homogenní} \\ \text{diferenciální rovnice)}}},$$

obraz řešení diferenciální rovnice

(2.16)

$$M(s) = b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0 = b_m (s - s_1^0)(s - s_2^0) \dots (s - s_m^0), \quad (2.17)$$

$$N(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = a_n (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n), \quad (2.18)$$

kde $Y(s)$ je obraz výstupní veličiny $y(t)$, $U(s)$ – obraz vstupní veličiny $u(t)$, $L(s)$ – mnohočlen nejvýše stupně $n-1$ určený počátečními podmínkami levé strany diferenciální rovnice, $R(s)$ – mnohočlen nejvýše stupně $m-1$ určený počátečními podmínkami pravé strany diferenciální rovnice, $M(s)$ – mnohočlen stupně m určený koeficienty pravé strany diferenciální rovnice, $N(s)$ – **charakteristický mnohočlen** stupně n určený koeficienty levé strany diferenciální rovnice, s – **komplexní proměnná** (rozměr čas^{-1}) $[\text{s}^{-1}]$.

Protože diferenciální rovnice (2.15) je matematickým modelem dynamického systému, je zřejmé, že mnohočlen $N(s)$ je současné charakteristickým mnohočlenem i tohoto dynamického systému.

Použitím inverzní Laplaceovy transformace na obraz řešení (2.16) získáme originál řešení

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}. \quad (2.19)$$

Velmi výhodné je použití vhodných slovníků Laplaceovy transformace.

Ze vztahu (2.16) vyplývá, že může být použit jako lineární matematický model daného lineárního dynamického systému, bude-li obraz odezvy na počáteční podmínky nulový (tj. budou-li počáteční podmínky nulové), viz podmínky linearity (2.10) nebo (2.11). V tomto případě můžeme psát

$$Y(s) = \frac{M(s)}{N(s)}U(s) = G(s)U(s), \quad (2.20)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{b_m (s - s_1^0)(s - s_2^0) \dots (s - s_m^0)}{a_n (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)}, \quad (2.21)$$

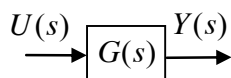
kde $G(s)$ je **přenos**, s_i – **póly** lineárního dynamického systému = kořeny charakteristického mnohočlenu $N(s)$, s_j^0 – **nuly** lineárního dynamického systému = kořeny mnohočlenu $M(s)$. Rozdíl $n - m$ se nazývá **relativní stupeň systému**.

Přenos $G(s)$ je dán podílem obrazu výstupní veličiny $Y(s)$ a obrazu vstupní veličiny $U(s)$ při nulových počátečních podmínkách. Můžeme ho obdržet přímo

z diferenciální rovnice (2.15a), protože obrazy derivací výstupní $y(t)$ a vstupní $u(t)$ veličiny při nulových počátečních podmínkách jsou dány vztahy

$$\left. \begin{aligned} L\{y^{(i)}(t)\} &= s^i Y(s); \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ L\{u^{(j)}(t)\} &= s^j U(s); \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Velikou výhodou přenosu $G(s)$ je, že dovoluje vyjádřit vlastnosti lineárního dynamického systému v oblasti komplexní proměnné blokem uvedeným na obr. 2.4.



Obr. 2.4 Blokové schéma systému

Jak bude dále ukázáno, s takovými bloky se velmi jednoduše a efektivně pracuje.

Statickou charakteristiku lineárního dynamického systému (pokud existuje) získáme z diferenciální rovnice (2.15a) pro

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y^{(i)}(t) &= 0; \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} u^{(j)}(t) &= 0; \quad j = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

tj.

$$y = k_1 u, \quad (2.24a)$$

$$k_1 = \frac{b_0}{a_0}, \quad a_0 \neq 0, \quad (2.24b)$$

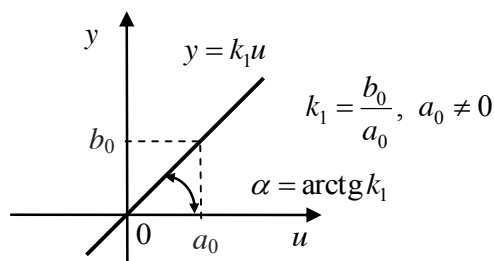
kde k_1 je koeficient přenosu.

Ze srovnání (2.21), (2.23) a (2.24) vyplývá důležitý vztah mezi časem t a komplexní proměnnou s , tj.

$$t \rightarrow \infty \Leftrightarrow s \rightarrow 0. \quad (2.25)$$

Je zřejmé, že na základě vztahu (2.25) dostaneme z přenosu (2.21) rovnici statické charakteristiky (2.24), proto lze psát

$$y = \left[\lim_{s \rightarrow 0} G(s) \right] u, \quad a_0 \neq 0. \quad (2.26)$$



Obr. 2.5 Statická charakteristika lineárního dynamického systému

Statická charakteristika lineárního dynamického systému je přímka, která vždy prochází počátkem souřadnic (obr. 2.5).

Dosazením komplexního kmitočtu $j\omega$ za komplexní proměnnou s v přenosu (2.21) dostaneme **kmitočtový** (frekvenční) **přenos**

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1 j\omega + a_0} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (2.27)$$

$$A(\omega) = \text{mod } G(j\omega) = |G(j\omega)|, \quad (2.28)$$

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega), \quad (2.29)$$

kde $A(\omega)$ je **modul** (amplituda) kmitočtového přenosu, $\varphi(\omega)$ – **argument** (fáze) kmitočtového přenosu, ω – **úhlový kmitočet** (úhlová frekvence) (rozměr čas^{-1}) [s^{-1}].

Z důvodu odlišení úhlového kmitočtu (T – perioda, f – kmitočet)

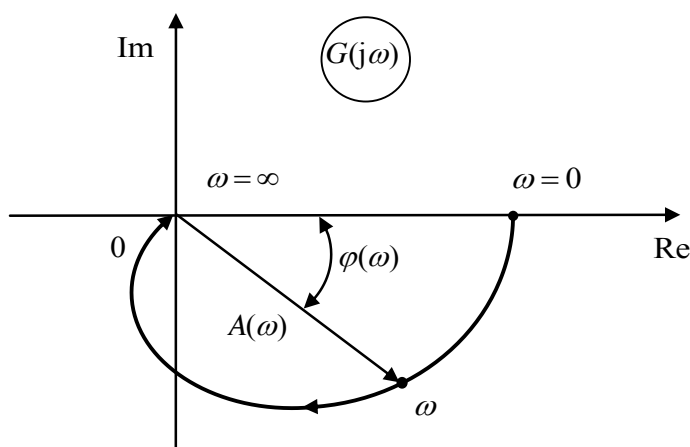
$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (2.30)$$

od „obyčejného“ kmitočtu

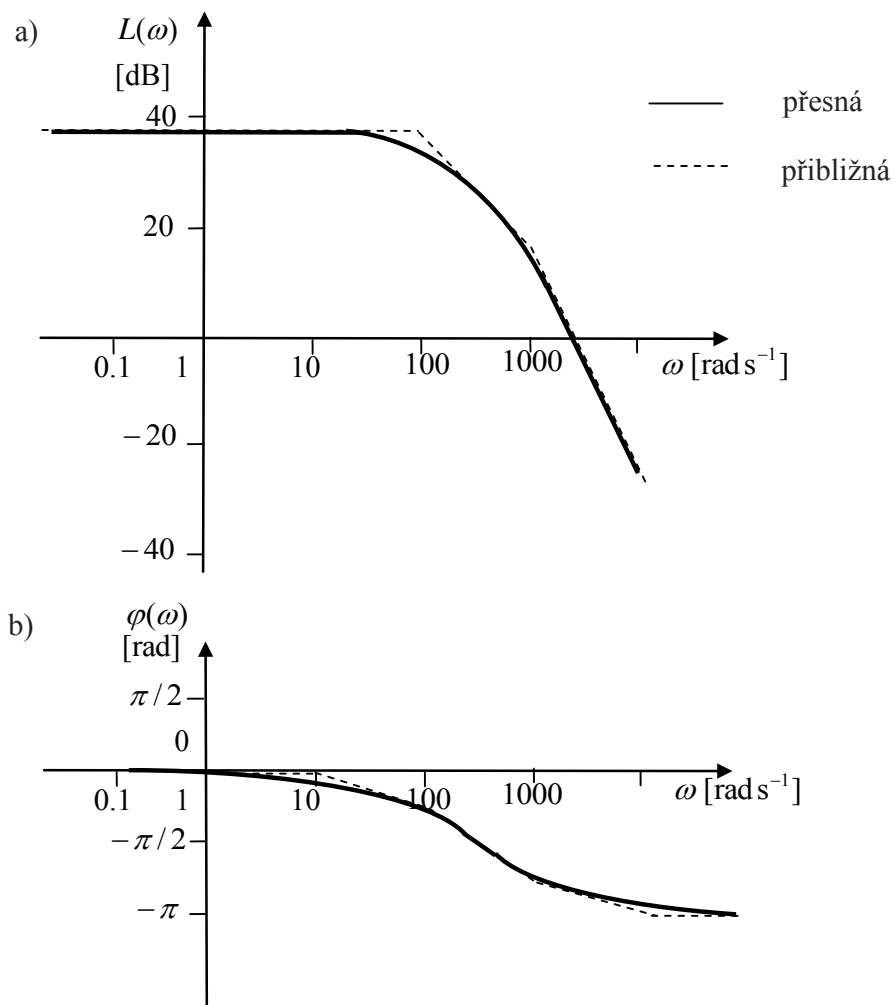
$$f = \frac{1}{T} \quad (2.31)$$

s jednotkou Hz (herz) a rozměrem [s^{-1}] se používá pro úhlový kmitočet často místo [s^{-1}] označení [rad s^{-1}].

Zobrazení kmitočtového přenosu $G(j\omega)$ pro $\omega = 0$ až $\omega = \infty$ v komplexní rovině se nazývá **amplitudofázová kmitočtová charakteristika** (obr. 2.6).



Obr. 2.6 Amplitudofázová kmitočtová charakteristika



Obr. 2.7 Logaritmické kmitočtové charakteristiky: a) amplitudová, b) fázová

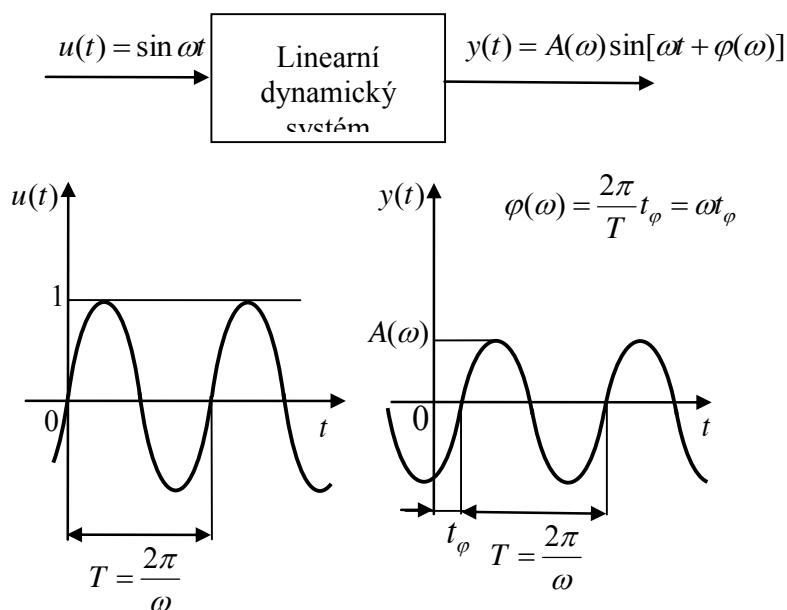
Nejčastěji se používají **logaritmické kmitočtové charakteristiky** (Bodého kmitočtové charakteristiky), viz obr. 2.7. V tomto případě se vykresluje zvlášť tzv. **logaritmický modul**

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) \quad (2.32)$$

a fáze $\varphi(\omega)$. Kmitočtová osa má logaritmické měřítko a logaritmický modul $L(\omega)$ se uvádí v dB (decibelech). U logaritmických kmitočtových charakteristik se s výhodou využívá aproximace přesných průběhů pomocí přímkových úseků.

Kmitočtový přenos $G(j\omega)$ vyjadřuje pro každou hodnotu úhlového kmitočtu ω amplitudu (modul) $A(\omega)$ a fázi (argument) $\varphi(\omega)$ ustálené sinusoidální odezvy $y(t)$ na sinusoidální průběh vstupní veličiny $u(t)$ s jednotkovou amplitudou.

Tzn., že **kmitočtovou charakteristiku můžeme získat experimentálně** (obr. 2.8). Má to veliký význam především u rychlých systémů.



Obr. 2.8 Interpretace kmitočtové charakteristiky

Podmínky fyzikální realizovatelnosti jsou dány vztahy (2.2) – (2.4). Je zřejmé, že reálný lineární dynamický systém nemůže přenést průběh s nekonečně vysokým úhlovým kmitočtem, a proto u silně fyzikálně realizovatelných systémů musí platit

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) &= 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) &= 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} L(\omega) &= -\infty \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow n > m. \quad (2.33)$$

Z kmitočtového přenosu (2.27) získáme rovnici statické charakteristiky velmi snadno (pokud existuje), protože pro ustálený stav musí platit $\omega = 0$, tj.

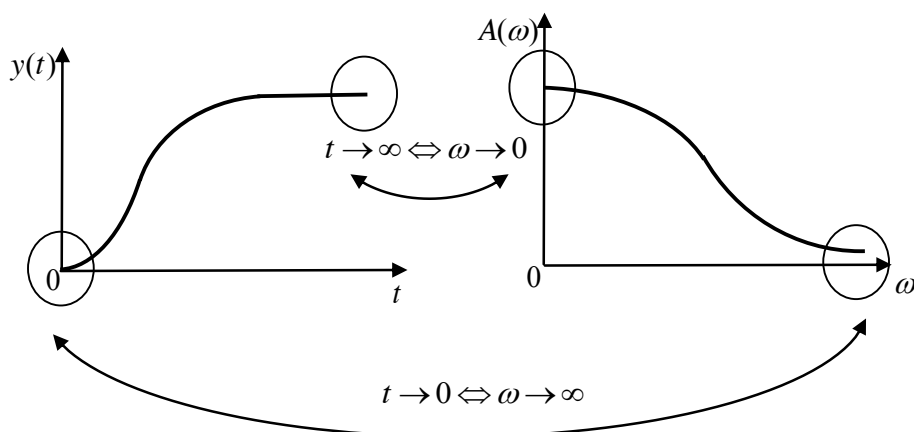
$$y = [\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega)]u, \quad a_0 \neq 0. \quad (2.34)$$

Vyplývá to rovněž ze vztahu (2.25) pro $s = j\omega$

$$t \rightarrow \infty \Leftrightarrow \omega \rightarrow 0. \quad (2.35)$$

Je zřejmé, že mezi časem t a úhlovým kmitočtem ω platí i duální vztah (obr. 2.9)

$$t \rightarrow 0 \Leftrightarrow \omega \rightarrow \infty. \quad (2.36)$$

Obr. 2.9 Vztah mezi časem t a úhlovým kmitočtem ω

Ze vztahů (2.35), (2.36) a obr. 2.9 vyplývá, že vlastnosti lineárního dynamického systému při nízkých úhlových kmitočtech rozhodují o jeho vlastnostech při dlouhých časech, tj. v ustáleném stavu a naopak. Podobně jeho vlastnosti při vysokých úhlových kmitočtech rozhodují o vlastnostech počátku časové odezvy, tj. o rychlosti časové odezvy (o přechodném stavu) a naopak.

Vlastnosti lineárních dynamických systémů při nulových počátečních podmínkách mohou být popsány časovými odezvami na přesně definované průběhy vstupní veličiny.

V teorii automatického řízení se používají dva základní průběhy vstupní veličiny $u(t)$, a to **Diracův (jednotkový) impuls** $\delta(t)$ a **Heavisideův (jednotkový) skok** $\eta(t)$.

Impuslní (impulsová) **funkce** $g(t)$ popisuje odezvu lineárního dynamického systému na průběh vstupní veličiny ve tvaru Diracova impulsu $\delta(t)$ při nulových počátečních podmínkách, viz obr. 2.10.

V souladu se vztahem (2.20) můžeme psát

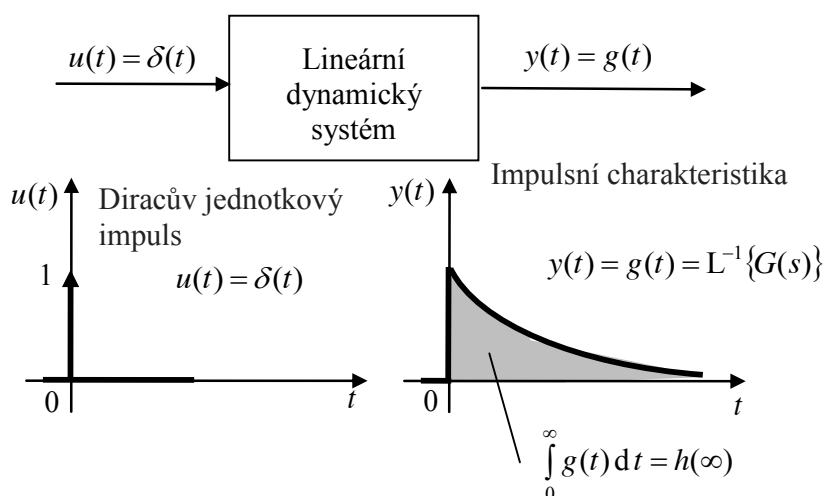
$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (2.37)$$

a pro

$$u(t) = \delta(t) \hat{=} U(s) = 1$$

dostaneme

$$y(t) = g(t) = L^{-1}\{G(s)\}. \quad (2.38)$$



Obr. 2.10 Impulsní funkce (charakteristika) lineárního dynamického systému

U lineárního dynamického systému derivaci nebo integrálu vstupní veličiny $u(t)$ odpovídá derivace nebo integrál výstupní veličiny $y(t)$.

Této vlastnosti využijeme pro vyznačení statické charakteristiky lineárního dynamického systému na základě jeho impulsní funkce $g(t)$. Protože statická charakteristika lineárního dynamického systému je přímka procházející počátkem souřadnic, stačí určit jeden její nenulový bod. Můžeme tedy psát

$$u = u(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \delta(\tau) d\tau = 1,$$

$$y = y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(\tau) d\tau.$$

Odtud již snadno dostaneme rovnici statické charakteristiky (pokud existuje)

$$y = \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(\tau) d\tau \right] u. \quad (2.39)$$

Silná podmínka fyzikální realizovatelnosti má tvar

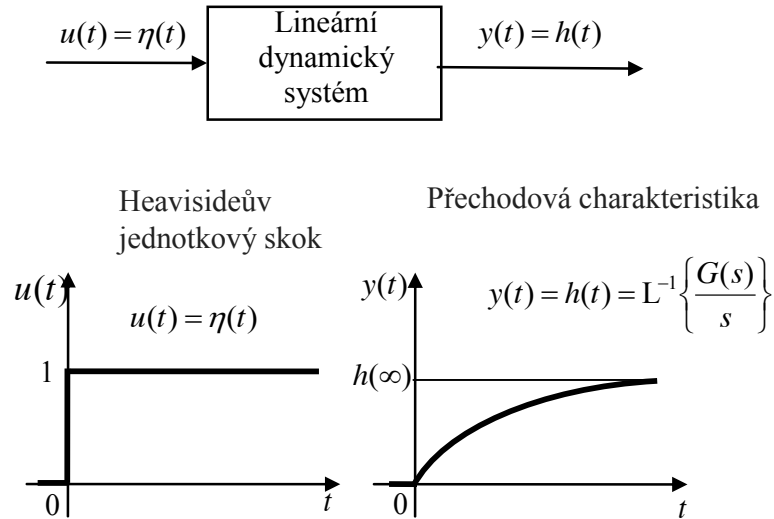
$$|g(0)| < \infty. \quad (2.40)$$

Pokud $g(0)$ obsahuje Diracův impuls $\delta(t)$, pak daný lineární dynamický systém je pouze slabě fyzikálně realizovatelný.

Přechodová funkce $h(t)$ je odezva lineárního dynamického systému na průběh vstupní veličiny ve tvaru Heavisideova skoku $\eta(t)$ při nulových počátečních podmínkách, viz obr. 2.11.

Na základě vztahu (2.37) pro

$$u(t) = \eta(t) \triangleq U(s) = \frac{1}{s}$$



Obr. 2.11 Přechodová funkce (charakteristika) lineárního dynamického systému

dostaneme

$$y(t) = h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}. \quad (2.41)$$

Z přechodové funkce $h(t)$ se získá rovnice statické charakteristiky (pokud existuje) velmi snadno, protože platí

$$u = u(\infty) = \eta(\infty) = 1,$$

$$y = y(\infty) = h(\infty),$$

tj.

$$y = [\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)]u. \quad (2.42)$$

Silná podmínka fyzikální realizovatelnosti má tvar

$$h(0) = 0 \quad (2.43)$$

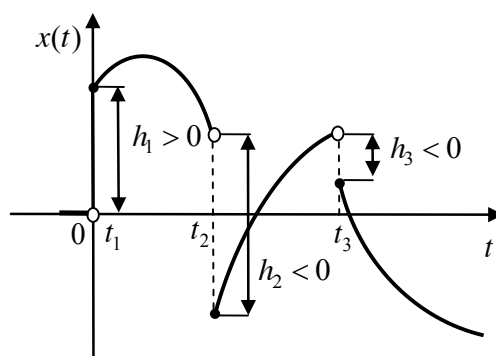
a slabá

$$0 < |h(0)| < \infty. \quad (2.44)$$

Užitečné je použití **zobecněné derivace** definované vztahy (obr. 2.12)

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{x}_{ob}(t) + \sum_{i=1}^p h_i \delta(t - t_i), \\ h_i &= \lim_{t \rightarrow t_{i+}} x(t) - \lim_{t \rightarrow t_{i-}} x(t), \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

kde t_i jsou body nespojitosti prvního druhu se skoky h_i , $\dot{x}_{ob}(t)$ – obyčejná derivace určena mezi body nespojitosti.

Obr. 2.12 Funkce $x(t)$ s body nespojitosti prvního druhu

Pomocí zobecněné derivace můžeme snadno vyjádřit vztah mezi Diracovým impulsem a Heavisideovým skokem

$$\delta(t) = \frac{d\eta(t)}{dt} \Leftrightarrow \eta(t) = \int_0^t \delta(\tau) d\tau \quad (2.46)$$

a mezi impulsní a přechodovou funkcí

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} \Leftrightarrow h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau, \quad (2.47)$$

$$G(s) = sH(s) \Leftrightarrow H(s) = \frac{G(s)}{s}. \quad (2.48)$$

Ze všech matematických modelů lineárních dynamických systémů je nejobecnější stavový model

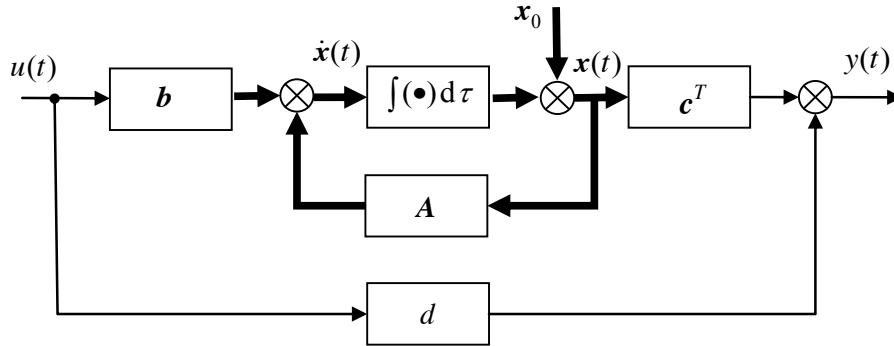
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad - \text{stavová rovnice} \quad (2.49a)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du(t) \quad - \text{výstupní rovnice} \quad (2.49b)$$

kde $\mathbf{A}$ je čtvercová stavová matice systému (dynamiky) řádu n $[(n \times n)]$, $\mathbf{b}$ – stavový vektor vstupu dimenze n , $\mathbf{c}$ – výstupní vektor stavu dimenze n , d – konstanta převodu, T – symbol transpozice.

Blokové schéma stavového modelu lineárního dynamického systému (2.49) je na obr. 2.13.

Pro $d = 0$ stavový model (2.49) vyhovuje podmínce silné fyzikální realizovatelnosti a pro $d \neq 0$ vyhovuje pouze slabé podmínce fyzikální realizovatelnosti.



Obr. 2.13 Blokové schéma stavového modelu lineárního dynamického systému

Pokud stavový model (2.49) vyhovuje **podmínce řiditelnosti** (viz Příloha C)

$$\mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}], \quad \det \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq 0 \quad (2.50)$$

a podmínce pozorovatelnosti (viz Příloha C)

$$\mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} = [\mathbf{c}, \mathbf{A}^T \mathbf{c}, \dots, (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{c}]^T, \quad \det \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) \neq 0, \quad (2.51)$$

pak při nulových počátečních podmínkách $[\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}]$ můžeme z něho pomocí Laplaceovy transformace získat přenos

$$\left. \begin{aligned} s\mathbf{X}(s) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{b}U(s) \\ Y(s) &= \mathbf{c}^T \mathbf{X}(s) + dU(s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d, \quad (2.52)$$

kde $\det$ je determinant, $\mathbf{I}$ – jednotková matice, $\mathbf{Q}_{co}$ – **matice řiditelnosti** řádu n $[(n \times n)]$, $\mathbf{Q}_{ob}$ – **matice pozorovatelnosti** řádu n $[(n \times n)]$.

Z přenosu (2.52) již snadno na základě (2.26) můžeme získat rovnici statické charakteristiky (pokud existuje)

$$y = \lim_{s \rightarrow 0} [\mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d] u. \quad (2.53)$$

Výhodnější pro získání přenosu je použití vztahu

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{c}^T) - \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} + d, \quad (2.54)$$

který nevyžaduje inverzi funkcionální matice.

Přenos (2.52) nebo (2.54) je určen na základě stavového modelu (2.49) jednoznačně. Naproti tomu pro přenos

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b'_m s^m + \dots + b'_1 s + b'_0}{a'_n s^n + \dots + a'_1 s + a'_0} \quad (2.55a)$$

stavový model může mít mnoho (teoreticky nekonečně mnoho) různých tvarů. Např. pro $n = m$ přenos (2.55a) lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b'_n}{a'_n} + \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} = \\ &= d + \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{N(s)}, \end{aligned} \quad (2.55b)$$

$$N(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0. \quad (2.55c)$$

Důležité je, aby přenos (2.55) pro $d = 0$ nebylo možné zjednodušit kompenzací (krácením), tj. přenos musí být neredukovatelný. V tomto případě říkáme, že matematický model má **minimální tvar**. Minimální tvar mají i stavové modely z něho získané. Je zřejmé, že **řiditelné a pozorovatelné lineární dynamické systémy mají minimální tvar**.

Z uvedených matematických modelů je stavový model nejobecnější. Za předpokladu řiditelnosti a pozorovatelnosti [viz vztahy (2.50) a (2.51)] a samozřejmě nulových počátečních podmínek, jsou všechny tyto matematické modely lineárních dynamických systémů, tj. lineární diferenciální rovnice, přenos, kmitočtový přenos, impulsní funkce (charakteristika), přechodová funkce (charakteristika) a lineární stavový model, ekvivalentní a vzájemně převoditelné.

Příklad 2.4

Lineární dynamický systém je popsán stavovým modelem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + u, \\ y &= 2x_1. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Za předpokladu nulových počátečních podmínek je třeba určit: a) přenos, b) kmitočtový přenos, c) impulsní funkci, d) přechodovou funkci.

Řešení:

Nejdříve je třeba ověřit řiditelnost a pozorovatelnost daného systému. V souladu s (2.49) a (2.56) můžeme psát

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = [2, 0], \quad d = 0.$$

Řiditelnost (2.50)

$$\mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [\mathbf{b}, \mathbf{Ab}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

Lineární dynamický systém (2.56) je řiditelný.

Pozorovatelnost (2.51)

$$\mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = 4 \neq 0 \Rightarrow$$

Lineární dynamický systém (2.56) je pozorovatelný.

a) Přenos

Na základě vztahu (2.52) můžeme psát

$$(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})}{\det(\mathbf{sI} - \mathbf{A})} = \frac{1}{s(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix},$$

$$G(s) = \mathbf{c}^T (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \frac{1}{s(s+2)} [2, 0] \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{s(s+2)}.$$

Použijeme-li vztah (2.54) nemusíme invertovat matici, tj. můžeme psát

$$\det(\mathbf{sI} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} = s(s+2),$$

$$\det(\mathbf{sI} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{c}^T) = \det \left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [2, 0] \right\} = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix} = s(s+2) + 2,$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\det(\mathbf{sI} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{c}^T) - \det(\mathbf{sI} - \mathbf{A})}{\det(\mathbf{sI} - \mathbf{A})} = \frac{2}{s(s+2)}.$$

Vidíme, že jsme obdrželi identické výsledky a že získaný přenos má minimální tvar.

b) Kmitočtový přenos

V souladu se vztahem (2.27) můžeme přímo psát

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = \frac{2}{j\omega(j\omega+2)} = -\frac{2}{\omega^2+4} - j\frac{4}{\omega(\omega^2+4)}.$$

Kmitočtová charakteristika je na obr. 2.14a.

c) Impulsní funkce

Na základě vztahu (2.38) dostaneme

$$g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{s(s+2)}\right\} = 1 - e^{-2t}.$$

Impulsní charakteristika je na obr. 2.14b.

d) Přejchodová funkce

Na základě vztahu (2.41) dostaneme

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2(s+2)}\right\} = t + \frac{1}{2}(e^{-2t} - 1).$$

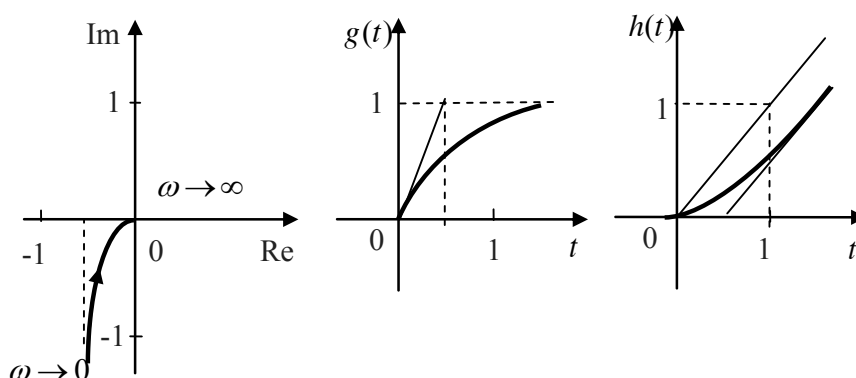
Přechodová charakteristika je na obr. 2.14c.

Ověříme ještě souvislost mezi impulsní a přechodovou funkcí na základě vztahů (2.47) a (2.48), tj.

$$g(t) = \frac{d h(t)}{d t} = \frac{d}{d t} \left[t + \frac{1}{2} (e^{-2t} - 1) \right] = 1 - e^{-2t},$$

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau = \int_0^t (1 - e^{-2\tau}) d\tau = t + \frac{1}{2} [e^{-2\tau}]_0^t = t + \frac{1}{2} (e^{-2t} - 1).$$

Vidíme, že vztahy (2.47) a (2.48) skutečně platí.



Obr. 2.14 Charakteristiky: a) kmitočtová, b) impulsní, c) přechodová – příklad 2.4

Příklad 2.5

Přenos konvenčního regulátoru PI je dán vztahem

$$G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + K_I \frac{1}{s}, \quad (2.57)$$

kde $U(s)$ je obraz akční veličiny, $E(s)$ – obraz regulační odchylky. K_P – váha proporcionální složky, K_I – váha integrační složky. Přenos regulátoru PI je třeba vyjádřit ve tvaru stavového modelu.

Řešení:

Přenos regulátoru PI vyjádříme v časové oblasti ve tvaru integrodiferenciální rovnice

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau.$$

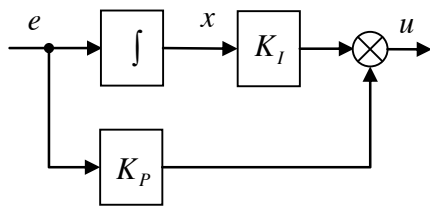
Zvolíme-li jako stavovou proměnnou

$$x(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau,$$

pak lze psát

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= e(t), \\ u(t) &= K_I x(t) + K_P e(t). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Obdrželi jsme jednoduchý stavový model regulátoru PI, viz obr. 2.15.



Obr. 2.15 Stavový model regulátoru PI – příklad 2.5

3 STAVOVÉ MODELY LINEÁRNÍCH DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

3.1 Asymptotická stabilita

Stabilita lineárních dynamických systémů je jejich nejdůležitější vlastností. Je ji třeba chápat jako schopnost dynamických systémů ustálit všechny veličiny na konečných hodnotách, pokud se všechny vstupní veličiny ustálí na konečných hodnotách.

Uvažujme lineární dynamický systém popsaný stavovým modelem [viz (2.49)]

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + d u(t). \quad (3.1b)$$

Protože výstupní rovnice (3.1b) je algebraická (statická), o stabilitě rozhoduje stavová (dynamická) rovnice (3.1a).

Nutnou a postačující podmínkou asymptotické stability lineárního dynamického systému (3.1) je, aby kořeny $s_1, s_2, \dots, s_n$ jeho charakteristického mnohočlenu [viz (2.55)]

$$\begin{aligned} N(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = \\ &= (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) \end{aligned} \quad (3.2)$$

měly zápornou reálnou část, tj.

$$\operatorname{Re} s_i < 0 \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3)$$

Je zřejmé, že kořeny $s_1, s_2, \dots, s_n$ jsou současně póly daného systému (3.1) [viz (2.55)] a také **vlastní** (charakteristická) **čísla** (hodnoty) matice $\mathbf{A}$.

U asymptoticky stabilního lineárního dynamického systému musí existovat statická charakteristika.

Pro ověření asymptotické stability lineárního dynamického systému se stavovým modelem (3.1) lze použít libovolné kritérium vycházející z charakteristického mnohočlenu (3.2).

Příklad 3.1

Je třeba ověřit asymptotickou stabilitu lineárního dynamického systému (2.56) z příkladu 2.4.

Řešení:

V příkladu 2.4 byl již určen charakteristický mnohočlen

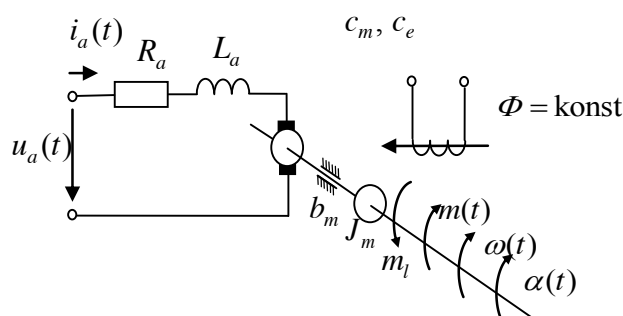
$$N(s) = s(s + 2) \Rightarrow s_1 = 0, \quad s_2 = -2.$$

Protože jeden pól je nulový, je zřejmé, že daný lineární dynamický systém není asymptoticky stabilní. Z hlediska lineární teorie je daný systém na mezi stability a z hlediska stability ve smyslu Ljapunova je stabilní.

Příklad 3.2

Na obr. 3.1 je zjednodušené schéma stejnosměrného motoru s cizím konstantním buzením, kde značí: J_m – celkový moment setrvačnosti redukovaný na hřídel motoru [kg m^2], $i_a(t)$ – proud kotvy [A], $u_a(t)$ – napětí kotvy [V], R_a – celkový odpor (rezistance) obvodu kotvy [Ω], L_a – celková indukčnost obvodu kotvy [H], b_m – koeficient viskózního tření [N m s rad^{-1}], $m(t)$ – moment motoru [N m], $m_l(t)$ – zátěžný moment [N m], $\alpha(t)$ – úhel natočení hřídele motoru [rad], $\omega(t)$ – úhlová rychlost hřídele motoru [rad s^{-1}], c_m – konstanta motoru [N m A^{-1}], c_e – konstanta motoru [V s rad^{-1}], $u_e(t)$ – indukované napětí [V], Φ – konstantní magnetický tok buzení [Wb].

Je třeba sestavit stavový model stejnosměrného motoru za předpokladu, že výstupem je úhel natočení $\alpha(t)$ a úhlová rychlost $\omega(t)$. U stavového modelu s výstupem $\omega(t)$ je třeba ověřit asymptotickou stabilitu.



Obr. 3.1 Zjednodušené schéma stejnosměrného motoru s konstantním cizím buzením – příklad 3.2

Řešení:

V souladu s obr. 3.1 můžeme psát:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha(t)}{dt} &= \omega(t), \\ J_m \frac{d\omega(t)}{dt} + b_m \omega(t) &= m(t) - m_l(t), \\ m(t) &= c_m i_a(t), \\ L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) &= u_a(t) - u_e(t), \\ u_e(t) &= c_e \omega(t). \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Stavový model stejnosměrného motoru s konstantním cizím buzením dostaneme ze soustavy rovnic (3.4), tj.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha(t)}{dt} &= \omega(t), \\ \frac{d\omega(t)}{dt} &= -\frac{b_m}{J_m}\omega(t) + \frac{c_m}{J_m}i_a(t) - \frac{1}{J_m}m_l(t), \\ \frac{di_a(t)}{dt} &= -\frac{c_e}{L_a}\omega(t) - \frac{R_a}{L_a}i_a(t) + \frac{1}{L_a}u_a(t). \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Soustavu rovnic (3.5) zapíšeme maticově

$$\begin{bmatrix} \frac{d\alpha(t)}{dt} \\ \frac{d\omega(t)}{dt} \\ \frac{di_a(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_m}{J_m} & \frac{c_m}{J_m} \\ 0 & -\frac{c_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \omega(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} u_a(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_m} \\ 0 \end{bmatrix} m_l(t). \quad (3.6)$$

Stavový model (3.6) [nebo (3.5)] platí pro výstup $\alpha(t)$. Neuvažováním první rovnice v (3.5) dostaneme stavový model s výstupem $\omega(t)$

$$\begin{bmatrix} \frac{d\omega(t)}{dt} \\ \frac{di_a(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b_m}{J_m} & \frac{c_m}{J_m} \\ -\frac{c_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} u_a(t) - \begin{bmatrix} \frac{1}{J_m} \\ 0 \end{bmatrix} m_l(t). \quad (3.7)$$

V ustáleném stavu pro výkony platí rovnost, tj.

$$u_e i_a = m\omega \Rightarrow c_e \omega i_a = c_m i_a \omega \Rightarrow c_e = c_m.$$

Je třeba ověřit asymptotickou stabilitu stejnosměrného motoru se stavovým modelem (3.7), a proto lze psát ($c_e = c_m$)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -\frac{b_m}{J_m} & \frac{c_m}{J_m} \\ -\frac{c_m}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix}, \\ N_\omega(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} s + \frac{b_m}{J_m} & -\frac{c_m}{J_m} \\ \frac{c_m}{L_a} & s + \frac{R_a}{L_a} \end{vmatrix} = \left(s + \frac{b_m}{J_m}\right)\left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) + \frac{c_m^2}{J_m L_a} = \\ &= s^2 + \left(\frac{b_m}{J_m} + \frac{R_a}{L_a}\right)s + \frac{c_m^2 + R_a b_m}{J_m L_a} \Rightarrow \operatorname{Re} s_1 < 0, \operatorname{Re} s_2 < 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Protože charakteristický mnohočlen je 2. stupně s kladnými koeficienty, proto na základě nutné a postačující Stodolovy podmínky daný lineární dynamický systém reprezentující stejnosměrný motor s konstantním cizím buzením, za předpokladu, že výstupem je úhlová rychlost hřídele $\omega(t)$, je asymptoticky stabilní.

Snadno se dá ukázat, že pokud výstupem bude úhlové natočení hřídele motoru $\alpha(t)$, pak lineární dynamický systém (3.6) bude mít charakteristický mnohočlen

$$N_\alpha(s) = s \left[s^2 + \left(\frac{b_m}{J_m} + \frac{R_a}{L_a} \right) s + \frac{c_m^2 + R_a b_m}{J_m L_a} \right] = s N_\omega(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_1 = 0, \operatorname{Re} s_2 < 0, \operatorname{Re} s_3 < 0. \quad (3.9)$$

V tomto případě stejnosměrný motor s cizím konstantním buzením není asymptoticky stabilní. Podobně jako v příkladě 3.1 z hlediska lineární teorie je na mezi stability a z hlediska stability ve smyslu Ljapunova je stabilní.

3.2 Řiditelnost a pozorovatelnost

Matematické modely ve tvaru přenosu, kmitočtového přenosu, impulsní funkce a přechodové funkce jednoznačně popisují vlastnosti říditelného a pozorovatelného lineárního dynamického systému pouze při nulových počátečních podmínkách (podrobněji viz příloha C).

Pro stavový model

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du(t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

podmínka říditelnosti (2.50) $\det \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq 0$ vyjadřuje velmi důležitou vlastnost daného lineárního dynamického systému spočívající v tom, že existuje taková vstupní veličina (řízení) $u(t)$, které převede daný systém z libovolného počátečního stavu $\mathbf{x}(t_0)$ do jiného libovolného koncového stavu $\mathbf{x}(t_1)$ za konečnou dobu $t_1 - t_0$. Nejčastěji se předpokládá, že koncový stav je počátek souřadnic, tj. $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0}$.

Naproti tomu podmínka pozorovatelnosti (2.51) $\det \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) \neq 0$ vyjadřuje to, že na základě průběhů vstupní veličiny (řízení) $u(t)$ a výstupní veličiny $y(t)$ na konečném časovém intervalu $t_1 - t_0$ lze určit počáteční stav $\mathbf{x}(t_0)$.

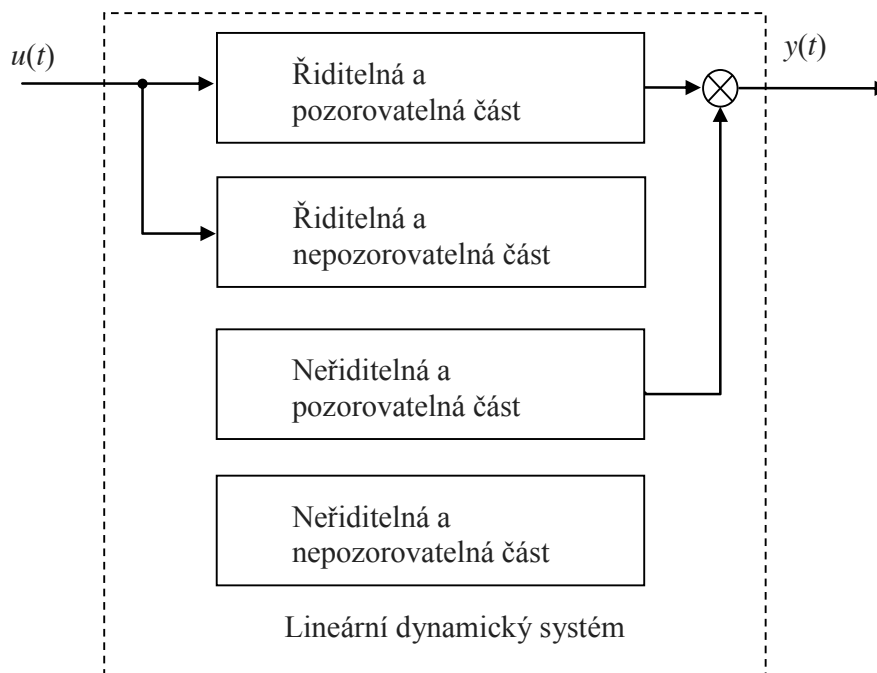
Lineární dynamický systém se stavovým modelem (3.10) může být dekomponován na čtyři části (je to tzv. **Kalmanova dekompozice systému**) v souladu s obr. 3.2:

řiditelná a pozorovatelná část,

řiditelná a nepozorovatelná část,

neřiditelná a pozorovatelná část,

neřiditelná a nepozorovatelná část.



Obr. 3.2 Kalmanova dekompozice lineárního dynamického systému

Pro technickou praxi je velmi důležité, aby neříditelná a nepozorovatelná část byly asymptoticky stabilní. Pokud neříditelná část je asymptoticky stabilní, pak daný lineární dynamický systém je **stabilizovatelný**, a pokud nepozorovatelná část je asymptoticky stabilní, pak daný lineární dynamický systém je **detekovatelný**.

Příklad 3.3

U lineárního dynamického systému

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + u(t), \\
 \dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) + u(t), \\
 \dot{x}_3(t) &= 0, \\
 y(t) &= x_1(t) + x_3(t)
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

je třeba provést Kalmanovu dekompozici.

Řešení:

V souladu s (3.11) můžeme psát

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = [1, 0, 1], \quad d = 0.$$

Řiditelnost (2.50)

$$\mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \det \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 0.$$

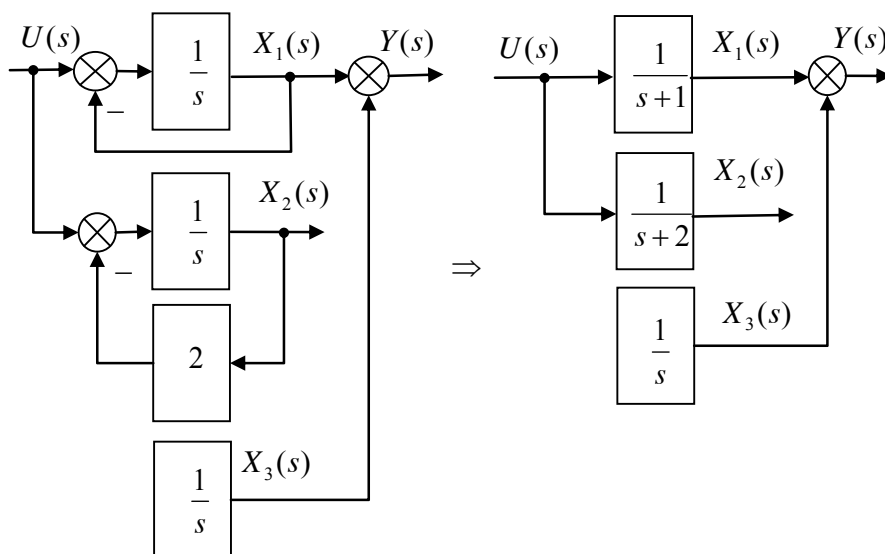
Lineární dynamický systém (3.11) je neřiditelný.

Pozorovatelnost (2.51)

$$\mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \det \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = 0.$$

Lineární dynamický systém (3.10) je nepozorovatelný.

Na základě stavového modelu (3.11) můžeme sestavit blokové schéma na obr. 3.3, ze kterého vyplývá, že stavová proměnná $x_2(t)$ je nepozorovatelná a stavová proměnná $x_3(t)$ je neřiditelná. Z obr. 3.3 je zřejmé, že póly daného systému jsou $s_1 = -1$, $s_2 = -2$ a $s_3 = 0$, tzn. lineární dynamický systém je neřiditelný a nestabilizovatelný, nepozorovatelný ale detekovatelný (nepozorovatelná část je asymptoticky stabilní, naproti tomu neřiditelná část není asymptoticky stabilní).



Obr. 3.3 Kalmanova dekompozice – příklad 3.3

Určíme přenos ze stavového modelu (3.11) na základě vztahu (2.54):

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s(s+1)(s+2),$$

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{c}^T) = s(s+2)^2,$$

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{c}^T) - \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \\
 &= \frac{s(s+2)}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(s+1)}.
 \end{aligned}$$

Je zřejmé, že stavový model (3.11) neměl minimální tvar, protože v přenosu došlo ke kompenzaci (zkrácení), a tedy k redukci řádu daného systému z 3 na 1.

Příklad 3.4

Je třeba ověřit říditelnost a pozorovatelnost lineárního dynamického systému popsaného stavovým modelem

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + u(t), \\
 \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t), \\
 y(t) &= x_1(t) + x_2(t).
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Řešení:

Ze stavového modelu (3.12) dostaneme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = [1, 1], \quad d = 0.$$

Říditelnost (2.50)

$$\mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 0.$$

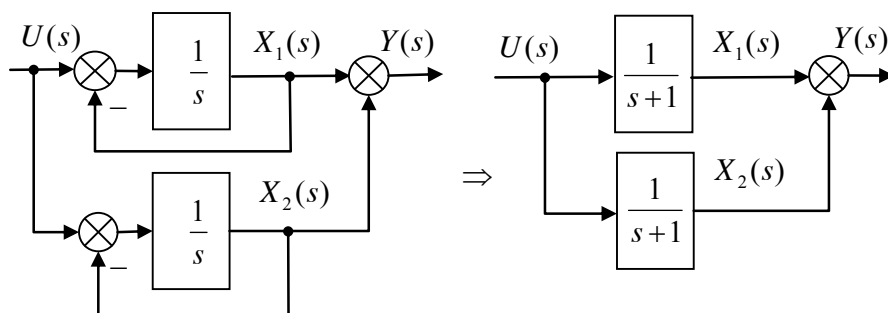
Lineární dynamický systém (3.12) je neříditelný.

Pozorovatelnost (2.51)

$$\mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = 0.$$

Lineární dynamický systém (3.12) je nepozorovatelný.

Na základě soustavy rovnic (3.12) lze sestavit blokové schéma lineárního dynamického systému, obr. 3.4.



Obr. 3.4 Blokové schéma lineárního dynamického systému – příklad 3.4

Z obr. 3.4 vyplývá, že obě stavové proměnné $x_1(t)$ a $x_2(t)$ jsou stejné, a proto ve stavové rovině (x_1, x_2) nelze vstupem (řízením) $u(t)$ dosáhnout libovolného stavu $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$. Rovněž je zřejmé, že tyto stavové proměnné nelze od sebe rozlišit, a proto jsou také nepozorovatelné. Protože póly jsou $s_1 = s_2 = -1$, daný lineární dynamický systém je asymptoticky stabilní, a proto i když je neřiditelný a nepozorovatelný, je stabilizovatelný a detekovatelný, a tedy prakticky využitelný.

Daný lineární dynamický systém je 2. řádu, ale z vnějšího pohledu se jeví jako systém 1. řádu s přenosem

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s+1}.$$

3.3 Základní kanonické tvary

Uvažujme lineární dynamický systém, jehož stavový model má obecný tvar

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du(t),\end{aligned}\tag{3.13a}$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = [c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}]. \tag{3.13b}$$

Vektory $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}^T$ mají dva indexy, protože vektor $\mathbf{b}$ je první sloupec v obecné vstupní matici $\mathbf{B}$ a vektor $\mathbf{c}^T$ je první řádek v obecné výstupní matici $\mathbf{C}$ u mnohorozměrových lineárních dynamických systémů.

V textu z důvodu přehlednějšího zápisu závislost na čase t nebude explicitně vyjadřována, rovněž budeme hovořit zjednodušeně o systému (pojmy model a systém budeme považovat za ekvivalentní) a dále budou používány indexy: t – transformace (transformation), co – řiditelnost (controllability), c – řízení (control, controller), ob – pozorovatelnost (observability), o – pozorování (observe, observer), d – diagonální (diagonal).

Dále se předpokládá, že lineární dynamický systém (3.13) je řiditelný a pozorovatelný, tj. platí (2.50) a (2.51) (má minimální tvar)

$$\det \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq 0 \quad \text{a} \quad \det \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) \neq 0.$$

Zavedeme-li regulární čtvercovou transformační matici $\mathbf{T}_t$ řádu n vztahem

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_t \mathbf{x}_t, \quad \det \mathbf{T}_t \neq 0, \tag{3.14}$$

pak stavový model (3.13) může být transformován ze stavového prostoru X do nového stavového prostoru X_t , tj. obdržíme transformovaný stavový model

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_t &= \mathbf{A}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{b}_t u, \\ y &= \mathbf{c}_t^T \mathbf{x}_t + du,\end{aligned}\tag{3.15}$$

kde

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_t &= \mathbf{T}_t^{-1} \mathbf{x}, \\
\mathbf{A}_t &= \mathbf{T}_t^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_t, \\
\mathbf{b}_t &= \mathbf{T}_t^{-1} \mathbf{b}, \\
\mathbf{c}_t^T &= \mathbf{c}^T \mathbf{T}_t.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Konstanta převodu d se při transformaci nezmění.

Obě matice systému (dynamiky) $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}_t$ jsou **podobné**, protože mají stejné charakteristické mnohočleny, a tedy i stejná vlastní čísla, tj. platí

$$\begin{aligned}
N(s) &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_t) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{T}_t^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_t) = \\
&= \det[\mathbf{T}_t^{-1} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{T}_t] = \\
&= \det \mathbf{T}_t^{-1} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \det \mathbf{T}_t = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \\
&= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Proto se tato transformace nazývá **podobnostní transformace**.

Kanonický tvar řízení

Pro transformační matici

$$\mathbf{T}_c = \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c), \tag{3.18a}$$

kde

$$\mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.18b}$$

na základě vztahů (3.15), (3.16) a (3.17) se dostane (index t je třeba zastoupit indexem c) **kanonický** (normální) **tvar řízení** [controller (normal) canonical form]

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{b}_c u, \\
y &= \mathbf{c}_c^T \mathbf{x}_c + du,
\end{aligned} \tag{3.19a}$$

kde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_c = \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_c &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{b}_c = \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_c^T = \mathbf{c}^T \mathbf{T}_c = [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}].
 \end{aligned} \tag{3.19b}$$

(3.19) Čtvercová matice (3.18b) je inverzní k matici řiditelnosti kanonického tvaru řízení

$$\mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c) = [\mathbf{b}_c, \mathbf{A}_c \mathbf{b}_c, \dots, \mathbf{A}_c^{n-1} \mathbf{b}_c], \tag{3.20}$$

pro kterou platí

$$|\det \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c)| = |\det \mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c)| = 1. \tag{3.21}$$

Lze to snadno dokázat. Násobme obě strany rovnice (3.18a) zprava maticí $\mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c)$, tj.

$$\mathbf{T}_c \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c) = \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}).$$

Nyní využijeme vztahy (3.19b) a dostaneme

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_c [\mathbf{b}_c, \mathbf{A}_c \mathbf{b}_c, \dots, \mathbf{A}_c^{n-1} \mathbf{b}_c] &= \mathbf{T}_c [\mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{b}, \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_c \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{b}, \dots, \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{T}_c \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{b}] = \\
 &= [\mathbf{b}, \mathbf{A} \mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}] = \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}).
 \end{aligned}$$

Vzhledem k předpokladu řiditelnosti a pozorovatelnosti systému (3.13), a tedy i (3.19) lze určit přenos

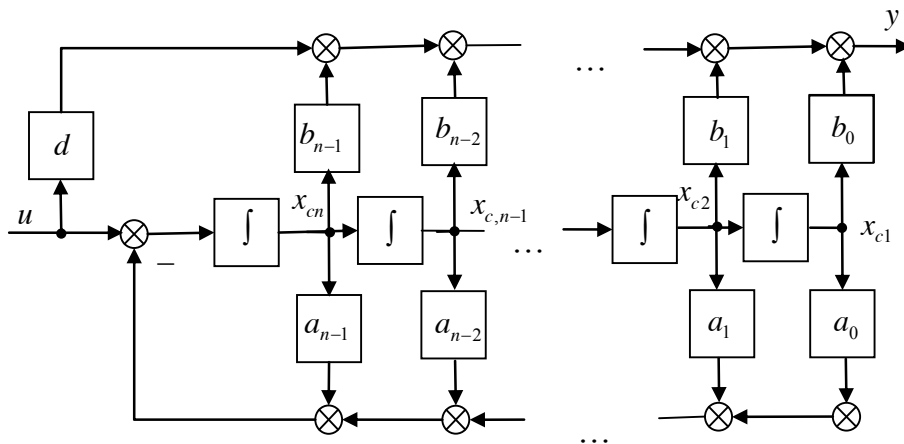
$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d = \mathbf{c}_c^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{b}_c + d = \\
 &= \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} + d,
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

ze kterého je zřejmé, že vektor $\mathbf{c}_c^T$ je dán koeficienty čitatele v přenosu (3.22) [viz (3.19b)]. Koeficienty jmenovatele zlomku v přenosu (3.22) jsou koeficienty charakteristického mnohočlenu lineárního dynamického systému (3.13) i (3.19) [viz (3.17)], tj.

$$N(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0. \tag{3.23}$$

Velmi důležité je, že vzhledem ke specifické struktuře matice (3.18b), lze ji sestavit pouze na základě znalostí koeficientů charakteristického mnohočlenu původního systému (3.13) [viz (3.23)], tj. bez předchozí znalosti transformovaného kanonického tvaru řízení (3.19).

Blokové schéma lineárního dynamického systému v kanonickém tvaru řízení je na obr. 3.5.



Obr. 3.5 Blokové schéma lineárního dynamického systému v kanonickém tvaru řízení

Kanonický tvar pozorování

Pro transformační matici

$$\mathbf{T}_o^{-1} = \mathbf{Q}_{ob}^{-1}(\mathbf{A}_o, \mathbf{c}_o^T) \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T), \quad (3.24a)$$

kde

$$\mathbf{Q}_{ob}^{-1}(\mathbf{A}_o, \mathbf{c}_o^T) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c), \quad (3.24b)$$

na základě vztahů (3.15) a (3.16) se dostane (index t je třeba zastoupit indexem o) **kanonický** (normální) **tvar pozorování** [observer (normal) canonical form]

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_o &= \mathbf{A}_o \mathbf{x}_o + \mathbf{b}_o u, \\ y &= \mathbf{c}_o^T \mathbf{x}_o + du, \end{aligned} \quad (3.25a)$$

kde

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_o = \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_o &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{b}_o = \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_o^T = \mathbf{c}^T \mathbf{T}_o = [0, 0, \dots, 0, 1].
\end{aligned} \tag{3.25b}$$

Rovněž v tomto případě čtvercová matice (3.24b) má stejný tvar a strukturu jako matice (3.18b), a proto platí

$$|\det \mathbf{Q}_{ob}^{-1}(\mathbf{A}_o, \mathbf{c}_o^T)| = |\det \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}_o, \mathbf{c}_o^T)| = 1. \tag{3.26}$$

Ze vzájemného srovnání vztahů (3.19) a (3.25) vyplývá, že mezi kanonickými tvary řízení a pozorování platí dualita

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_c(t) &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{b}_c u(t), \\ y(t) &= \mathbf{c}_c^T \mathbf{x}_c(t) + du(t), \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_o(t) &= \mathbf{A}_o \mathbf{x}_o(t) + \mathbf{b}_o u(t), \\ y(t) &= \mathbf{c}_o^T \mathbf{x}_o(t) + du(t), \end{aligned} \tag{3.27}$$

kanonický tvar řízení kanonický tvar pozorování

kde

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_o &= \mathbf{A}_c^T & \Leftrightarrow & \mathbf{A}_c = \mathbf{A}_o^T, \\ \mathbf{b}_o &= \mathbf{c}_c & \Leftrightarrow & \mathbf{b}_c = \mathbf{c}_o, \\ \mathbf{c}_o^T &= \mathbf{b}_c^T & \Leftrightarrow & \mathbf{c}_c^T = \mathbf{b}_o^T. \end{aligned} \right\} \tag{3.28}$$

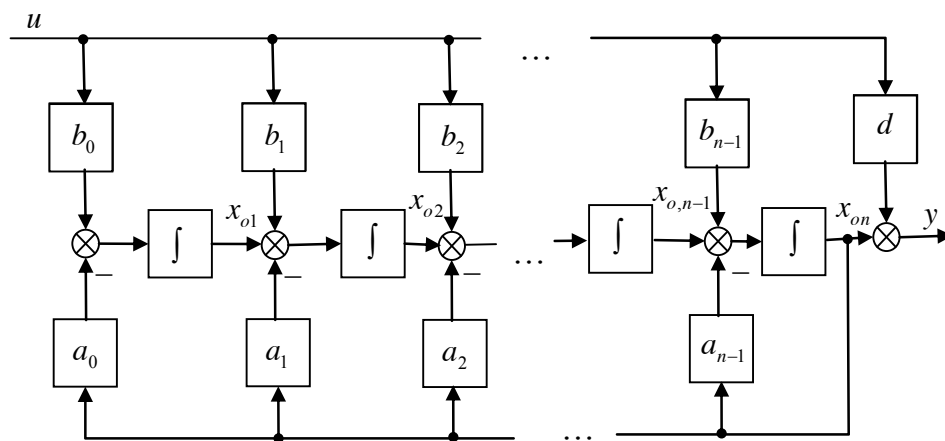
Konstanta převodu d zůstává ve všech tvarech stavových modelů stejná.

Obě matice $\mathbf{A}_c$ a $\mathbf{A}_o = \mathbf{A}_c^T$ ve stavových modelech (3.27) mají **Frobeniův kanonický tvar**, který se vyznačuje tím, že v prvním nebo posledním řádku, příp. v prvním nebo posledním sloupci vystupují záporné koeficienty jejich charakteristických mnohočlenů $N(s)$ pro $a_n = 1$. Charakteristické mnohočleny jsou stejné a jsou dány vztahem

$$\begin{aligned} N(s) &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_o) = \\ &= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n), \end{aligned} \tag{3.29}$$

kde s_i jsou **charakteristická (vlastní) čísla** (hodnoty), stejná pro matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_c$ a $\mathbf{A}_o = \mathbf{A}_c^T$.

Blokové schéma lineárního dynamického systému v kanonickém tvaru pozorování je na obr. 3.6.



Obr. 3.6 Blokové schéma lineárního dynamického systému v kanonickém tvaru pozorování

Z výše uvedeného je zřejmé, že kanonický tvar řízení (3.19) a pozorování (3.25) můžeme získat pro říditelný a pozorovatelný lineární dynamický systém z jeho přenosu (3.22) nebo pomocí transformace (3.18) a (3.24). S výhodou lze použít duality mezi těmito dvěma kanonickými tvary (3.27) a (3.28).

Diagonální kanonický tvar

Uvažujme říditelný a pozorovatelný lineární dynamický systém s přenosem [viz (2.55)]

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} + d. \quad (3.30)$$

Za předpokladu, že póly jsou vzájemně různé, lze psát

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = d + \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)} = \\ &= d + \frac{c_1}{s-s_1} + \frac{c_2}{s-s_2} + \dots + \frac{c_n}{s-s_n} \end{aligned} \quad (3.31)$$

a stavový model bude

$$\begin{aligned} \dot{x}_{d1} &= s_1x_{d1} + u, \\ \dot{x}_{d2} &= s_2x_{d2} + u, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{dn} &= s_nx_{dn} + u, \\ y &= c_1x_{d1} + c_2x_{d2} + \dots + c_nx_{dn} + du, \end{aligned} \quad (3.32a)$$

resp.

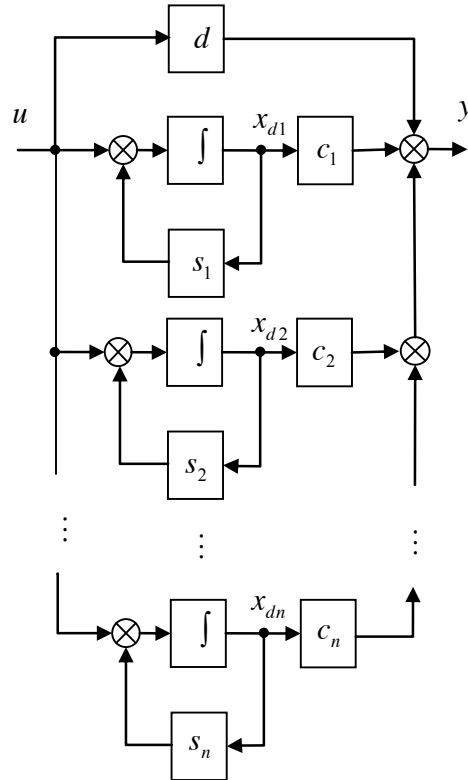
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_d &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d + \mathbf{b}_d u, \\ y &= \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_d + du, \end{aligned} \quad (3.32b)$$

kde

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_d^T = [c_1, c_2, \dots, c_n]. \quad (3.32c)$$

Stavový model lineárního dynamického systému (3.32) s maticí $\mathbf{A}_d$, na jejíž diagonále jsou jeho póly, se nazývá **diagonální** (modální) **kanonický tvar**.

Blokové schéma lineárního dynamického systému v diagonálním kanonickém tvaru je na obr. 3.7.



Obr. 3.7 Blokové schéma lineárního dynamického systému v diagonálním kanonickém tvaru

Stavové modely v diagonálním kanonickém tvaru umožňují přímo ověřit říditelnost a pozorovatelnost, viz příklady 3.3 a 3.4.

Uvažujme nyní, že přenos (3.30) má některé póly násobné. Pro jednoduchost uvažujme, že násobnost pólu s_1 je 3 a že zbývající póly jsou vzájemně různé, tj.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = d + \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{(s-s_1)^3(s-s_4)(s-s_5)\dots(s-s_n)} = \\ &= d + \frac{c_1}{(s-s_1)^3} + \frac{c_2}{(s-s_1)^2} + \frac{c_3}{s-s_1} + \frac{c_4}{s-s_4} + \dots + \frac{c_n}{s-s_n}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

pak stavový model bude mít tvar

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{d1} &= s_1 x_{d1} + x_{d2}, \\
\dot{x}_{d2} &= s_1 x_{d2} + x_{d3}, \\
\dot{x}_{d3} &= s_1 x_{d3} + u, \\
\dot{x}_{d4} &= s_4 x_{d4} + u, \\
&\vdots \\
\dot{x}_{dn} &= s_n x_{dn} + u, \\
y &= c_1 x_{d1} + c_2 x_{d2} + \dots + c_n x_{dn} + du,
\end{aligned} \tag{3.34a}$$

resp.

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_d &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d + \mathbf{b}_d u, \\
y &= \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_d + du,
\end{aligned} \tag{3.34b}$$

kde

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_d^T = [c_1, c_2, \dots, c_n]. \tag{3.34c}$$

Čtvercové matice $\mathbf{J}_1$ a $\mathbf{J}_2$ jsou dány vztahy

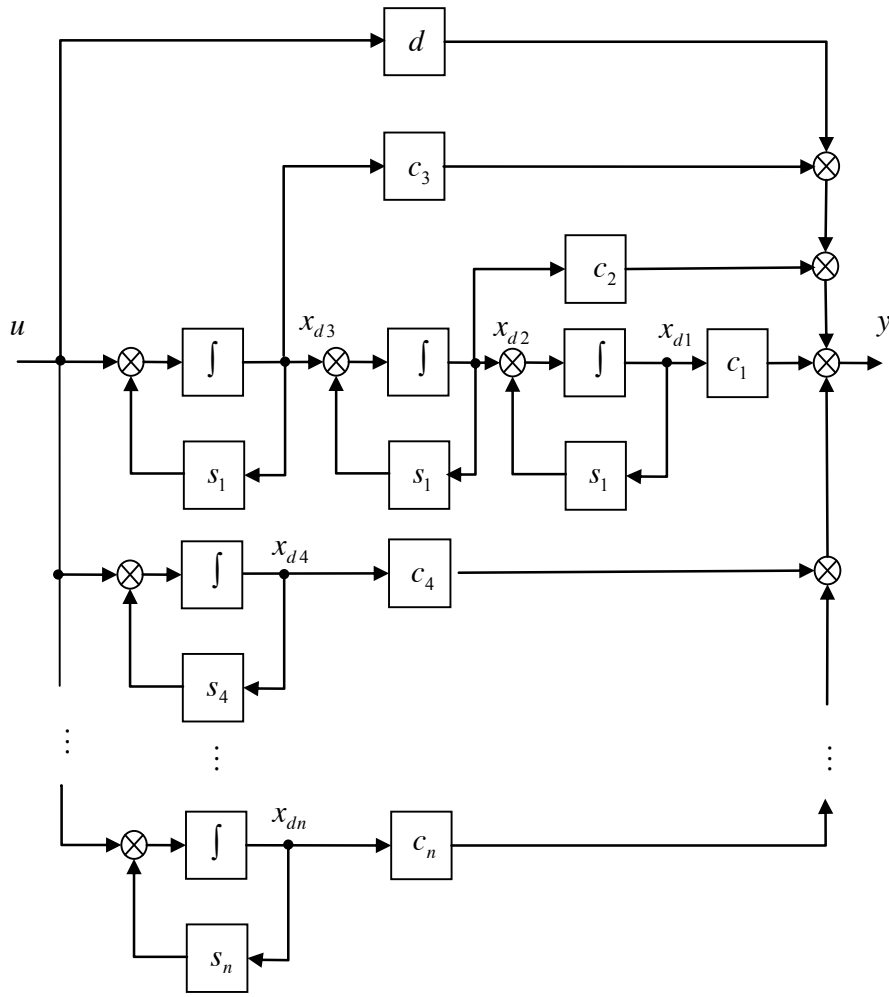
$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} s_1 & 1 & 0 \\ 0 & s_1 & 1 \\ 0 & 0 & s_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} s_4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix}. \tag{3.34d}$$

Stavový model lineárního dynamického systému ve tvaru (3.34) je tzv. **Jordanův kanonický tvar** a čtvercové matice (3.34d) se nazývají **Jordanovy bloky**.

Blokové schéma lineárního dynamického systému v Jordanově kanonickém tvaru je na obr. 3.8.

Případ s násobnými reálnými póly lze snadno převést na případ s navzájem různými póly, např. přičtením malých kladných čísel, protože tím se výsledné vlastnosti daného dynamického systému změní jen nepatrně. Např. v přenosu (3.33) použijeme $s_1 = s_1$, $s_2 = s_1 - \varepsilon$ a $s_3 = s_1 + \varepsilon$, kde ε je velmi malé kladné číslo.

Pro transformaci obecného stavového modelu (3.13) na diagonální nebo Jordanův kanonický tvar je možné použít rovněž podobnostní transformaci, ale určení transformační matice je již velmi složité a přesahuje rámec těchto skript.



Obr. 3.8 Blokové schéma lineárního dynamického systému v Jordanově kanonickém tvaru (3.34)

Příklad 3.5

Lineární dynamický systém je popsán stavovým modelem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u, \\ y &= 2x_1 + x_2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Stavový model (3.35) je třeba transformovat do výše uvedených tří kanonických tvarů.

Řešení:

Pro stavový model (3.35) platí

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = [2, 1], \quad d = 0.$$

Zkontrolujeme říditelnost a pozorovatelnost pomocí vztahů (2.50) a (2.51).

$$\mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = -2 \neq 0.$$

Lineární dynamický systém (3.35) je říditelný.

$$\mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = 8 \neq 0.$$

Lineární dynamický systém (3.35) je pozorovatelný.

Protože daný lineární dynamický systém je říditelný a pozorovatelný, může být určen přenos. Např. na základě vztahu (2.54) lze psát

$$N(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} s+1 & -2 \\ 0 & s+1 \end{vmatrix} = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1 \Rightarrow s_1 = s_2 = -1 < 0.$$

Lineární dynamický systém (3.35) je asymptoticky stabilní s dvojnásobným reálným pólem $s_1 = s_2 = -1$.

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{c}^T) &= \left\| \begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\| = \begin{vmatrix} s+1 & -2 \\ 2 & s+2 \end{vmatrix} = \\ &= (s+1)(s+2) + 4 = s^2 + 3s + 6, \\ G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{c}^T) - \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \\ &= \frac{s+5}{s^2 + 2s + 1} = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Kanonický tvar řízení

Na základě přenosu (3.36) můžeme přímo psát [viz (3.19)]

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_c^T = [b_0, b_1] = [5, 1],$$

tj.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{c1} &= x_{c2}, \\ \dot{x}_{c2} &= -x_{c1} - 2x_{c2} + u, \\ y &= 5x_{c1} + x_{c2}. \end{aligned}$$

Nyní použijeme transformační matici (3.18):

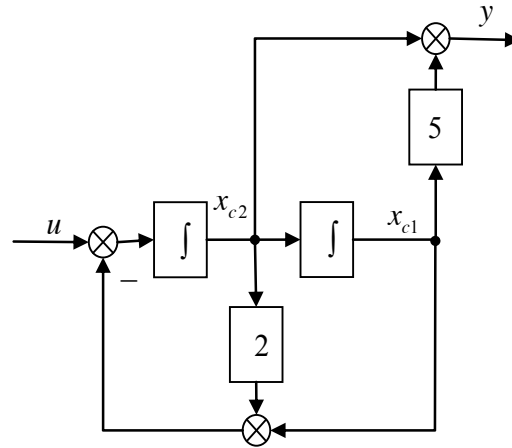
$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c) &= \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{T}_c &= \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}_c^{-1} = \frac{\text{adj} \mathbf{T}_c}{\det \mathbf{T}_c} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_c = \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_c^T = \mathbf{c}^T \mathbf{T}_c = [2, 1] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [5, 1].$$

Vidíme, že jsme obdrželi stejné výsledky. Blokové schéma lineárního dynamického systému (3.35) v kanonickém tvaru řízení je na obr. 3.9.



Obr. 3.9 Blokové schéma lineárního dynamického systému (3.35) v kanonickém tvaru řízení – příklad 3.5

Kanonický tvar pozorování

Na základě přenosu (3.36) můžeme přímo psát [viz (3.25)]

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_o = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_o^T = [0, 1],$$

tj.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{o1} &= -x_{o2} + 5u, \\ \dot{x}_{o2} &= x_{o1} - 2x_{o2} + u, \\ y &= x_{o2}. \end{aligned}$$

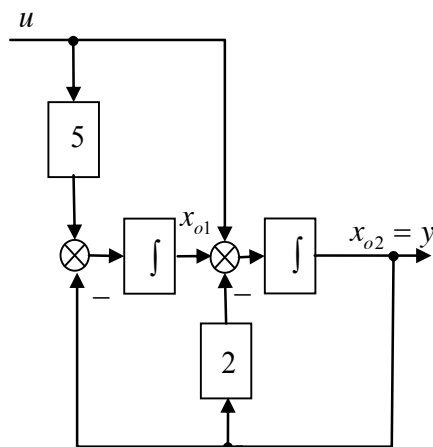
Nyní použijeme transformační matici (3.24):

$$\mathbf{Q}_{ob}^{-1}(\mathbf{A}_o, \mathbf{c}_o^T) = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_o^{-1} &= \mathbf{Q}_{ob}^{-1}(\mathbf{A}_o, \mathbf{c}_o^T) \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{T}_o &= \frac{\text{adj} \mathbf{T}_o^{-1}}{\det \mathbf{T}_o^{-1}} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{A}_o &= \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_o = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{b}_o &= \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_o^T = \mathbf{c}^T \mathbf{T}_o = [2, 1] \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = [0, 1].
\end{aligned}$$

Podobně jako v předchozím případě jsme obdrželi stejný výsledek. Je rovněž zřejmé, že mezi kanonickým tvarem řízení a pozorování platí dualita (3.28).

Blokové schéma lineárního dynamického systému (3.35) v kanonickém tvaru pozorování je na obr. 3.10.



Obr. 3.10 Blokové schéma lineárního dynamického systému (3.35) v kanonickém tvaru pozorování – příklad 3.5

Jordanův kanonický tvar

Přenos (3.36) zapíšeme ve tvaru (3.33), tj.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+5}{(s+1)^2} = \frac{4}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1} = \frac{c_1}{(s+1)^2} + \frac{c_2}{s+1}.$$

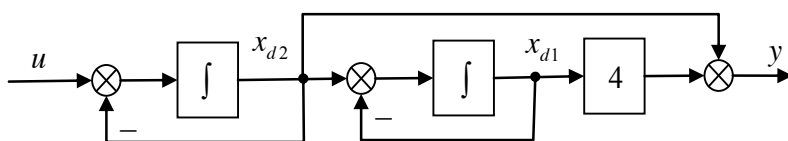
Na základě vztahů (3.34) můžeme přímo psát

$$\begin{aligned}\dot{x}_{d1} &= -x_{d1} + x_{d2}, \\ \dot{x}_{d2} &= -x_{d2} + u, \\ y &= 4x_{d1} + x_{d2}.\end{aligned}$$

tj.

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_d^T = [4, 1].$$

Blokové schéma lineárního dynamického systému (3.35) v Jordanově kanonickém tvaru je na obr. 3.11.



Obr. 3.11 Blokové schéma lineárního dynamického systému (3.35) v Jordanově kanonickém tvaru – příklad 3.5

3.4 Řešení lineárních stavových rovnic

Uvažujme lineární dynamický systém se stavovým modelem [viz (2.49)]

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.37a)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du(t). \quad (3.37b)$$

Použitím Laplaceovy transformace při uvažování počátečního stavu $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ se dostane

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{b}U(s),$$

$$Y(s) = \mathbf{c}^T \mathbf{X}(s) + dU(s).$$

Z první rovnice dostaneme

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}U(s)$$

a po dosazení do druhé rovnice a úpravě obdržíme obraz řešení

$$Y(s) = \underbrace{\mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0}_{\text{volná odezva = odezva na podmínky poč}} + \underbrace{[\mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d]U(s)}_{\text{vynucená odezva = odezva na vstup}} \quad (3.38)$$

Nyní najdeme řešení rovnic (3.37) v časové oblasti metodou variace konstant.

Předpokládejme, že řešení stavové rovnice (3.37a) má tvar

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{c}(t), \quad (3.39)$$

kde

$$e^{At} = I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots, \quad (3.40)$$

je to tzv. **fundamentální matice** a $c(t)$ zatím neznámá vektorová funkce.

Nejdříve si ukážeme některé důležité vlastnosti fundamentální matice (3.40):

$$e^{A0} = I, \quad (3.41a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{At} &= \frac{d}{dt} \left(I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots \right) = \\ &= A + \frac{2t}{2!}A^2 + \frac{3t^2}{3!}A^3 + \dots = A \left(I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots \right) = \\ &= \left(I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots \right) A = \\ &= A e^{At} = e^{At} A. \end{aligned} \quad (3.41b)$$

$$\begin{aligned} \int e^{At} dt &= \int \left(I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots \right) dt = \\ &= tI + \frac{t^2}{2 \cdot 1!}A + \frac{t^3}{3 \cdot 2!}A^2 + \frac{t^4}{4 \cdot 3!}A^3 + \dots = \\ &= A^{-1} \left(I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots - I \right) = \\ &= \left(I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots - I \right) A^{-1} = \\ &= A^{-1} (e^{At} - I) = (e^{At} - I) A^{-1}. \end{aligned} \quad (3.41c)$$

Po dosazení předpokládaného řešení (3.39) do stavové rovnice (3.37a) se dostane

$$\begin{aligned} A e^{At} c(t) + e^{At} \dot{c}(t) &= A e^{At} c(t) + b u(t) \Rightarrow \\ \dot{c}(t) &= e^{-At} b u(t), \quad c(0) = x_0, \\ c(t) &= \int_0^t e^{-A\tau} b u(\tau) d\tau + x_0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Nyní dosadíme (3.42) do (3.39) a dostaneme

$$x(t) = e^{At} x_0 + e^{At} \left[\int_0^t e^{-A\tau} u(\tau) d\tau \right] b \quad (3.43)$$

a po dosazení do výstupní rovnice (3.37b) se obdrží

$$y(t) = c^T e^{At} x_0 + c^T e^{At} \left[\int_0^t e^{-A\tau} u(\tau) d\tau \right] b + d u(t), \quad (3.44)$$

kde první část řešení $\mathbf{c}^T \mathbf{e}^{At} \mathbf{x}_0$ je volná odezva = odezva na počáteční podmínky a druhá část řešení $\mathbf{c}^T \mathbf{e}^{At} \left[\int_0^t \mathbf{e}^{-A\tau} u(\tau) d\tau \right] \mathbf{b} + du(t)$ je vynucená odezva = odezva na vstup.

Ze srovnání vztahů (3.44) a (3.38) vyplývá, že výraz

$$(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}$$

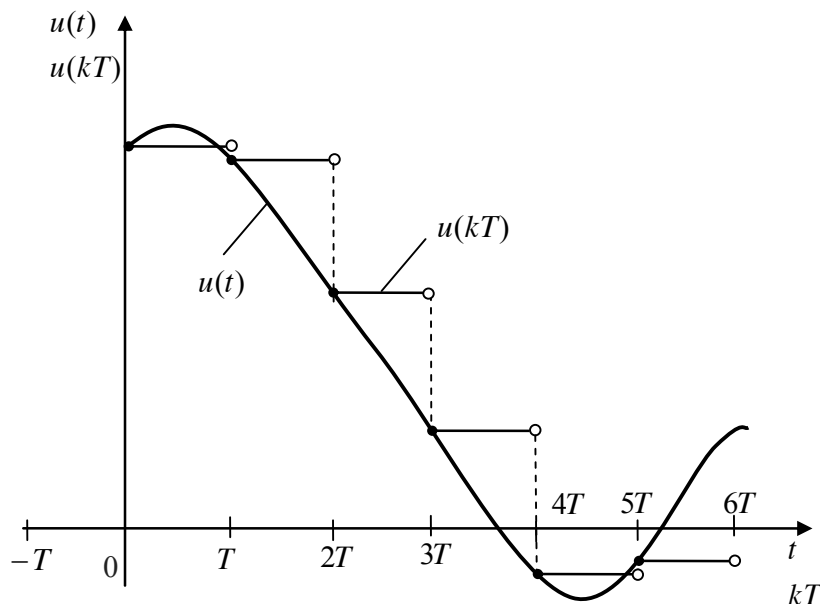
je Laplaceův obraz fundamentální matice (3.40), tj.

$$\mathcal{L}\{\mathbf{e}^{At}\} = (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{e}^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\}. \quad (3.45)$$

Předpokládejme nyní, že vstupem lineárního dynamického systému je veličina se stupňovitým, průběhem (obr. 3.12)

$$u(t) = u(kT) \quad \text{pro} \quad kT \leq t < (k+1)T, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.46)$$

kde kT je **diskrétní čas**, T – **vzorkovací perioda**.



Obr. 3.12 Průběhy vstupních veličin $u(t)$ a $u(kT)$

Na základě vztahu (3.43) můžeme pro $t = kT$ a $t = (k+1)T$ psát

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(kT) &= \mathbf{e}^{AkT} \mathbf{x}_0 + \mathbf{e}^{AkT} \left[\int_0^{kT} \mathbf{e}^{-A\tau} u(\tau) d\tau \right] \mathbf{b}, \\ \mathbf{x}[(k+1)T] &= \mathbf{e}^{A(k+1)T} \mathbf{x}_0 + \mathbf{e}^{A(k+1)T} \left[\int_0^{(k+1)T} \mathbf{e}^{-A\tau} u(\tau) d\tau \right] \mathbf{b} = \\ &= \mathbf{e}^{AT} \left\{ \underbrace{\mathbf{e}^{AkT} \mathbf{x}_0 + \mathbf{e}^{AkT} \left[\int_0^{kT} \mathbf{e}^{-A\tau} u(\tau) d\tau \right] \mathbf{b}}_{\mathbf{x}(kT)} \right\} + \mathbf{e}^{A(k+1)T} \left[\int_{kT}^{(k+1)T} \mathbf{e}^{-A\tau} u(\tau) d\tau \right] \mathbf{b} = \end{aligned}$$

$$= e^{AT} \mathbf{x}(kT) + \left[\int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-\tau]} d\tau \right] \mathbf{b}u(kT). \quad (3.47)$$

Integrál v posledním vztahu lze zjednodušit. Zvolíme novou proměnnou

$$v = (k+1)T - \tau \Rightarrow dv = -d\tau,$$

$$\tau = kT \Rightarrow v = T, \quad \tau = (k+1)T \Rightarrow v = 0$$

a pak můžeme psát

$$\int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-\tau]} d\tau = - \int_T^0 e^{Av} dv = \int_0^T e^{Av} dv.$$

Nyní stavovou rovnici můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = e^{AT} \mathbf{x}(kT) + \left(\int_0^T e^{Av} dv \right) \mathbf{b}u(kT). \quad (3.48)$$

Na základě vztahů (3.40) a (3.41) se dostane

$$e^{AT} = \mathbf{I} + \frac{1}{1!} \mathbf{A}T + \frac{1}{2!} (\mathbf{A}T)^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\mathbf{A}T)^i, \quad (3.49a)$$

$$\int_0^T e^{Av} dv = T \left[\mathbf{I} + \frac{1}{2!} \mathbf{A}T + \frac{1}{3!} (\mathbf{A}T)^2 + \dots \right] = T \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)!} (\mathbf{A}T)^i. \quad (3.49b)$$

Nyní již můžeme stavovou rovnici diskretizovaného lineárního systému (3.37) zapsat ve tvaru

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{A}_D \mathbf{x}(kT) + \mathbf{b}_D u(kT), \quad (3.50a)$$

kde

$$\mathbf{A}_D = e^{AT} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\mathbf{A}T)^i, \quad (3.50b)$$

$$\mathbf{b}_D = \left(\int_0^T e^{Av} dv \right) \mathbf{b} = T \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)!} (\mathbf{A}T)^i \right] \mathbf{b}. \quad (3.50c)$$

Při výpočtu matice $\mathbf{A}_D$ a vektoru $\mathbf{b}_D$ je vhodné použít numerickou metodu. Nejdříve se určí matice

$$\mathbf{D} = T \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)!} (\mathbf{A}T)^i, \quad (3.51a)$$

a pak se vypočtou

$$\mathbf{A}_D = \mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{D}, \quad (3.51b)$$

$$\mathbf{b}_D = \mathbf{D}\mathbf{b}. \quad (3.51c)$$

Při diskretizaci výstupní rovnice se nemění, a proto diskretizovaný (diskrétní) lineární dynamický systém získaný ze spojitého lineárního dynamického systému (3.37) má tvar

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{A}_D \mathbf{x}(kT) + \mathbf{b}_D u(kT), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.52a)$$

$$y(kT) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(kT) + du(kT), \quad (3.52b)$$

kde matice systému (dynamiky) $\mathbf{A}_D$ a vektor vstupu $\mathbf{b}_D$ jsou dány vztahy (3.50b) a (3.50c) nebo (3.51).

Diskrétní stavový model (3.52) může být použit pro numerický výpočet odezvy.

Příklad 3.6

Spojité lineární dynamický systém je popsán stavovým modelem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t), & x_1(0) &= x_{10} = 1, \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) + u, & x_2(0) &= x_{20} = 2, \\ y(t) &= x_1(t). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Je třeba určit obecné vztahy pro výpočet odezvy na libovolný vstup a dále je třeba určit odezvu na jednotkový skok.

Řešení:

Pro lineární dynamický systém (3.53) lze psát

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = [1, 0], \quad d = 0.$$

Zkontrolujeme říditelnost a pozorovatelnost [viz vztahy (2.50) a (2.51)]

$$\mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = -2 \neq 0 \Rightarrow$$

lineární dynamický systém je říditelný.

$$\mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = 2 \Rightarrow$$

lineární dynamický systém je pozorovatelný.

Protože daný lineární dynamický systém je říditelný a pozorovatelný, stavový model (3.53) má minimální tvar.

Řešení v oblasti komplexní proměnné, tj. pomocí Laplaceovy transformace

Určíme obraz fundamentální matice [viz (3.45)]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{At}\} &= (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})}{\det(\mathbf{sI} - \mathbf{A})} = \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

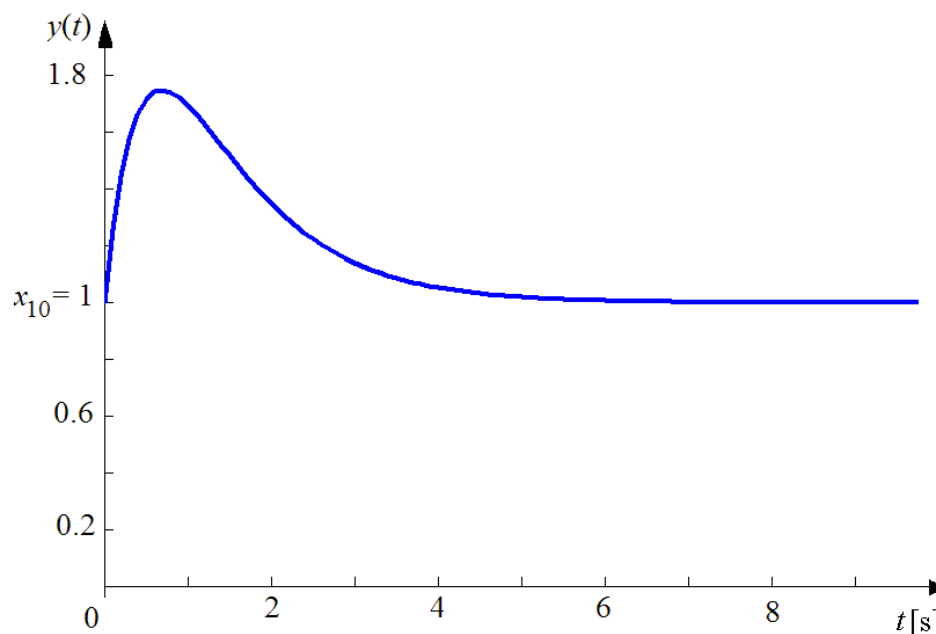
V souladu se vztahem (3.38) obraz odezvy je dán

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} [\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}U(s)] = \\
&= [1, 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s) \right\} \Rightarrow \\
Y(s) &= \left[\frac{1}{s+1}, \frac{2}{(s+1)(s+2)} \right] \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s) \right\} . \\
y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left[\frac{1}{s+1}, \frac{2}{(s+1)(s+2)} \right] \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s) \right) \right\} . \quad (3.55)
\end{aligned}$$

Pro $u(t) = \eta(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$ se dostane

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2 + 6s + 2}{s(s+1)(s+2)} \right\} = 1 + 3e^{-t} - 3e^{-2t} . \quad (3.56)$$

Průběh odezvy na jednotkový skok je na obr. 3.13.



Obr. 3.13 Odezva lineárního dynamického systému (3.53) na jednotkový skok – příklad 3.6

Řešení v časové oblasti

V souladu se vztahem (3.44) můžeme psát

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{e}^{A t} \left\{ \mathbf{x}_0 + \left[\int_0^t \mathbf{e}^{-A \tau} u(\tau) d\tau \right] \mathbf{b} \right\} . \quad (3.57)$$

Ze vztahu (3.54) určíme fundamentální matici

$$\mathbf{e}^{At} = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{-t} & 2\mathbf{e}^{-t} - 2\mathbf{e}^{-2t} \\ 0 & \mathbf{e}^{-2t} \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

Fundamentální matici (3.58) dosadíme do (3.57) a po úpravě dostaneme

$$\mathbf{y}(t) = [\mathbf{e}^{-t}, 2\mathbf{e}^{-t} - 2\mathbf{e}^{-2t}] \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \left(\int_0^t \begin{bmatrix} \mathbf{e}^\tau & 2\mathbf{e}^\tau - 2\mathbf{e}^{2\tau} \\ 0 & \mathbf{e}^{2\tau} \end{bmatrix} u(\tau) d\tau \right) \mathbf{b} \right\}. \quad (3.59)$$

Vidíme, že obecný vztah pro výpočet odezvy na libovolný vstup je v časové oblasti poměrně složitý.

Uvažujme nyní vstupní jednotkový skok $u(t) = \eta(t) = 1$ pro $t \geq 0$.

Nejdříve vypočteme výraz s integrálem

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbf{e}^{-A\tau} d\tau &= \int_0^t \begin{bmatrix} \mathbf{e}^\tau & 2\mathbf{e}^\tau - 2\mathbf{e}^{2\tau} \\ 0 & \mathbf{e}^{2\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^t - 1 & 2\mathbf{e}^t - \mathbf{e}^{2t} - 1 \\ 0 & \frac{1}{2}\mathbf{e}^{2t} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \\ \left[\int_0^t \mathbf{e}^{-A\tau} d\tau \right] \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}^t - 1 & 2\mathbf{e}^t - \mathbf{e}^{2t} - 1 \\ 0 & \frac{1}{2}\mathbf{e}^{2t} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{e}^t - \mathbf{e}^{2t} - 1 \\ \frac{1}{2}\mathbf{e}^{2t} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Po dosazení do (3.59) a úpravě se dostane

$$\mathbf{y}(t) = [\mathbf{e}^{-t}, 2\mathbf{e}^{-t} - 2\mathbf{e}^{-2t}] \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\mathbf{e}^t - \mathbf{e}^{2t} - 1 \\ \frac{1}{2}\mathbf{e}^{2t} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\} = 1 + 3\mathbf{e}^{-t} - 3\mathbf{e}^{-2t}.$$

Obdrželi jsme stejný výsledek jako v předchozím případě.

Diskretizace spojitého lineárního dynamického systému

Pro diskretizaci použijeme nejdříve analytické vztahy (3.50b) a (3.50c) a později numerické vztahy (3.51) pro $i = 0, 1, 2, 3$. Vzorkovací periodu volíme např. $T = 0,1$.

Na základě vztahů (3.50b) a (3.58) můžeme psát (uvažujeme 5 desetinných míst).

$$\mathbf{A}_D = \mathbf{e}^{AT} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{-T} & 2\mathbf{e}^{-T} - 2\mathbf{e}^{-2T} \\ 0 & \mathbf{e}^{-2T} \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 0,90484 & 0,17221 \\ 0 & 0,81873 \end{bmatrix}.$$

Podobně na základě vztahů (3.50c) a (3.58) dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_D &= \left[\int_0^T \mathbf{e}^{A\tau} d\tau \right] \mathbf{b} = \left\{ \int_0^T \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{-\tau} & 2\mathbf{e}^{-\tau} - 2\mathbf{e}^{-2\tau} \\ 0 & \mathbf{e}^{-2\tau} \end{bmatrix} d\tau \right\} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2\mathbf{e}^{-T} + \mathbf{e}^{-2T} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{e}^{-2T} \end{bmatrix} \doteq \\ &\doteq \begin{bmatrix} 0,00906 \\ 0,09063 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nyní použijeme vztahy (3.51) pro $i = 0, 1, 2, 3$:

$$\mathbf{D} = T \left[\mathbf{I} + \frac{1}{2!} \mathbf{A}T + \frac{1}{3!} (\mathbf{A}T)^2 + \frac{1}{4!} (\mathbf{A}T)^3 \right] \doteq \frac{1}{144} \begin{bmatrix} 13,7034 & 1,3044 \\ 0 & 13,0512 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_D = \mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0,90484 & 0,17221 \\ 0 & 0,81873 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_D = \mathbf{D}\mathbf{b} \doteq \begin{bmatrix} 0,00906 \\ 0,09063 \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že po zaokrouhlení jsme v obou případech dostali stejný výsledek.

4 STAVOVÉ ŘÍZENÍ

V kapitole je stručně popsán návrh stavového regulátoru a pozorovatele pro jednorozměrový lineární dynamický systém.

4.1 Stavový regulátor

Rozvoj stavového řízení je spjat s rozvojem letectví a kosmonautiky. Umožňuje řídit i nestabilní systémy, u kterých běžná regulace s regulátory 1DOF nebo 2DOF ani v rozvětvených strukturách nedává uspokojivé výsledky.

Uvažujme jednorozměrový řízený lineární dynamický systém (v metodách stavového prostoru se většinou používá pojem „řízený systém“ místo pojmu regulovaná soustava)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (4.1a)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t), \quad (4.1b)$$

který je říditelný, pozorovatelný [viz (2.50) a (2.51)] a silně fyzikálně realizovatelný ($d = 0$). Jeho charakteristický mnohočlen má tvar

$$\begin{aligned} N(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = \\ &= (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n), \end{aligned} \quad (4.2)$$

kde $s_1, s_2, \dots, s_n$ jsou póly daného systému.

Úkolem **stavového regulátoru** reprezentovaného vektorem (obr. 4.1)

$$\mathbf{k} = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T, \quad (4.3)$$

je zajistit u uzavřeného systému řízení charakteristický mnohočlen

$$\begin{aligned} N_{kw}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_w) &= s^n + a_{n-1}^w s^{n-1} + \dots + a_1^w s + a_0^w = \\ &= (s - s_1^w)(s - s_2^w) \dots (s - s_n^w) \end{aligned} \quad (4.4)$$

se zadanými póly $s_1^w, s_2^w, \dots, s_n^w$ (viz Příloha E).

Zpětnovazební řízení, které pomocí stavového regulátoru (4.3) zajistí charakteristický mnohočlen uzavřeného systému řízení (4.4) s požadovanými póly $s_1^w, s_2^w, \dots, s_n^w$ se často nazývá **modální řízení**. Jednotlivé póly s_i^w určují tzv. **módy**, tj. charakteristické (vlastní, volné) pohyby uzavřeného systému řízení.

Uzavřený systém řízení se zpětnovazebním stavovým regulátorem může být v souladu s obr. 4.1 popsán stavovým modelem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_w \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}w'(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (4.5a)$$

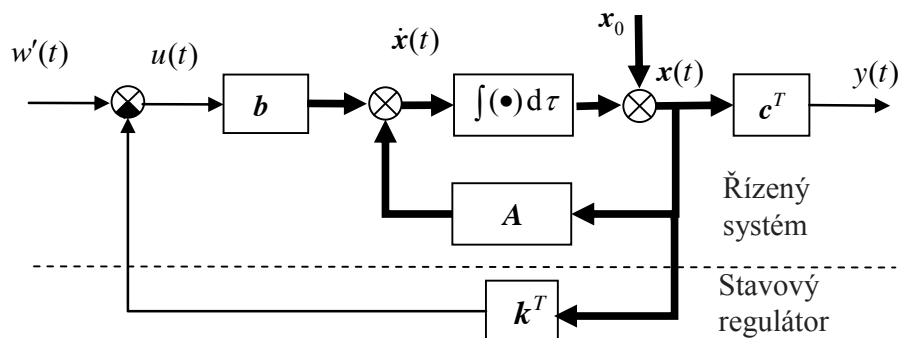
$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t), \quad (4.5b)$$

kde matice uzavřeného systému řízení je dána vztahem (viz obr. 4.1b)

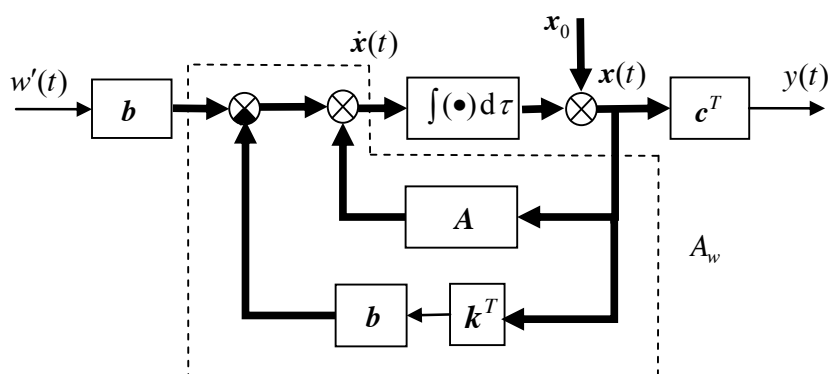
$$\mathbf{A}_w = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T. \quad (4.6)$$

Vektor k zpětnovazebního stavového regulátoru můžeme získat porovnáním koeficientů charakteristického mnohočlenu systému řízení $N_k(s) = \det[sI - (A - bk^T)]$ s odpovídajícími koeficienty požadovaného charakteristického mnohočlenu systému řízení $N_{kw}(s) = \det(sI - A_w)$ u stejných mocnin komplexní proměnné s . Získá se tak n lineárních rovnic pro n neznámých složek k_i vektoru k . Při velkém n je tento postup náročný.

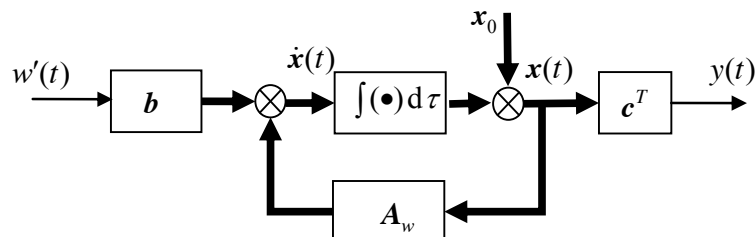
a)



b)



c)



Obr. 4.1 Blokové schéma systému řízení se stavovým regulátorem bez vstupní korekce:
a) původní, b) upravené, c) výsledné

Závislost mezi výstupem $y(t)$ a vstupem $w'(t)$ v ustáleném stavu ($t \rightarrow \infty$) můžeme určit na základě vztahu (2.53), tj.

$$y = \lim_{s \rightarrow 0} [c^T (sI - A_w)^{-1} b] w' \Rightarrow$$

$$y = -\mathbf{c}^T \mathbf{A}_w^{-1} \mathbf{b} w'. \quad (4.7)$$

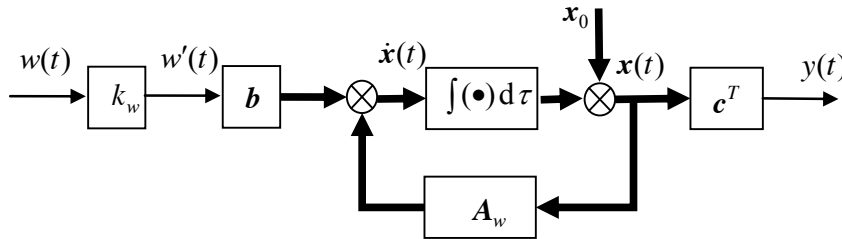
Aby v ustáleném stavu platilo

$$y = w \quad (4.8)$$

musíme do vstupu umístit korekci (obr. 4.2)

$$k_w = -\frac{1}{\mathbf{c}^T \mathbf{A}_w^{-1} \mathbf{b}}. \quad (4.9)$$

Návrh stavového regulátoru je snadný pro stavový model řízeného systému v kanonickém tvaru řízení (3.19).



Obr. 4.2 Blokové schéma systému řízení se stavovým regulátorem

Uvažujme, že matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}_w$ jsou transformovány na kanonické tvary řízení v souladu se vztahy (3.18) a (3.19), pak rovnici (4.6) můžeme zapsat pro kanonické tvary řízení

$$\mathbf{A}_{wc} = \mathbf{A}_c - \mathbf{b}_c \mathbf{k}_c^T. \quad (4.10a)$$

tj.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0^w & -a_1^w & -a_2^w & \dots & -a_{n-1}^w \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_{c1}, k_{c2}, \dots, k_{cn}]. \end{aligned} \quad (4.10b)$$

Vidíme, že platí rovnosti

$$\begin{aligned} -a_{i-1}^w &= -a_{i-1} - k_{ci} \Rightarrow \\ k_{ci} &= a_{i-1}^w - a_{i-1} \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Poslední vztah můžeme zapsat vektorově

$$\mathbf{k}_c = \mathbf{a}^w - \mathbf{a}, \quad (4.12)$$

kde

$$\mathbf{a}^w = [a_0^w, a_1^w, \dots, a_{n-1}^w]^T, \quad (4.13a)$$

$$\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]^T \quad (4.13b)$$

jsou vektory koeficientů charakteristických mnohočlenů $N_w(s)$ a $N(s)$ [viz (4.4) a (4.2)].

Obdrželi jsme vektor zpětnovazebního stavového regulátoru $\mathbf{k}_c$ v kanonickém tvaru řízení, a proto ho musíme transformovat pro původní řízený systém (4.1). Můžeme psát

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k}_c^T \mathbf{x}_c &= \mathbf{k}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c &= \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{k}^T = \mathbf{k}_c^T \mathbf{T}_c^{-1} \Rightarrow$$

$$\mathbf{k}^T = (\mathbf{a}^w - \mathbf{a})^T \mathbf{T}_c^{-1}, \quad (4.14)$$

kde transformační matice $\mathbf{T}_c$ je dána vztahy [viz (3.18)]

$$\mathbf{T}_c = \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c), \quad (4.15a)$$

$$\mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}], \quad (4.15b)$$

$$\mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.15c)$$

Vztah (4.14) se někdy nazývá **Bassův-Gurův** (Bass-Gura formula).

Pro přímý výpočet zpětnovazebního vektoru $\mathbf{k}^T$ se také často používá **Ackermannův vztah** (Ackermann's formula) (viz příloha D)

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^T &= [0, 0, \dots, 0, 1] \mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) N_{kw}(\mathbf{A}) = \\ &= [0, 0, \dots, 0, 1] \mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) [\mathbf{A}^n + a_{n-1}^w \mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_1^w \mathbf{A} + a_0^w \mathbf{I}]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Postup:

1. Zkontrolovat říditelnost a pozorovatelnost řízeného systému [vztahy (2.50) a (2.51)].
2. Formulovat požadavky na kvalitu řízení a vyjádřit ji požadovaným rozložením pólů systémů řízení (viz Příloha E).
3. Určit koeficienty charakteristických mnohočlenů $N(s)$ a $N_{kw}(s)$ [vztahy (4.2) a (4.4)].
4. Porovnat koeficienty charakteristického mnohočlenu systému řízení $N_k(s) = \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)]$ s odpovídajícími koeficienty požadovaného charakteristického mnohočlenu systému řízení $N_{kw}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_w)$ u stejných mocnin komplexní proměnné s a řešit soustavu n lineárních rovnic pro n neznámých složek vektoru $\mathbf{k}$. V případě vysokého n použít transformační matici

(4.15) a vztah (4.14) nebo Ackermannův vztah (4.16).

5. Na základě vztahu (4.9) určit vstupní korekci k_w .
6. Simulačně ověřit obdrženou kvalitu řízení.

Příklad 4.1

Pro řízený lineární dynamický systém se stavovým modelem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - u, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 + u, \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{4.17}$$

je třeba navrhnout stavové řízení, které zajistí u uzavřeného systému řízení póly

$$s_1^w = s_2^w = -1.$$

Řešení:

Pro řízený lineární dynamický systém (4.17) platí

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = [1, 0], \quad d = 0.$$

Nejdříve zkontrolujeme na základě vztahů (2.50) a (2.51) říditelnost a pozorovatelnost.

$$\mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = -2 \neq 0 \Rightarrow$$

Řízený lineární dynamický systém (4.17) je říditelný.

$$\mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

Řízený lineární dynamický systém (4.17) je pozorovatelný.

Protože daný řízený lineární dynamický systém je říditelný a pozorovatelný, můžeme určit na základě např. vztahu (2.54) jeho přenos

$$\begin{aligned}\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} s+1 & -1 \\ -1 & s-1 \end{vmatrix} = s^2 - 2, \\ \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{c}^T) &= \begin{vmatrix} s+1 & -1 \\ -1 & s-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = s^2 - s, \\ G_{uy}(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{c}^T) - \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \frac{-s + 2}{s^2 - 2}.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Řízený lineární dynamický systém popsaný stavovým modelem (4.17) nebo přenosem (4.18) je nestabilní s póly $s_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ a navíc je neminimálněfázový s nestabilní nulou $s_1^0 = 2$. Použití konvenčního regulátoru a jeho seřízení je v tomto případě nejen velmi náročné, ale i nevhodné.

Koeficienty mnohočlenů ve jmenovateli a čitateli přenosu (4.18) jsou:

$$\begin{aligned} a_0 = -2, a_1 = 0 &\Rightarrow \mathbf{a} = [a_0, a_1]^T = [-2, 0]^T, \\ b_0 = 2, b_1 = -1. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Požadovaný charakteristický mnohočlen uzavřeného systému řízení (4.4) má tvar

$$\begin{aligned} N_{kw}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_w) &= s^2 + a_1^w s + a_0^w = (s - s_1^w)(s - s_2^w) = \\ &= s^2 + 2s + 1. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Koeficienty požadovaného charakteristického mnohočlenu $N_{kw}(s)$ jsou:

$$a_0^w = 1, a_1^w = 2 \Rightarrow \mathbf{a}^w = [a_0^w, a_1^w]^T = [1, 2]^T. \quad (4.21)$$

Metoda porovnání koeficientů

Na základě vztahu (4.6) určíme matici dynamiky uzavřeného systému řízení

$$\mathbf{A}_w = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1, k_2] = \begin{bmatrix} -1+k_1 & 1+k_2 \\ 1-k_1 & 1-k_2 \end{bmatrix}.$$

Charakteristický mnohočlen uzavřeného systému řízení je

$$\begin{aligned} N_k(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T) &= \begin{vmatrix} s+1-k_1 & -1-k_2 \\ -1+k_1 & s-1+k_2 \end{vmatrix} = \\ &= s^2 + (k_2 - k_1)s + 2k_1 - 2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

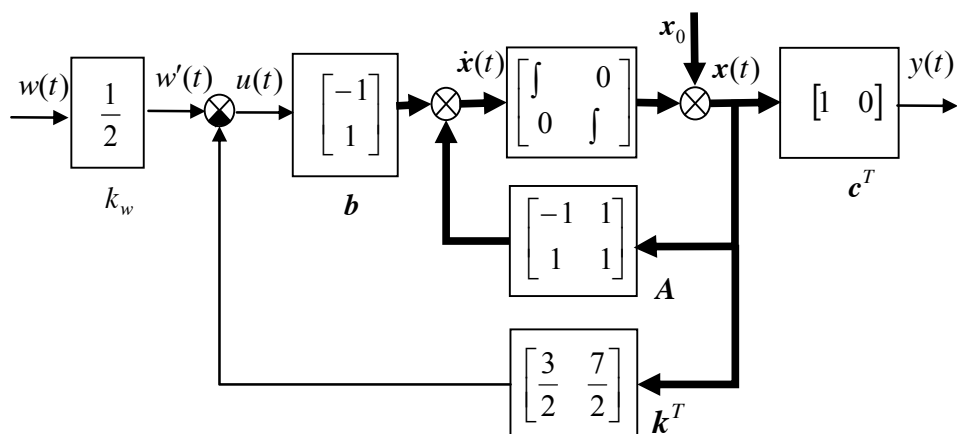
Nyní porovnáme koeficienty mnohočlenů (4.22) a (4.20), tj.

$$\left. \begin{aligned} k_2 - k_1 &= 2 \\ 2k_1 - 2 &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{3}{2} \\ k_2 &= \frac{7}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{k}^T = \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2} \right] \quad (4.23)$$

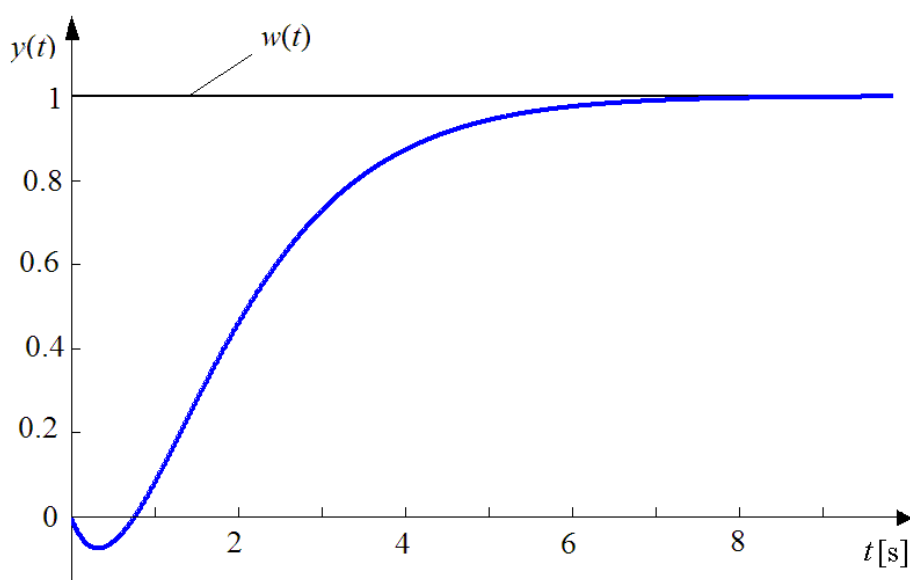
Pomocí vztahu (4.9) určíme ještě vstupní filtr (korekci).

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_w &= \begin{bmatrix} -1+k_1 & 1+k_2 \\ 1-k_1 & 1-k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_w^{-1} &= \frac{\text{adj } \mathbf{A}_w}{\det \mathbf{A}_w} = \frac{1}{-\frac{5}{4} + \frac{9}{4}} \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{9}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{9}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \\ \frac{1}{k_w} &= -\mathbf{c}^T \mathbf{A}_w^{-1} \mathbf{b} = -[1, 0] \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{9}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \Rightarrow k_w = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Blokové schéma systému řízení s navrženým stavovým regulátorem (4.23) je na obr. 4.3 a jeho odezva na jednotkový skok při nulových počátečních podmínkách ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$), tj. přechodová charakteristika, je na obr. 4.4. Počáteční podkmit je způsoben nestabilní nulou $s_1^0 = 2$ [viz (4.18)].



Obr. 4.3 Blokové schéma systému řízení se stavovým regulátorem – příklad 4.1



Obr. 4.4 Přejchodová charakteristika systému řízení – příklad 4.1

Metoda transformace

V souladu se vztahem (4.15) můžeme psát

$$T_c = Q_{co}(A, b)Q_{co}^{-1}(A_c, b_c) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_c^{-1} = \frac{\text{adj} T_c}{\det T_c} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nyní použijeme vztah (4.14) pro (4.19) a (4.21)

$$k^T = (a^w - a)^T T_c^{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}.$$

Obdrželi jsme stejný výsledek, viz (4.23).

Ackermannův vztah

Použijeme Ackermannův vztah (4.16) a dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^T &= [0 \quad 1] \mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) [\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + \mathbf{I}], \\ \mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b})}{\det \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b})} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Po dosazení a úpravě obdržíme stejný výsledek jako v obou předchozích případech, tj.

$$\mathbf{k}^T = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Je zřejmé, že pro vyšší řády je vhodné použít číslicový počítač.

Příklad 4.2

Pro jednorozměrový lineární dynamický řízený systém

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - 4x_3 + 2u, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + u, \\ \dot{x}_3 &= -4x_3 - 2u, \\ y &= -2x_1 + 4x_2 + x_3 \end{aligned}$$

je třeba navrhnout stavový regulátor, který zajistí u uzavřeného systému řízení póly

$$s_1^w = s_2^w = s_3^w = -2.$$

Řešení:

Je zřejmé, že pro řízený systém platí

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = [-2 \quad 4 \quad 1].$$

Ověření říditelnosti:

$$\mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -38 \\ 1 & 6 & -16 \\ -2 & 8 & -32 \end{bmatrix},$$

$$\det \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = -504 \neq 0 \Rightarrow \text{řízený systém je říditelný.}$$

Ověření pozorovatelnosti:

$$\mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 10 & -8 & -4 \\ -26 & 16 & -8 \end{bmatrix},$$

$\det \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = 432 \neq 0 \Rightarrow$ řízený systém je pozorovatelný.

Z přenosu řízeného systému

$$G_{uy}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{c}^T) - \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \frac{-2s^2 + 6s + 92}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}$$

vyplývá: $a_0 = 8, a_1 = 14, a_2 = 7, a_3 = 1, b_0 = 92, b_1 = 6, b_2 = -2$, tj.

$$\mathbf{a} = [8, 14, 7]^T, \mathbf{c}_c = [92, 6, -2]^T.$$

Požadovaný charakteristický mnohočlen systému řízení má tvar

$$N_{kw}(s) = (s + 2)^3 = s^3 + 6s^2 + 12s + 8,$$

a proto vektor jeho koeficientů je

$$\mathbf{a}^w = [8, 12, 6]^T.$$

Metoda transformace

Transformační matice (4.15) má tvar

$$\mathbf{T}_c = \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c) = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 20 & 2 \\ 40 & 13 & 1 \\ -4 & -6 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{126} & \frac{1}{18} & -\frac{1}{84} \\ \frac{19}{126} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{21} \\ -\frac{47}{126} & \frac{2}{9} & -\frac{16}{21} \end{bmatrix}.$$

Na základě vztahů (4.14) se dostane

$$\mathbf{k}^T = (\mathbf{a}^w - \mathbf{a})^T \mathbf{T}_c^{-1} = \left[\frac{1}{14}, 0, \frac{4}{7} \right].$$

Ackermannův vztah

Na základě Ackermannova vztahu (4.16) můžeme psát:

$$\mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -38 \\ 1 & 6 & -16 \\ -2 & 8 & -32 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{63} & \frac{2}{9} & -\frac{11}{42} \\ -\frac{8}{63} & \frac{5}{18} & \frac{1}{84} \\ -\frac{5}{126} & \frac{1}{18} & -\frac{1}{84} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 20 \\ -6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -84 \\ 14 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -64 \end{bmatrix},$$

$$N_{kw}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 + 6\mathbf{A}^2 + 12\mathbf{A} + 8\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -12 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}^T = [0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) N_{kw}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & 0 & \frac{4}{7} \end{bmatrix}.$$

Obdrželi jsme stejný výsledek.

Stavový model uzavřeného systému řízení bez vstupní korekce bude mít tvar

$$\mathbf{A}_w = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} -\frac{8}{7} & 0 & -\frac{36}{7} \\ \frac{27}{14} & -2 & -\frac{18}{7} \\ \frac{1}{7} & 0 & -\frac{20}{7} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = [2 \quad 1 \quad -2]^T, \quad \mathbf{c} = [-2 \quad 4 \quad 1]^T,$$

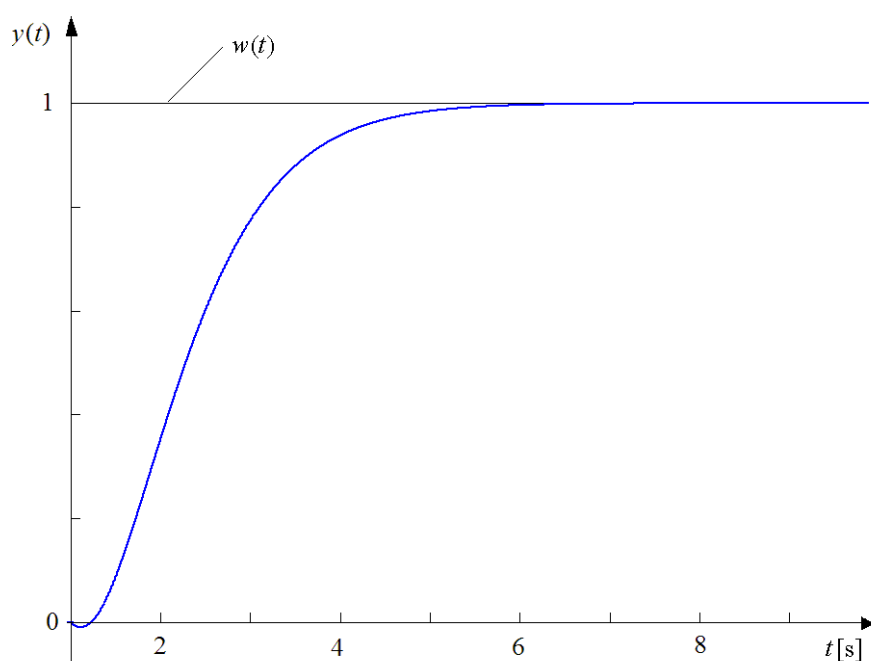
tj.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{8}{7}x_1 - \frac{36}{7}x_3 + 2w', \\ \dot{x}_2 &= \frac{27}{14}x_1 - 2x_2 - \frac{18}{7}x_3 + w', \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{7}x_1 - \frac{20}{7}x_3 - 2w', \\ y &= -2x_1 + 4x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Vstupní korekce je dána vztahem (4.9)

$$k_w = -\frac{1}{\mathbf{c}^T \mathbf{A}_w^{-1} \mathbf{b}} = \frac{2}{23}.$$

a odpovídající stavový model se vstupní korekcí



Obr. 4.5 Průběh přechodové charakteristiky systému řízení se stavovým regulátorem a vstupní korekcí – příklad 4.2

$$\dot{x}_1 = -\frac{8}{7}x_1 - \frac{36}{7}x_3 + \frac{4}{23}w,$$

$$\dot{x}_2 = \frac{27}{14}x_1 - 2x_2 - \frac{18}{7}x_3 + \frac{2}{23}w,$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{7}x_1 - \frac{20}{7}x_3 - \frac{4}{23}w,$$

$$y = -2x_1 + 4x_2 + x_3.$$

Přechodová charakteristika systému řízení se stavovým regulátorem a vstupní korekcí je na obr. 4.5. Počáteční podkmit je způsoben nestabilní nulou ($s_1^0 \doteq 8,446$).

4.2 Stavový pozorovatel

U reálných dynamických systémů často nelze stavové proměnné měřit, a to buď z důvodu jejich nedostupnosti, vysokých nákladů nebo velikého zašumění. V těchto případech je třeba použít **pozorovatel** (pozorovač, rekonstruktor, estimator) stavu.

Budeme se věnovat návrhu **Luenbergerova asymptotického pozorovatele plného řádu** (dále jen pozorovatele), tj. takového pozorovatele, u kterého se odhady stavových proměnných $\hat{x}(t)$ asymptoticky blíží ke skutečným stavovým proměnným $x(t)$.

Uvažujme jednorozměrový lineární dynamický systém (4.1), který je říditelný, pozorovatelný a silně fyzikálně realizovatelný s charakteristickým mnohočlenem (4.2).

Pro tento dynamický systém má Luenbergerův pozorovatel tvar (obr. 4.6)

$$\begin{aligned}\hat{\dot{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}_l \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}_l u(t) + \mathbf{l} y(t), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0, \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{c}_l^T \hat{\mathbf{x}}(t),\end{aligned}\tag{4.24}$$

kde $\mathbf{A}_l$ – čtvercová matice dynamiky pozorovatele řádu n $[(n \times n)]$, $\mathbf{b}_l$ – vektor vstupu pozorovatele dimenze n , $\mathbf{c}_l$ – vektor výstupu pozorovatele dimenze n , $\mathbf{l}$ – vektor **zesílení Luenbergerova pozorovatele** (korekce stavu pozorovatele) dimenze n , stříškou „ $\wedge$ “ jsou označeny asymptotické odhady odpovídajících proměnných.

Po zavedení vektoru odchylky stavu $\boldsymbol{\varepsilon}$ definovaného vztahem

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\tag{4.25}$$

a po uvažování (4.1) a (4.24) se dostane

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}_l \hat{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{b} - \mathbf{b}_l)u(t).\tag{4.26}$$

Je zřejmé, že vektor odchylek stavu $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ by neměl záviset na vstupní proměnné $u(t)$ a odhad $\hat{\mathbf{y}}(t)$ pro skutečný stav $\mathbf{x}(t)$ by měl být $\mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)$, a proto musí platit

$$\mathbf{b}_l = \mathbf{b}, \quad \mathbf{c}_l = \mathbf{c}.\tag{4.27}$$

Pokud se zvolí

$$\mathbf{A}_l = \mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T\tag{4.28}$$

a za předpokladu, že platí (4.27) obdrží se lineární diferenciální rovnice

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \mathbf{A}_l \boldsymbol{\varepsilon}(t), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0\tag{4.29}$$

popisující časový průběh vektoru odchylek stavu $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$. Počáteční odhad stavu $\hat{\mathbf{x}}_0$ se většinou předpokládá nulový.

Je zřejmé, že pro asymptotický odhad stavu $\hat{\mathbf{x}}(t)$ musí platit

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \hat{\mathbf{x}}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t) \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(t) \rightarrow \mathbf{0},\tag{4.30}$$

tj. lineární diferenciální rovnice (4.29) musí být asymptoticky stabilní.

Dále je zřejmé, že aby odhad stavu $\hat{\mathbf{x}}(t)$ byl i při změnách skutečného stavu $\mathbf{x}(t)$ dostatečně přesný a rychlý, dynamika pozorovatele (4.24) vyjádřena charakteristickými (vlastními) čísly matice $\mathbf{A}_l$ musí být rychlejší než dynamika pozorovaného systému (4.1), vyjádřena charakteristickými čísly matice $\mathbf{A}$. V případě stavového řízení dynamika pozorovatele musí být rychlejší než dynamika uzavřeného systému řízení.

Charakteristický mnohočlen pozorovatele je dán vztahem

$$\begin{aligned}N_{lw}(s) &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_l) = \\ &= s^n + a_{n-1}^l s^{n-1} + \dots + a_1^l s + a_0^l = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n),\end{aligned}\tag{4.31}$$

$$\mathbf{a}^l = [a_0^l, a_1^l, \dots, a_{n-1}^l]^T,\tag{4.32}$$

kde p_i jsou charakteristická čísla matice $\mathbf{A}_l$, tj. póly pozorovatele, $\mathbf{a}^l$ – vektor koeficientů charakteristického mnohočlenu pozorovatele.

Podobně charakteristický mnohočlen pozorovaného systému (4.1) je dán vztahem (4.2) a vektor $\mathbf{a}$ je dán jeho koeficienty (4.13b).

Asymptotická stabilita pozorovatele vyžaduje splnění podmínek

$$\operatorname{Re} p_i < 0 \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n \quad (4.33)$$

a dále, aby pozorovatel měl rychlejší dynamiku než pozorovaný systém, musí všechny jeho póly p_i ležet vlevo od všech pólů s_i pozorovaného systému, tj.

$$\min_{1 \leq i \leq n} |\operatorname{Re} p_i| > \max_{1 \leq i \leq n} |\operatorname{Re} s_i|. \quad (4.34)$$

Konvergence $\hat{\mathbf{x}}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t)$ bude tím rychlejší, čím větší bude rezerva v nerovnosti (4.34). Často se uvádí desetinásobek, ale je třeba si uvědomit, že příliš velká rezerva v nerovnosti (4.34) vede na veliké hodnoty složek l_i vektoru korekce stavu $\mathbf{l}$, a tedy k velikému zesilování šumů. Proto tato rezerva se volí dvojnásobná až pětinasobná (neplatí pro integrační systémy).

Póly pozorovatele se nejčastěji volí násobné reálné

$$p_i = -p, \quad p > 0, \quad (4.35)$$

a proto podmínky (4.34) mohou být zapsány ve tvaru

$$p > \max_{1 \leq i \leq n} |\operatorname{Re} s_i|. \quad (4.36)$$

V tom případě charakteristický mnohočlen pozorovatele v souladu s binomickou větou má tvar

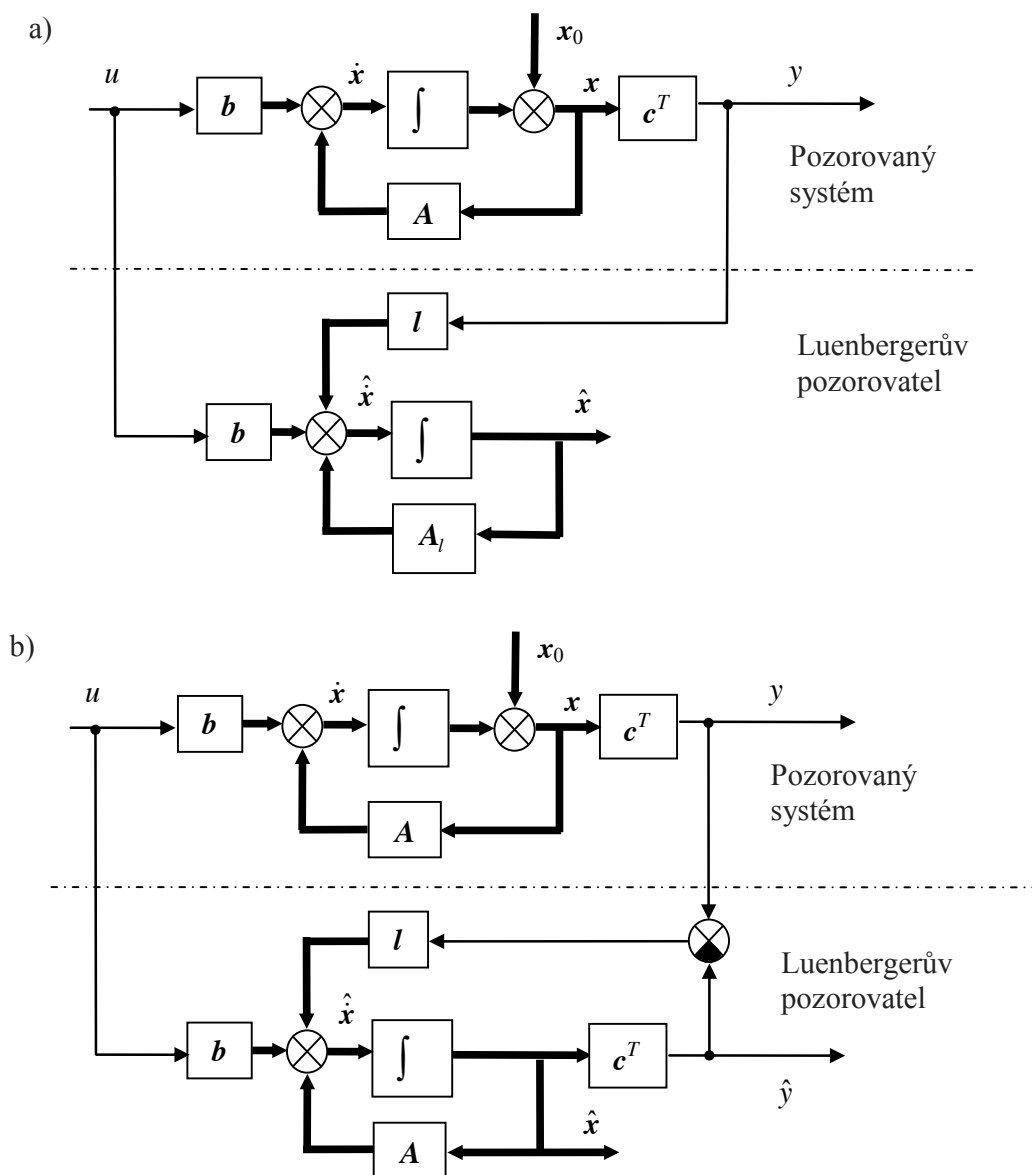
$$N_{lw}(s) = (s + p)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j s^{n-j} = s^n + np s^{n-1} + \dots + np^{n-1} s + p^n. \quad (4.37)$$

Použití násobných reálných pólů pozorovatele zaručuje konvergenci (4.30) s relativním tlumením 1. Velmi vhodná, pokud je to možné, je volba násobných dvojic

$$-(1 \pm j)p \quad (4.38)$$

která zaručuje konvergenci (4.30) s relativním tlumením $1/\sqrt{2} \doteq 0,707$. Tato volba zajistí rychlou konvergenci a navíc snížení hodnoty p . Dvojici odpovídá dílčí charakteristický mnohočlen

$$s^2 + 2ps + 2p^2. \quad (4.39)$$



Obr. 4.6 Blokové schéma Luenbergerova pozorovatele: a) původní, b) transformované

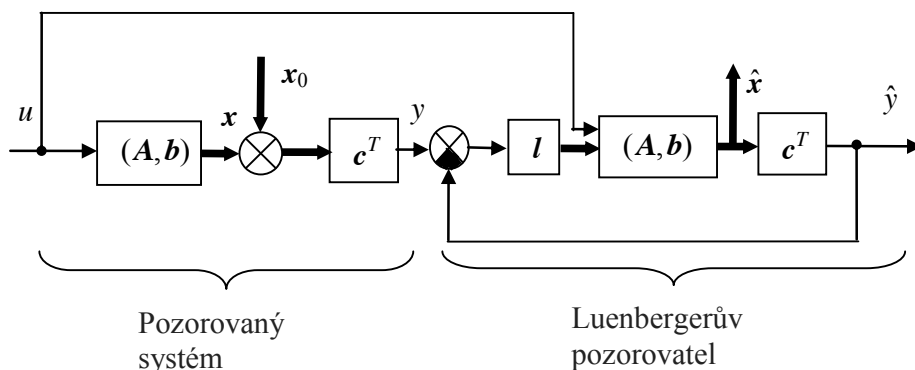
Schéma na obr. 4.6a může být transformováno na ekvivalentní schéma na obr. 4.6b, ze kterého vyplývá interpretace činnosti pozorovatele. Na základě rozdílu výstupních proměnných $y(t) - \hat{y}(t)$ je korigován odhad stavu $\hat{\mathbf{x}}(t)$. Je zřejmé, že Luenbergerův pozorovatel je vlastně modelem pozorovaného systému s průběžnou zpětnovazební korekcí

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{l}[y(t) - \hat{y}(t)]. \quad (4.40)$$

Je to v podstatě regulační obvod, který se snaží anulovat rozdíl $y(t) - \hat{y}(t)$, a tím také vektor odchylky stavu $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$. Názorně to ukazuje obr. 4.7. Vektor $\mathbf{l}$ je proto také zároveň vektorem zesílení pozorovatele.

Při návrhu pozorovatele v souladu se vztahy (4.24) a (4.27) je třeba určit neznámý vektor korekce stavu $\mathbf{l}$. Lze ho např. určit porovnáním koeficientů charakteristického

mnohočlenu pozorovatele $N_l(s) = \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)]$ s odpovídajícími koeficienty požadovaného charakteristického mnohočlenu pozorovatele $N_{lv}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_l)$ u stejných mocnin komplexní proměnné s . Získá se tak n rovnic lineárních vzhledem k neznámým n složkám $\mathbf{l}_i$ vektoru korekce stavu $\mathbf{l}$. Při velkém n je tento postup náročný.



Obr. 4.7 Interpretace Luenbergerova pozorovatele

Úlohu návrhu pozorovatele lze řešit snadno, má-li model pozorovaného pod systému (4.1) kanonický tvar pozorování (3.25)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_o(t) &= \mathbf{A}_o \mathbf{x}_o(t) + \mathbf{b}_o u(t), \\ y(t) &= \mathbf{c}_o^T \mathbf{x}_o(t),\end{aligned}\tag{4.41a}$$

kde

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix},\tag{4.41b}$$

$$\mathbf{b}_o = [b_0, b_1, \dots, b_{n-2}, b_{n-1}]^T,\tag{4.41c}$$

$$\mathbf{c}_o^T = [0, 0, \dots, 0, 1].\tag{4.41d}$$

Kanonický tvar pozorování lze tedy získat přímo ze znalosti přenosu (3.22) nebo také pomocí transformace (3.24)

$$\mathbf{x}_o(t) = \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{A}_o = \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_o, \quad \mathbf{b}_o = \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{b}, \quad \mathbf{c}_o^T = \mathbf{c}^T \mathbf{T}_o,\tag{4.42}$$

kde regulární čtvercová transformační matice řádu n $[(n \times n)]$

$$\mathbf{T}_o^{-1} = \mathbf{Q}_{ob}^{-1}(\mathbf{A}_o, \mathbf{c}_o^T) \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T)\tag{4.43}$$

je dána maticí pozorovatelnosti pozorovaného pod systému (4.1), tj. (2.51) a matice $\mathbf{Q}_{ob}^{-1}(\mathbf{A}_o, \mathbf{c}_o^T)$ je dána vztahem (3.24b).

Je zřejmé, že z důvodu duality (3.28) platí

$$\mathbf{Q}_{ob}^{-1}(\mathbf{A}_o, \mathbf{c}_o^T) = \mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c). \quad (4.44)$$

Pozorovatel (4.24) pro (4.27) může být vyjádřen rovněž v kanonickém tvaru pozorování

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_o(t) &= \mathbf{A}_{lo} \hat{\mathbf{x}}_o(t) + \mathbf{b}_o u + \mathbf{l}_o y(t), \\ \hat{y}(t) &= \mathbf{c}_o^T \hat{\mathbf{x}}_o(t), \end{aligned} \quad (4.45a)$$

kde

$$\mathbf{A}_{lo} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0^l \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1^l \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2^l \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2}^l \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1}^l \end{bmatrix} \quad (4.45b)$$

je čtvercová matice dynamiky pozorovatele řádu n , v jejímž posledním sloupci vystupují záporné koeficienty charakteristického mnohočlenu pozorovatele (4.31).

Bloková schémata pro kanonické tvary pozorování jsou stejná jako na obr. 4.6, s tím, že je třeba u všech vektorů a matic uvažovat index „o“.

V souladu se vztahem (4.28) lze psát

$$\mathbf{A}_{lo} = \mathbf{A}_o - \mathbf{l}_o \mathbf{c}_o^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 - l_{o1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 - l_{o2} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 - l_{o3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} - l_{o,n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} - l_{on} \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Ze srovnání vztahů (4.45b) a (4.46) vyplývá

$$l_{oi} = a_{i-1}^l - a_{i-1} \quad \text{pro } i=1,2,\dots,n,$$

tj. v souladu s (4.32) a (4.13b)

$$\mathbf{l}_o = \mathbf{a}^l - \mathbf{a}, \quad (4.47)$$

kde $\mathbf{l}_o$ je vektor korekce stavu pro pozorovatel v kanonickém tvaru pozorování.

Protože platí (4.42), lze psát

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_o y &= \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{l} y \Rightarrow \\ \mathbf{l} &= \mathbf{T}_o \mathbf{l}_o = \mathbf{T}_o (\mathbf{a}^l - \mathbf{a}). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Z porovnání charakteristického mnohočlenu uzavřeného systému (4.4) [viz též (4.6)]

$$N_{kw}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_w) = \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)]$$

s charakteristickým mnohočlenem Luenbergerova pozorovatele (4.31) [viz též (4.28)]

$$N_l(s) = \det(sI - A_l) = \det[sI - (A - lc^T)] = \det[sI - (A^T - cl^T)]$$

vyplývá, že pro určení Luenbergerova vektoru zesílení l můžeme rovněž použít Ackermannův vztah [viz též (4.16)]

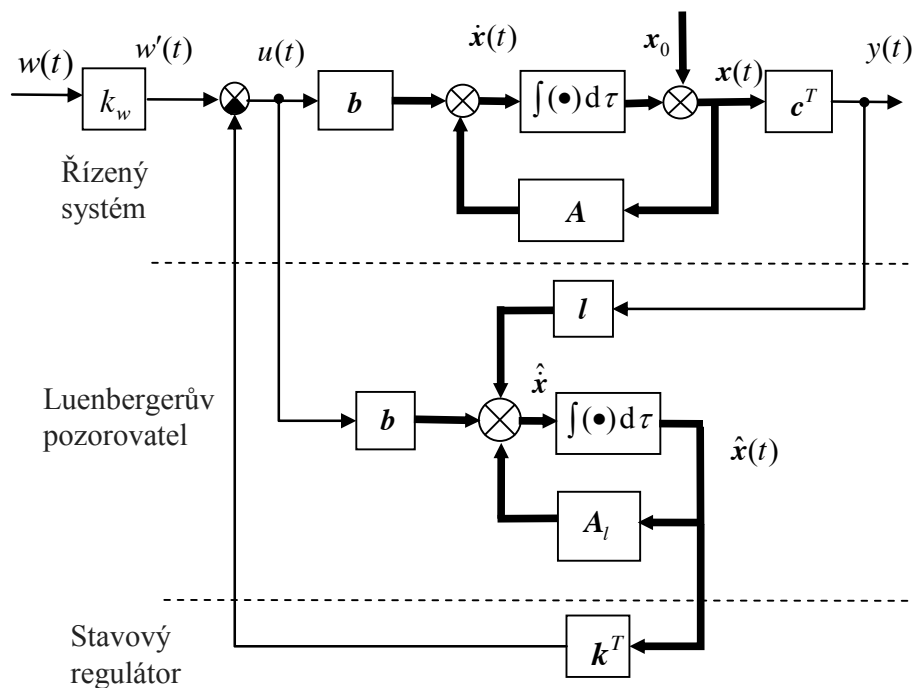
$$\begin{aligned} l^T &= [0, 0, \dots, 0, 1][c, A^T c, \dots, (A^T)^{n-1} c]^{-1} N_{lw}(A) = \\ &= [0, 0, \dots, 0, 1][c, A^T c, \dots, (A^T)^{n-1} c]^{-1} [A^n + a_{n-1}^l A^{n-1} + \dots + a_1^l A + a_0^l I]. \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} l &= N_{lw}(A) Q_{ob}^{-1}(A, c^T) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= [A^n + a_{n-1}^l A^{n-1} + \dots + a_1^l A + a_0^l I] Q_{ob}^{-1}(A, c^T) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Uvažujme nyní, že stavový regulátor využívá pro řízení odhad stavu $\hat{x}(t)$ (obr. 4.8), tj.

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) - bk^T \hat{x}(t).$$



Obr. 4.8 Blokové schéma systému řízení se stavovým regulátorem a Luenbergerovým pozorovatelem

Protože platí

$$-bk^T \hat{x}(t) = -bk^T x(t) + bk^T \varepsilon(t),$$

můžeme stavovou rovnici systému řízení se stavovým regulátorem a Luenbergerovým pozorovatelem zapsat ve tvaru [viz (4.6)]

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_w x(t) + bk^T \varepsilon(t), \\ \dot{\varepsilon}(t) &= A_l \varepsilon(t),\end{aligned}\tag{4.50a}$$

resp.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\varepsilon}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_w & bk^T \\ \mathbf{0} & A_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix}.\tag{4.50b}$$

Je to horní trojúhelníková bloková matice, jejíž charakteristický mnohočlen je dán vztahem

$$N_k(s)N_l(s) = \det(sI - A_w) \det(sI - A_l).\tag{4.51}$$

Znamená to, že dynamické vlastnosti systému řízení se stavovým regulátorem a Luenbergerovým pozorovatelem jsou vzájemně nezávislé.

Je to tzv. princip separability.

Je to velmi důležité, protože stavový pozorovatel a stavový regulátor můžeme navrhnout nezávisle na sobě. Tzn., že můžeme navrhnout stavový regulátor, který zajistí požadovanou kvalitu řízení, a zvlášť můžeme navrhnout stavový pozorovatel, který zajistí pro stavový regulátor správné odhady stavových proměnných. Dobře navržený stavový pozorovatel zhorší výslednou dynamiku systému řízení se stavovým regulátorem neznatelně.

Postup:

1. Zkontrolovat říditelnost a pozorovatelnost řízeného systému [vztahy (2.50) a (2.51)].
2. Určit koeficienty charakteristických mnohočlenů $N(s)$ a $N_{lw}(s)$ [vztahy (4.2) a (4.31)].
3. Na základě pólu řízeného systému s největší absolutní reálnou částí určit násobný pól (4.36), resp. násobnou dvojici pólů (4.38) tak, aby byla zajištěna dostatečně rychlá dynamika pozorovatele.
4. Porovnat koeficienty charakteristického mnohočlenu pozorovatele $N_l(s) = \det[sI - (A - lc^T)]$ s odpovídajícími koeficienty požadovaného charakteristického mnohočlenu pozorovatele $N_{lw}(s) = \det(sI - A_l)$ u stejných mocnin komplexní proměnné s . Získá se tak n rovnic lineárních vzhledem k neznámým n složkám l_i vektoru korekce stavu l . V případě vysokého n použít transformační matici (4.43) a vztah (4.48) nebo Ackermannův vztah (4.49).
5. Simulačně ověřit obdrženou kvalitu odhadu stavových proměnných.

Příklad 4.3

Pro stavové řízení z příkladu 4.1 je třeba navrhnout Luenbergerův pozorovatel.

Řešení:

Póly řízeného lineárního dynamického systému (4.17) jsou $s_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, a proto v souladu s podmínkami (4.34) – (4.36) volíme, např.

$$p = 4 \Rightarrow p_1 = p_2 = -4.$$

Charakteristický mnohočlen pozorovatele pak bude

$$N_{lw}(s) = (s + p)^2 = s^2 + 8s + 16 \Rightarrow$$

$$a_0^l = 16, a_1^l = 8 \Rightarrow \mathbf{a}^l = [16 \ 8]^T.$$

Metoda porovnání koeficientů

Matice dynamiky pozorovatele je dána vztahem (4.28)

$$\mathbf{A}_l = \mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-l_1 & 1 \\ 1-l_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nyní můžeme vypočíst charakteristický mnohočlen pozorovatele (4.31)

$$N_l(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_l) = \begin{vmatrix} s+1+l_1 & -1 \\ -1+l_2 & s-1 \end{vmatrix} = s^2 + l_1s - 2 - l_1 + l_2.$$

Porovnáme koeficienty u obou charakteristických mnohočlenů $N_l(s)$ a $N_{lw}(s)$, tj.

$$\left. \begin{array}{l} l_1 = 8 \\ -2 - l_1 + l_2 = 16 \Rightarrow l_2 = 26 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{l} = \begin{bmatrix} 8 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

Metoda transformace

Využijeme vztah (4.48) pro $\mathbf{a}^l = [16 \ 8]^T$ a $\mathbf{a} = [-2 \ 0]^T$:

$$\mathbf{T}_o^{-1} = \mathbf{Q}_{ob}^{-1}(\mathbf{A}_o, \mathbf{c}_o^T) \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_o = \frac{\text{adj} \mathbf{T}_o^{-1}}{\det \mathbf{T}_o^{-1}} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{T}_o(\mathbf{a}^l - \mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 8 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

Obdrželi jsme stejný výsledek.

Ackermannův vztah

V souladu s (4.49) můžeme psát:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{ob}^{-1}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = \frac{\text{adj} \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T)}{\det \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T)} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

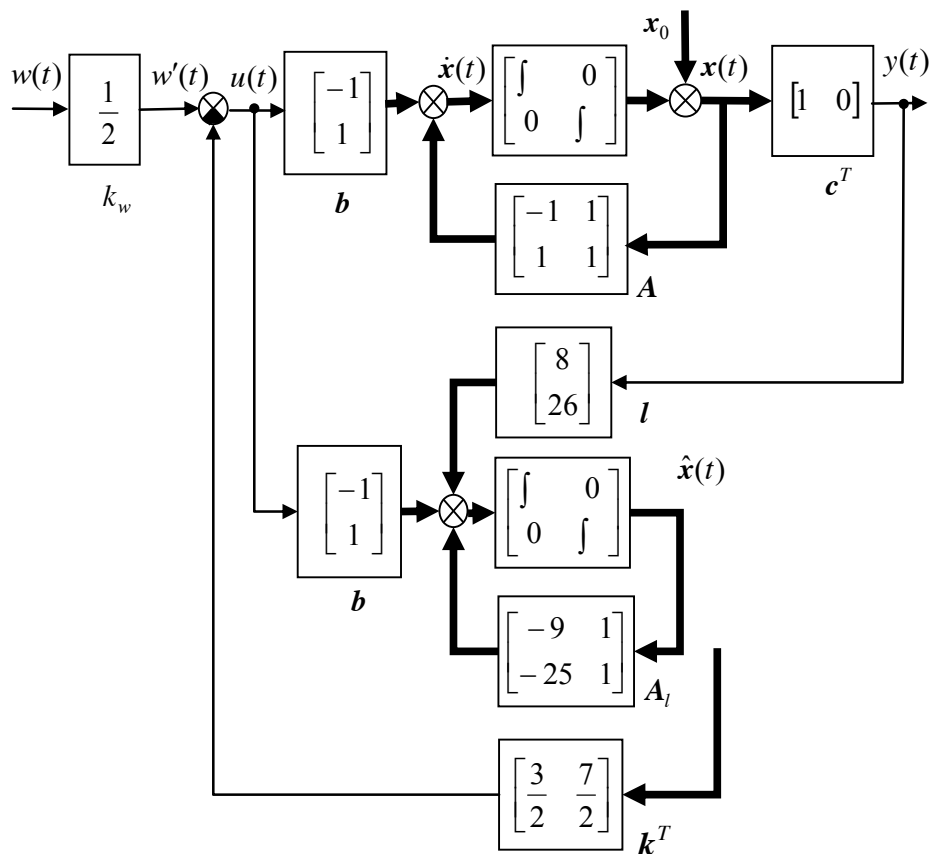
$$\begin{aligned}
 l &= [A^2 + a_1^l A + a_0^l I] Q_{ob}^{-1}(A, c^T) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 16 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 26 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Podle očekávání jsme obdrželi stejný výsledek jako v předchozích dvou případech.

Matice dynamiky pozorovatele pro vypočtený vektor zesílení l je

$$A_l = \begin{bmatrix} -1-l_1 & 1 \\ 1-l_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -25 & 1 \end{bmatrix}.$$

Blokové schéma systému řízení se stavovým regulátorem a Luenbergerovým pozorovatelem je na obr. 4.9.



Obr. 4.9 Blokové schéma systému řízení se stavovým regulátorem a Luenbergerovým pozorovatelem – příklad 4.3

Přechodová charakteristika ($x_0 = \mathbf{0}$) systému řízení se stavovým regulátorem a Luenbergerovým pozorovatelem je stejná jako bez pozorovatele (viz obr. 4.4).

Příklad 4.4

Pro systém řízení se stavovým regulátorem z příkladu 4.2 je třeba navrhnout Luenbergerův stavový pozorovatel.

Řešení:

V příkladě 4.2 bylo ukázáno, že daný řízený systém je říditelný a pozorovatelný a že jeho charakteristický mnohočlen má tvar

$$N(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^3 + 7s^2 + 14s + 8 = (s+1)(s+2)(s+4),$$

kde

$$s_1 = -1, \quad s_2 = -2, \quad s_3 = -4$$

jsou póly podsystemu a

$$a_0 = 8, \quad a_1 = 14, \quad a_2 = 7 \Rightarrow \mathbf{a} = [8, 14, 7]^T$$

koeficienty jeho charakteristického mnohočlenu, resp. vektor těchto koeficientů.

Protože

$$\max_{1 \leq i \leq 3} |s_i| = 4$$

je možné zvolit

$$p_1 = p_2 = p_3 = -p = -8$$

tj. požadovaný charakteristický mnohočlen pozorovatele je

$$N_{lw}(s) = (s + p)^3 = (s + 8)^3 = s^3 + 24s^2 + 192s + 512 \Rightarrow$$

$$a_0^l = 512, \quad a_1^l = 192, \quad a_2^l = 24 \Rightarrow \mathbf{a}^l = [512, 192, 24]^T.$$

Metoda porovnání koeficientů

Matice dynamiky pozorovatele je

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_l = \mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2l_1 - 1 & -4l_1 & -l_1 - 4 \\ 2l_2 + 2 & -4l_2 - 2 & -l_2 - 2 \\ 2l_3 & -4l_3 & -l_3 - 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Po nepříjemných a zdlouhavých úpravách lze určit charakteristický mnohočlen pozorovatele

$$\begin{aligned} N_l(s) &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_l) = \\ &= s^3 + (-2l_1 + 4l_2 + l_3 + 7)s^2 + (-4l_1 + 20l_2 + 3l_3 + 14)s + 16l_1 + 16l_2 - 22l_3 + 8. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin komplexní proměnné s obou charakteristických mnohočlenů pozorovatele $N_l(s)$ a $N_{lw}(s)$ se dostane soustava

algebraických rovnic lineárních vzhledem k neznámým složkám l_1 , l_2 a l_3 vektoru korekce pozorovatele $\mathbf{l}$, tj.

$$\left. \begin{aligned} 16l_1 + 16l_2 - 22l_3 &= 504 \\ -4l_1 + 20l_2 + 3l_3 &= 178 \\ -2l_1 + 4l_2 + l_3 &= 17 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} l_1 &= \frac{773}{54}, \\ l_2 &= \frac{332}{27}, \\ l_3 &= -\frac{32}{9}. \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{l} = \begin{bmatrix} \frac{773}{54} \\ \frac{332}{27} \\ -\frac{32}{9} \end{bmatrix}.$$

Řešení pomocí transformace

V souladu s (4.43) a (4.44) se dostane

$$\mathbf{Q}_{ob}^{-1}(\mathbf{A}_o, \mathbf{c}_o^T) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nyní může být určena transformační matice

$$\mathbf{T}_o^{-1} = \mathbf{Q}_{ob}^{-1}(\mathbf{A}_o, \mathbf{c}_o^T) \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = \begin{bmatrix} 16 & 16 & -22 \\ -4 & 20 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{T}_o = \begin{bmatrix} -\frac{1}{54} & \frac{13}{54} & -\frac{61}{54} \\ \frac{1}{216} & \frac{7}{108} & -\frac{5}{54} \\ -\frac{1}{18} & \frac{2}{9} & -\frac{8}{9} \end{bmatrix}.$$

Po dosazení do vztahu na vektor korekce stavu pozorovatele $\mathbf{l}$ se obdrží stejný výsledek, jako minule

$$\mathbf{l} = \mathbf{T}_o(\mathbf{a}^l - \mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{773}{54} \\ \frac{332}{27} \\ -\frac{32}{9} \end{bmatrix}.$$

Ackermannův vztah

Použijeme Ackermannův vztah (4.49) a dílčí výsledky z příkladu 4.2:

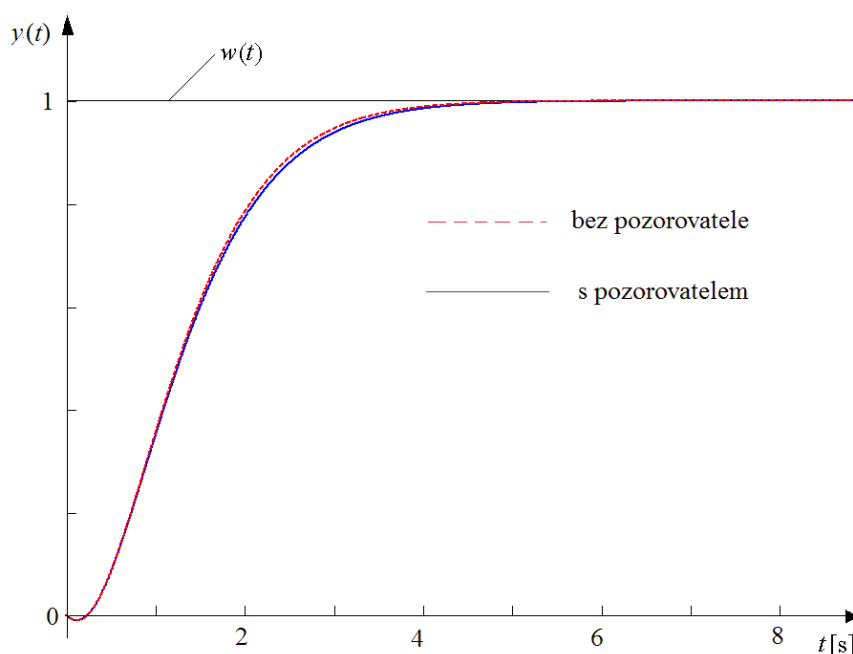
$$\mathbf{N}_{lw}(\mathbf{A}) = [\mathbf{A}^3 + 24\mathbf{A}^2 + 192\mathbf{A} + 512\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 343 & 0 & -1108 \\ 254 & 216 & -704 \\ 0 & 0 & 1728 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{ob}^{-1}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 10 & -8 & -4 \\ -26 & 16 & -8 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{27} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{54} \\ \frac{23}{54} & \frac{7}{72} & \frac{1}{216} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{18} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{N}_{lw}(\mathbf{A})\mathbf{Q}_{ob}^{-1}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{773}{54} \\ \frac{332}{27} \\ -\frac{32}{9} \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že ve všech třech případech jsme obdrželi stejné výsledky.

Přechodová charakteristika systému řízení se stavovým regulátorem a s Luenbergerovým pozorovatelem a bez Luenbergerova pozorovatele je na obr. 4.10, ze kterého je zřejmé, že navržený pozorovatel pracuje správně.



Obr. 4.10 Vliv stavového pozorovatele na průběh přechodové charakteristiky systému se stavovým regulátorem – příklad 4.4

4.3 Integrovní stavové řízení

Stavový regulátor je schopen zajistit požadované umístění pólů systému řízení, to znamená, že je schopen zajistit jeho dynamické vlastnosti, ale nemůže odstranit škodlivý účinek poruchových veličin.

V případě existence poruch $\mathbf{v}(t)$, je stavový model regulované soustavy následující

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{F}\mathbf{v}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t),\end{aligned}\tag{4.52}$$

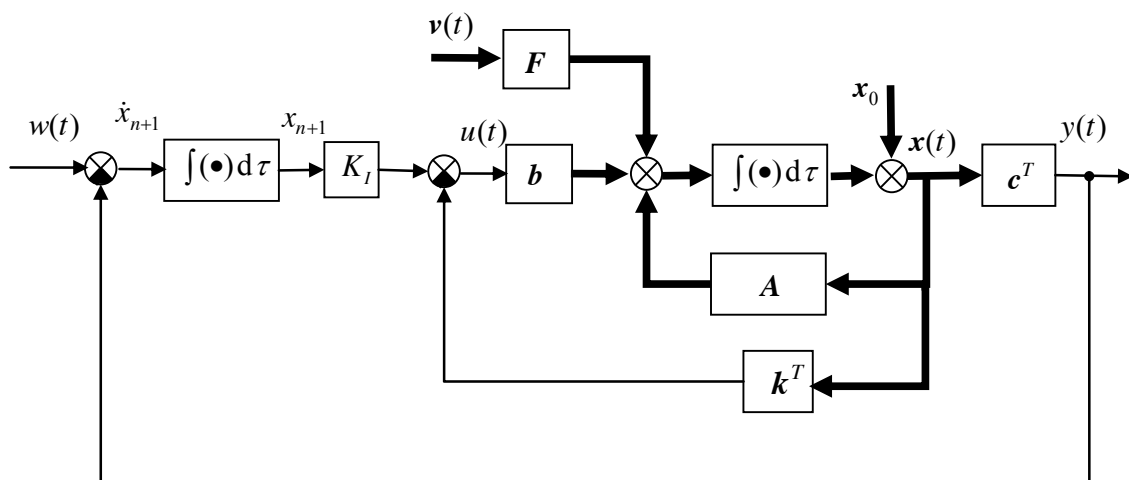
kde $\mathbf{v}(t)$ je vektor poruch dimenze p , $\mathbf{F}$ – poruchová matice dimenze $(n \times p)$.

Abychom odstranili poruchy $\mathbf{v}(t)$, přidáme další smyčku s I nebo PI regulátorem, viz obr. 4.11, kde K_I je váha integrační složky. Je zřejmé, že počet pólů je zvýšen o 1.

V souladu s obr. 4.11 a vztahy (4.52) systém integračního stavového řízení můžeme popsat stavovým modelem (závislost na čase nebudeme vyjadřovat)

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{x}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T & \mathbf{b}K_I \\ -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \mathbf{v}\tag{4.53a}$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix}.\tag{4.53b}$$



Obr. 4.11 Blokové schéma systému řízení se stavovým regulátorem a přidanou smyčkou s I regulátorem pro odstranění poruch

Abychom mohli využít výsledky předchozích podkapitol 4.1 a 4.2 matici dynamiky v (4.53a) rozepíšeme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T & \mathbf{b}K_I \\ -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_e} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{k}^T & -K_I \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}_e^T}\tag{4.54}$$

a dostaneme rozšířený stavový model řízeného systému

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_e &= \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e + \mathbf{b}_e u + \mathbf{F} \mathbf{v}, \\ y &= \mathbf{c}_e^T \mathbf{x}_e,\end{aligned}\tag{4.55a}$$

kde

$$\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_e^T = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (4.55b)$$

Rozšířený řízený systém má tu vlastnost, že když použijeme

$$u = \mathbf{k}_e^T \mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^T & -K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix}.$$

dostaneme rovnici (4.53a)

Charakteristický mnohočlen rozšířeného řízeného systému (4.55) je dán vztahem

$$\begin{aligned} N_e(s) &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_e) = s(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = \\ &= s^{n+1} + a_{en}s^n + \dots + a_{e1}s \Rightarrow \mathbf{a}_e = [0, a_{e1}, a_{e2}, \dots, a_{en}]^T \end{aligned} \quad (4.56)$$

a požadovaný charakteristický mnohočlen uzavřeného systému řízení je

$$\begin{aligned} N_{ew}(s) &= \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A}_e - \mathbf{b}_e \mathbf{k}_e^T)] = (s - s_1^w)(s - s_2^w) \dots (s - s_{n+1}^w) = \\ &= s^{n+1} + a_{en}^w s^n + \dots + a_{e1}^w s + a_{e0}^w \Rightarrow \mathbf{a}_e^w = [a_{e0}^w, a_{e1}^w, \dots, a_{en}^w]^T, \end{aligned} \quad (4.57)$$

kde

$$\mathbf{k}_e^T = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^T & -K_I \end{bmatrix}^T \quad (4.58)$$

je vektor zpětnovazebního stavového regulátoru a s_i^w jsou požadované póly uzavřeného systému řízení ($i = 1, 2, \dots, n + 1$).

Postup:

1. Zkontrolovat říditelnost a pozorovatelnost řízeného systému (4.52) [vztahy (2.50) a (2.51)].
2. Upravit výchozí stavový model řízeného systému (4.52) na rozšířený stavový model (4.55).
3. Formulovat požadavky na kvalitu řízení a vyjádřit je požadovaným rozložením pólů (tj. charakteristickým mnohočlenem) uzavřeného systému řízení pro rozšířený stavový model (4.55).
4. Určit koeficienty charakteristických mnohočlenů $N_e(s)$ a $N_{ew}(s)$ [vztahy (4.56) a (4.57)].
5. Libovolnou metodou z podkapitoly 4.1 určit rozšířený zpětnovazební vektor $\mathbf{k}_e^T$ (4.58).
6. Simulačně ověřit obdrženou kvalitu řízení.

Příklad 4.5

U stejnosměrného motoru s cizím konstantním buzením z příkladu 3.2

$$\begin{bmatrix} \frac{d\alpha(t)}{dt} \\ \frac{d\omega(t)}{dt} \\ \frac{di_a(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_m}{J_m} & \frac{c_m}{J_m} \\ 0 & -\frac{c_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \omega(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} u_a(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_m} \\ 0 \end{bmatrix} m_l(t)$$

je třeba navrhnout stavové řízení bez integrace a s integrací pro úhel natočení $\alpha(t)$ pro hodnoty parametrů: $J_m = 0,02 \text{ kg m}^2$, $b_m = 0,01 \text{ N m s rad}^{-1}$, $c_m = c_e = 0,05 \text{ N m A}^{-1} \text{ (V s rad}^{-1})$, $L_a = 0,2 \text{ H}$, $R_a = 1 \text{ } \Omega$. Při skokové změně požadovaného úhlu natočení $\alpha_w(t)$ je požadován průběh bez překmitu.

Řešení:

Protože úhel natočení $\alpha(t)$, úhlová rychlost $\omega(t)$ i proud kotvy $i_a(t)$ jsou poměrně dobře přímo měřitelné veličiny, pozorovatel nebude navrhován.

Pro větší přehlednost použijeme standardní označení

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \omega, \quad x_3 = i_a, \quad u = u_a, \quad v = m_l$$

a po dosazení číselných hodnot parametrů stejnosměrného motoru dostaneme jeho stavový model ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u + \mathbf{f}v, \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \end{aligned}$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,5 & 2,5 \\ 0 & -0,25 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ -50 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = [1 \quad 0 \quad 0].$$

Ověříme říditelnost a pozorovatelnost:

$$\mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 12,5 \\ 0 & 12,5 & -68,75 \\ 5 & -25 & 121,875 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = -781,25 \Rightarrow$$

Stejnosměrný motor je říditelný.

$$\mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,5 & 2,5 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = 2,5 \Rightarrow$$

Stejnosměrný motor je pozorovatelný.

Určíme charakteristický mnohočlen stejnosměrného motoru

$$N(s) = \det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+0,5 & -2,5 \\ 0 & 0,25 & s+5 \end{vmatrix} = s^3 + 5,5s^2 + 3,125s \Rightarrow$$

$$s_1 = 0, \quad s_2 \doteq -0,6435, \quad s_3 \doteq -4,8565,$$

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 3,125, \quad a_2 = 5,5 \Rightarrow \mathbf{a} = [0 \quad 3,125 \quad 5,5]^T.$$

Stavové řízení bez integrace

Vzhledem k požadavkům na průběh úhlu natočení $\alpha(t)$ bez překmitu, zvolíme násobný pól uzavřeného systému řízení $s_{1,2,3}^w = -5$ a dostaneme jeho požadovaný charakteristický mnohočlen

$$N_{kw}(s) = (s+5)^3 = s^3 + 15s^2 + 75s + 125 \Rightarrow$$

$$a_0^w = 125, \quad a_1^w = 75, \quad a_2^w = 15 \Rightarrow \mathbf{a}^w = [125 \quad 75 \quad 15]^T.$$

Pro návrh stavového řízení bez integrace použijeme např. vztah (4.14):

$$\mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,125 & 5,5 & 1 \\ 5,5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_c = \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c) = \begin{bmatrix} 12,5 & 0 & 0 \\ 0 & 12,5 & 0 \\ 0 & 2,5 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0,08 & 0 & 0 \\ 0 & 0,08 & 0 \\ 0 & -0,04 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

$$(\mathbf{a}^w - \mathbf{a})^T = [125 \quad 71,875 \quad 9,5],$$

$$\mathbf{k}^T = (\mathbf{a}^w - \mathbf{a})^T \mathbf{T}_c^{-1} = [10 \quad 5,37 \quad 1,9].$$

Určíme matici dynamiky uzavřeného systému řízení

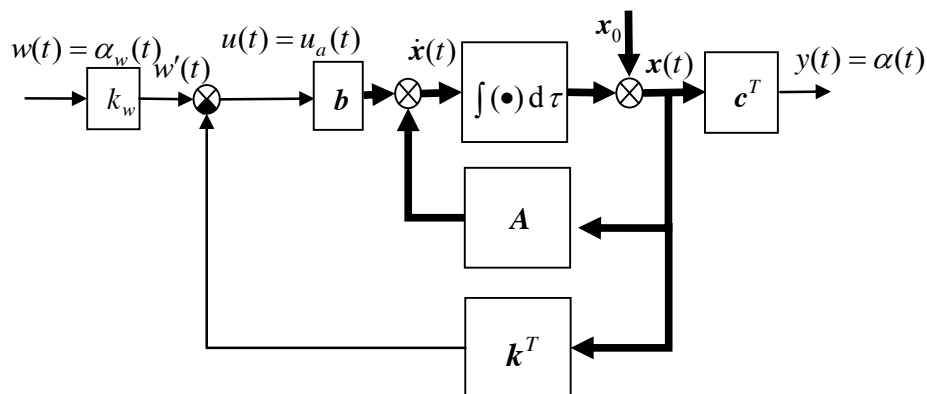
$$\mathbf{A}_w = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,5 & 2,5 \\ -50 & -27,1 & -14,5 \end{bmatrix}.$$

Snadno můžeme ověřit, že vlastní čísla matice $\mathbf{A}_w$ jsou $s_{1,2,3}^w = -5$, tj. požadované póly uzavřeného systému řízení.

Na základě vztahu (4.9) určíme vstupní korekci

$$k_w = -\frac{1}{\mathbf{c}^T \mathbf{A}_w^{-1} \mathbf{b}} = 10.$$

Blokové schéma stavového řízení bez integrace stejnosměrného motoru je na obr. 4.12.



Obr. 4.12 Blokové schéma stavového řízení bez integrace stejnosměrného motoru – příklad 4.5

Odezva stejnosměrného motoru se stavovým řízením bez integrace pro skokovou změnu žádaného úhlu natočení $w(t) = \alpha_w(t) = \eta(t)$ a skokovou změnu zátěžného momentu $v(t) = m_l(t) = 0,1\eta(t-5)$ je na obr. 4.13.

Stavové řízení s integrací

Pro jednoduchost i v tomto případě zvolíme u uzavřeného systému řízení násobný pól $s_{1,2,3}^w = -5$, tj.

$$N_{ew}(s) = (s+5)^4 = s^4 + 20s^3 + 150s^2 + 500s + 625 \Rightarrow$$

$$a_{e0}^w = 625, a_{e1}^w = 500, a_{e2}^w = 150, a_{e3}^w = 20 \Rightarrow \mathbf{a}^w = [625 \ 500 \ 150 \ 20]^T.$$

Nyní musíme uvažovat rozšířený stavový model stejnosměrného motoru ve tvaru (4.55), tj.

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 2,5 & 0 \\ 0 & -0,25 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_e^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Určíme charakteristický mnohočlen

$$N_e(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_e) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s+0,5 & -2,5 & 0 \\ 0 & 0,25 & s+5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & s \end{vmatrix} = s^4 + 5,5s^3 + 3,125s^2 \Rightarrow$$

$$a_{e0} = 0, a_{e1} = 0, a_{e2} = 3,125, a_{e3} = 5,5 \Rightarrow \mathbf{a}_e = [0 \ 0 \ 3,125 \ 5,5].$$

Pro návrh stavového řízení

$$\mathbf{k}_e^T = [\mathbf{k}^T \ -K_I]^T$$

použijeme rovněž vztah (4.14):

$$\mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}_e, \mathbf{b}_e) = [\mathbf{b}_e, \mathbf{A}_e \mathbf{b}_e, \mathbf{A}_e^2 \mathbf{b}_e, \mathbf{A}_e^3 \mathbf{b}_e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 12,5 & -68,75 \\ 0 & 12,5 & -68,75 & 339,0625 \\ 5 & -25 & 121,875 & -592,1875 \\ 0 & 0 & 0 & -12,5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_{ec}, \mathbf{b}_{ec}) = \begin{bmatrix} a_{e1} & a_{e2} & a_{e3} & 1 \\ a_{e2} & a_{e3} & 1 & 0 \\ a_{e3} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3,125 & 5,5 & 1 \\ 3,125 & 5,5 & 1 & 0 \\ 5,5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_c = \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}_e, \mathbf{b}_e) \mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_{ec}, \mathbf{b}_{ec}) = \begin{bmatrix} 0 & 12,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,25 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5 & 5 \\ -12,5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0,08 \\ 0,08 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & -0,4 & 0,2 & 0 \end{bmatrix},$$

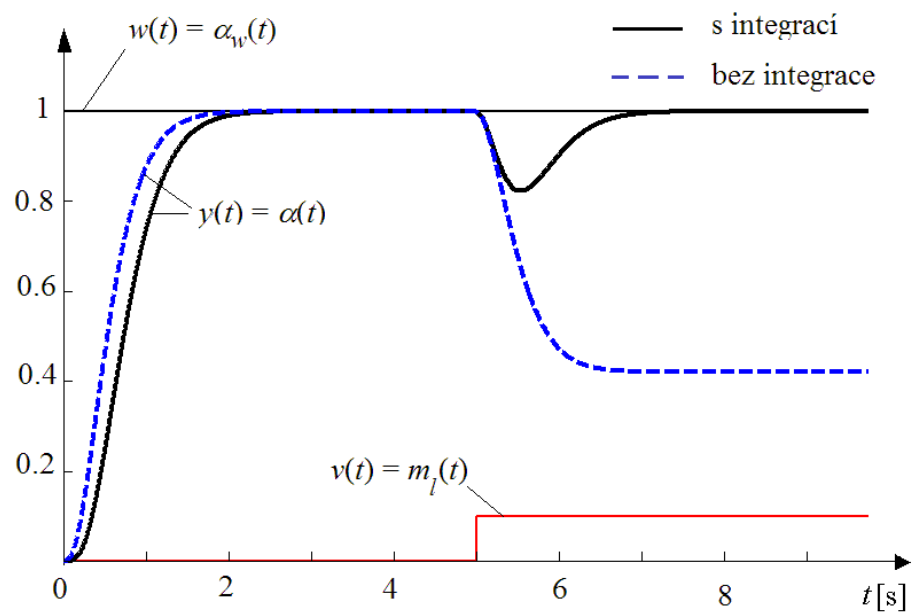
$$(\mathbf{a}_e^w - \mathbf{a}_e)^T = [625 \quad 500 \quad 146,875 \quad 14,5],$$

$$\mathbf{k}_e^T = (\mathbf{a}_e^w - \mathbf{a}_e)^T \mathbf{T}_c^{-1} = [40 \quad 11,17 \quad 2,9 \quad -50].$$

Blokové schéma stavového řízení s integrací stejnosměrného motoru je stejné jako na obr. 4.11.

Odezva stejnosměrného motoru se stavovým řízením s integrací pro skokovou změnu žádaného úhlu natočení $w(t) = \alpha_w(t) = \eta(t)$ a skokovou změnu zátěžného momentu $v(t) = m_l(t) = 0,1\eta(t-5)$ je na obr. 4.13.

Ze srovnání průběhů na obr. 4.13 vyplývá jednoznačná přednost stavového řízení s integrací, i když došlo ke zpomalení odezvy. Zpomalení odezvy je způsobeno zvýšením řádu uzavřeného systému řízení.



Obr. 4.13 Porovnání odezev stejnosměrného motoru se stavovým řízením bez a s integrací – příklad 4.5

PŘÍLOHA A

Linearizace

Lineární dynamické systémy jsou v podstatě idealizací reálných dynamických systémů. Jedním z nejdůležitějších předpokladů je, že daný systém pracuje v „blízkém“ okolí **pracovního bodu**. V tomto okolí matematický model daného dynamického systému může být považován za lineární.

Když matematický model nelineárního dynamického systému ve stavovém prostoru je dán vztahem (2.8)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), u(t)],$$

$$y(t) = h[\mathbf{x}(t), u(t)],$$

pak je nutno provést **linearizaci**. Použijeme rozvoj v Taylorovu řadu a bereme v úvahu jen první lineární členy řady, pak můžeme psát

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} \Delta u(t), \\ \Delta y(t) &= \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x}(t) + d \Delta u(t), \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1a})$$

kde

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}(t), & \Delta \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0, \\ \Delta u(t) &= u(t) - u_0, \\ \mathbf{A} &= \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_0, & \mathbf{b} &= \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u} \right|_0, \\ \mathbf{c} &= \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_0, & d &= \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1b})$$

Ve všech případech se předpokládá, že parciální derivace jsou vypočítány pro pracovní bod a že existují a jsou spojité.

Přechod od přírůstkových hodnot proměnných k absolutním hodnotám proměnných je dán vztahy

$$\left. \begin{aligned} \hat{y}(t) &= y_0 + \Delta y(t), \\ u(t) &= u_0 + \Delta u(t). \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2})$$

V průběhu celého textu, není-li řečeno jinak, všechny matematické modely jsou uvažovány v pracovním bodě, to znamená, že se pracuje s přírůstkovými proměnnými, i když to není výslovně uvedeno, a proměnné nejsou označovány jako přírůstkové.

Podrobněji viz např. [deSilva 2009; Mandal 2006; Vítěček, Vítěčková 2013].

PŘÍLOHA B

Cayleyova-Hamiltonova věta

Každá čtvercová matice A řádu n vyhovuje své charakteristické rovnici

$$\det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0, \quad (\text{B.1})$$

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = \mathbf{0}. \quad (\text{B.2})$$

Podrobněji viz např. [Ogata 2010; Mandal 2006].

Sylvestrův interpolační vztah

Konvergentní nekonečná řada [viz např. (3.40)]

$$f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i A^i \quad (\text{B.3})$$

čtvercových matic A řádu n může být jednoznačně vyjádřena konečnou řadou stupně $n - 1$ nebo nižším

$$f(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^i, \quad (\text{B.4})$$

kde koeficienty α_i jsou funkcemi vlastních hodnot matice A . Podrobněji viz např. [Ogata 2010; Mandal 2006].

PŘÍLOHA C

Uvažujme lineární dynamický systém se stavovým modelem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (\text{C.1a})$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du(t), \quad (\text{C.1b})$$

jehož stavová odezva je dána vztahem (3.43)

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0)}_{\text{volná stavová odezva}} + \underbrace{\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \int_0^t \mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{b}u(\tau) d\tau}_{\text{vynucená stavová odezva}} \quad (\text{C.2})$$

a výstupní odezva vztahem (3.44)

$$y(t) = \underbrace{\mathbf{c}^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0)}_{\text{volná výstupní odezva}} + \underbrace{\mathbf{c}^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \int_0^t \mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{b}u(\tau) d\tau}_{\text{vynucená výstupní odezva}} + du(t). \quad (\text{C.3})$$

Řiditelnost

Lineární dynamický systém je říditelný, existuje-li takové řízení (vstup) $u(t)$, které převede daný systém z libovolného počátečního stavu $\mathbf{x}(t_0)$ do libovolného koncového stavu $\mathbf{x}(t_1)$ za konečnou dobu $t_1 - t_0$.

Nejčastěji se volí $t_0 = 0$ a $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0}$.

Je zřejmé, že pro říditelnost výstupní rovnice (C.1b) [a tedy i (C.3)] nemá význam, a proto je uvažována pouze stavová rovnice (C.1a) a její odezva (C.2).

V souladu s (C.2) pro koncový stav $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0}$ platí

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_1} \mathbf{x}(0) + \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_1} \int_0^{t_1} \mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{b}u(\tau) d\tau \Rightarrow \\ \mathbf{x}(0) &= -\int_0^{t_1} \mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{b}u(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Použijeme Sylvestrův interpolační vztah (B.4)

$$\mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(\tau) \mathbf{A}^i, \quad (\text{C.5})$$

dosadíme do (C.4) a dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= -\int_0^{t_1} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(\tau) \mathbf{A}^i \mathbf{b}u(\tau) d\tau \Rightarrow \\ \mathbf{x}(0) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^i \mathbf{b} \beta_i, \end{aligned} \quad (\text{C.6a})$$

$$\beta_i = -\int_0^{t_1} \alpha_i(\tau) u(\tau) d\tau . \quad (C.6b)$$

Vztah (C.6a) můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{x}(0) = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (C.7)$$

kde

$$\mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \quad (C.8)$$

je čtvercová matice řiditelnosti [viz vztah (2.50)].

Ze vztahu (C.7) vyplývá, že abychom mohli určit $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$, matice řiditelnosti (C.8) musí být invertovatelná, tj. musí mít hodnotu (rank) n . Protože je to matice čtvercová, její determinant musí být nenulový.

$$\text{rank } \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = n \Leftrightarrow \det \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq 0 . \quad (C.9)$$

Vyplývá to přímo ze známého vztahu na inverzi čtvercové matice

$$\mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \frac{\text{adj } \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b})}{\det \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b})}, \quad \det \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq 0 . \quad (C.10)$$

Pozorovatelnost

Lineární dynamický systém je pozorovatelný, když na základě znalosti průběhů řízení (vstupu) $u(t)$ a výstupu $y(t)$ na konečném intervalu $t_1 - t_0$ lze určit počáteční stav $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Známe-li počáteční stav $\mathbf{x}(t_0)$, pak snadno můžeme určit stav $\mathbf{x}(t)$ pro libovolný čas $t > t_0$.

Nejčastěji volíme $t_0 = 0$.

Protože řízení (vstup) $u(t)$ způsobuje určitou známou (vynucenou) odezvu, je zřejmé, že můžeme zvolit $u(t) = 0$, tj. můžeme uvažovat autonomní lineární dynamický systém

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (C.11a)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t). \quad (C.11b)$$

Určíme-li u něj počáteční stav $\mathbf{x}(0)$, pak na základě [viz (3.43)] vztahu

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) \quad (C.12)$$

můžeme určit libovolný stav $\mathbf{x}(t)$ pro $t > 0$ a ze vztahu (C.11b) i odpovídající výstup (3.44)

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{e}^{A t} \mathbf{x}(0). \quad (\text{C.13})$$

Použijeme Sylvestrův interpolační vztah (B.4)

$$\mathbf{e}^{A t} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) \mathbf{A}^i \quad (\text{C.14})$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{c}^T \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbf{A}^i \right) \mathbf{x}(0) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbf{c}^T \mathbf{A}^i \right) \mathbf{x}(0) = \\ &= [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}] \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) \Rightarrow \\ y(t) &= [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}] \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) \mathbf{x}(0), \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

kde

$$\mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} = [\mathbf{c}, \mathbf{A}^T \mathbf{c}, \dots, (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{c}]^T \quad (\text{C.16})$$

je čtvercová matice pozorovatelnosti [viz vztah (2.51)].

Podobně jako v případě říditelnosti, abychom ze vztahu (C.15) mohli určit počáteční stav $\mathbf{x}(0)$, matice pozorovatelnosti (C.16) musí být invertovatelná, tj. musí mít hodnotu n . Protože je to čtvercová matice, její determinant musí být nenulový

$$\text{rank } \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = n \Leftrightarrow \det \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) \neq 0. \quad (\text{C.17})$$

Ke stejnému závěru se můžeme dostat i jinou cestou.

Pro autonomní lineární dynamický systém (C.11) můžeme psát

$$\begin{aligned} y(0) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(0), \\ \dot{y}(0) &= \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{x}(0), \\ \ddot{y}(0) &= \mathbf{c}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x}(0), \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(0) &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-2} \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{x}(0), \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) \Rightarrow \\
\begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} &= \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) \mathbf{x}(0), \tag{C.18}
\end{aligned}$$

tj. abychom ze vztahu (C.18) mohli určit počáteční stav $\mathbf{x}(0)$, pro matici pozorovatelnosti $\mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T)$ musí platit (C.17).

Podrobněji viz např. [Ogata 2010; Mandal 2006; Friedland 2005].

PŘÍLOHA D

Ackermannův vztah

Pro říditelný lineární dynamický systém se stavovým modelem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad (\text{D.1})$$

je třeba navrhnout zpětnovazební stavové řízení reprezentované vektorem $\mathbf{k}^T$, které zajistí požadovaný charakteristický mnohočlen uzavřeného systému řízení ve tvaru

$$N_{kw}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_w) = s^n + a_{n-1}^w s^{n-1} + \dots + a_1^w s + a_0^w, \quad (\text{D.2})$$

kde

$$\mathbf{A}_w = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T. \quad (\text{D.3})$$

V souladu s Cayleyovou-Hamiltonovou větou (příloha B) každá čtvercová matice musí vyhovovat své charakteristické rovnici

$$N_{kw}(\mathbf{A}_w) = 0,$$

tj.

$$\mathbf{A}_w^n + a_{n-1}^w \mathbf{A}_w^{n-1} + \dots + a_1^w \mathbf{A}_w + a_0^w \mathbf{I} = \mathbf{0}. \quad (\text{D.4})$$

Dosadíme (D.3) do (D.4) a upravíme. Pro přehlednost nejdříve vypočteme mocniny matice $\mathbf{A}_w$:

$$\mathbf{A}_w^2 = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{A}\mathbf{b}\mathbf{k}^T - \mathbf{b}\mathbf{k}^T \mathbf{A}_w, \quad (\text{D.5})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_w^3 &= (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)(\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}\mathbf{b}\mathbf{k}^T - \mathbf{b}\mathbf{k}^T \mathbf{A}_w) = \\ &= \mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2 \mathbf{b}\mathbf{k}^T - \mathbf{A}\mathbf{b}\mathbf{k}^T \mathbf{A}_w - \mathbf{b}\mathbf{k}^T \mathbf{A}_w^2, \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

$\vdots$

$$\mathbf{A}_w^n = \mathbf{A}^n - \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}\mathbf{k}^T - \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{b}\mathbf{k}^T \mathbf{A}_w - \dots - \mathbf{A}\mathbf{b}\mathbf{k}^T \mathbf{A}_w^{n-2} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T \mathbf{A}_w^{n-1}. \quad (\text{D.7})$$

Nyní dosadíme (D.3), (D.5) – (D.7) do (D.4), označme

$$N_{kw}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_{n-1}^w \mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_1^w \mathbf{A} + a_0^w \mathbf{I} \quad (\text{D.8})$$

a zbývající vztahy upravme tak, že vytkneme $\mathbf{b}$, $\mathbf{A}\mathbf{b}$, $\mathbf{A}^2\mathbf{b}$ atd. a dostaneme

$$\begin{aligned} N_{kw}(\mathbf{A}) - \mathbf{b}(a_1^w \mathbf{k}^T + a_2^w \mathbf{k}^T \mathbf{A}_w + \dots + a_{n-1}^w \mathbf{k}^T \mathbf{A}_w^{n-2} + \mathbf{k}^T \mathbf{A}_w^{n-1}) + \\ - \mathbf{A}\mathbf{b}(a_2^w \mathbf{k}^T + a_3^w \mathbf{k}^T \mathbf{A}_w + \dots + a_{n-2}^w \mathbf{k}^T \mathbf{A}_w^{n-3} + a_{n-1}^w \mathbf{k}^T \mathbf{A}_w^{n-2}) + \dots \\ - \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{b}(a_{n-1}^w \mathbf{k}^T + \mathbf{k}^T \mathbf{A}_w) + \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}\mathbf{k}^T = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Tento vztah zapíšeme maticově

$$N_{kw}(A) = [b, Ab, \dots, A^{n-2}b, A^{n-1}b] \begin{bmatrix} a_1^w k^T + a_2^w k^T A_w + \dots + k^T A_w^{n-1} \\ a_2^w k^T + a_3^w k^T A_w + \dots + a_{n-1}^w k^T A_w^{n-2} \\ \vdots \\ a_{n-1}^w k^T + k^T A_w \\ k^T \end{bmatrix}.$$

První výraz na pravé straně je matice řiditelnosti

$$Q_{co}(A, b) = [b, Ab, \dots, A^{n-2}b, A^{n-1}b],$$

která je čtvercová a nesingulární [systém je řiditelný, a proto $\det Q_{co}(A, b) \neq 0$], a tedy existuje její inverze. Můžeme tedy psát

$$\begin{bmatrix} a_1^w k^T + a_2^w k^T A_w + \dots + k^T A_w^{n-1} \\ a_2^w k^T + a_3^w k^T A_w + \dots + a_{n-1}^w k^T A_w^{n-2} \\ \vdots \\ a_{n-1}^w k^T + k^T A_w \\ k^T \end{bmatrix} = Q_{co}^{-1}(A, b) N_{kw}(A).$$

Protože nás zajímá pouze vektor k^T (poslední řádek), proto dostaneme

$$k^T = [0, 0, \dots, 0, 1] Q_{co}^{-1}(A, b) N_{kw}(A). \quad (D.10)$$

PŘÍLOHA E

Požadované rozmístění pólů

Při návrhu stavového řízení se vychází z rozmístění pólů v levé polorovině komplexní roviny s . Vliv rozložení dvojice pólů na přechodovou charakteristiku pro lineární dynamický systém 2. řádu je ukázán na obr. E.1.

Předpokládá se, že lineární dynamický systém 2. řádu má přenos

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \frac{\xi_0}{\omega_0} s + \omega_0^2} \quad (\text{E.1})$$

resp. stavový model

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(0) &= 0, \\ \dot{x}_2(t) &= -\omega_0^2 x_1(t) - 2 \frac{\xi_0}{\omega_0} x_2(t) + u(t), & x_2(0) &= 0, \\ y(t) &= \omega_0^2 x_1(t), \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

kde ω_0 je přirozený úhlový kmitočet (netlumených kmitů), ξ_0 – koeficient relativního tlumení.

Pro posouzení průběhů přechodových charakteristik na obr. E.1 je vhodné zavést další ukazatele

$$\alpha = \xi_0 \omega_0, \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi_0^2}, \quad \kappa = \frac{y_m - y(\infty)}{y(\infty)}, \quad (\text{E.3})$$

tj. α – tlumení (stupeň stability) a ω – úhlový kmitočet (tlumených kmitů), κ – relativní překmit, y_m – maximální hodnota přechodové charakteristiky, $y(\infty)$ – ustálená hodnota přechodové charakteristiky.

Na základě vlivu pólů na přechodovou charakteristiku (obr. E.1) lze v levé polorovině komplexní roviny s vymezit pro póly systému řízení tzv. **přípustnou oblast** vymezenou požadovaným tlumením α_w a požadovaným koeficientem relativního tlumení ξ_w v souladu s obr. E.2.

Póly ležící nejbližší k hranici přípustné oblasti se nazývají **dominantní póly** (někdy jako dominantní póly jsou označovány ty, které jsou nejbližší k imaginární ose).

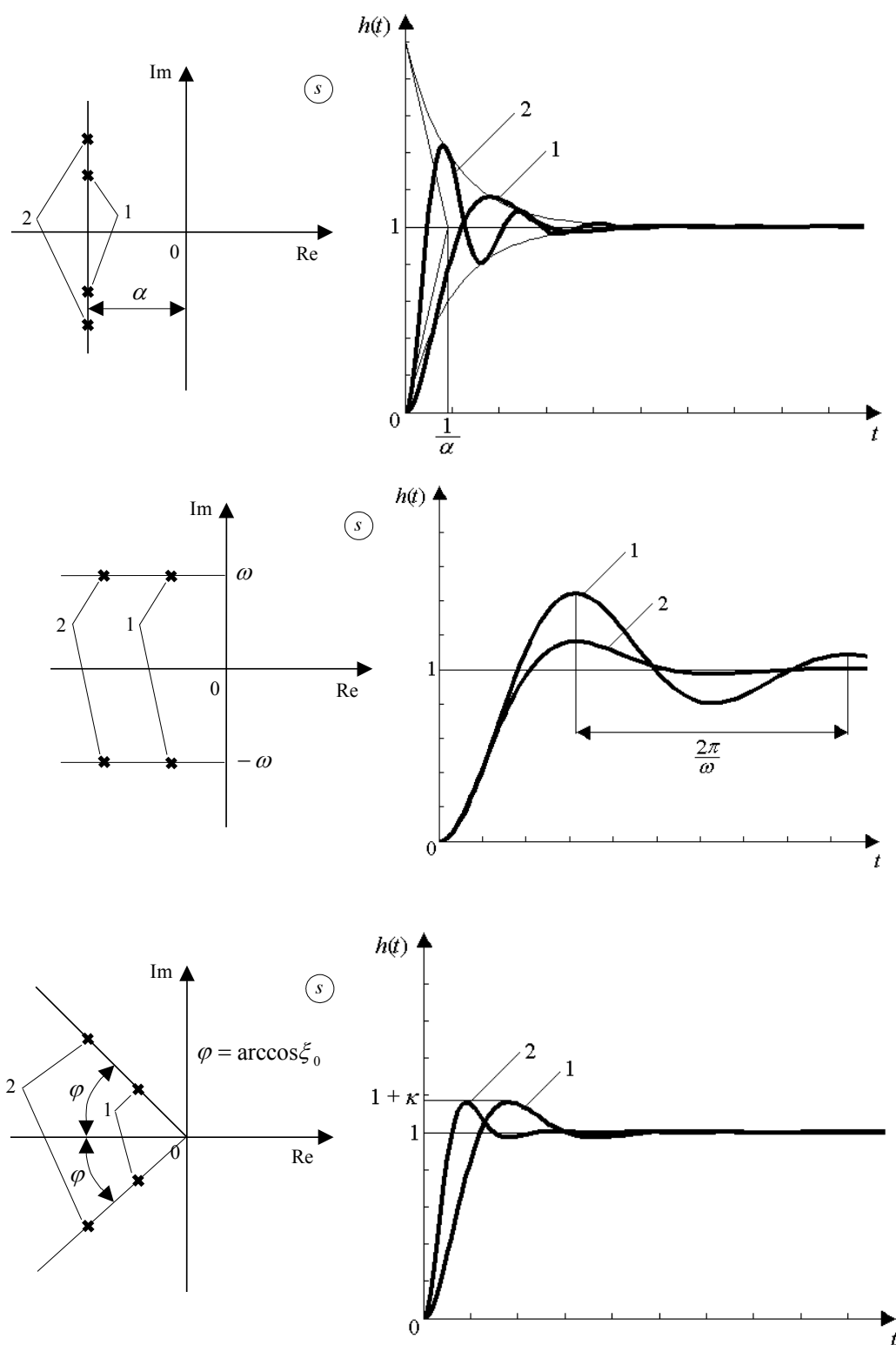
Dále se předpokládá, že póly, které leží daleko od hranice přípustné oblasti, mají zanedbatelný vliv na chování systému řízení.

Hranice přípustné oblasti na obr. E.2 jsou určeny pomocí níže uvedených vztahů

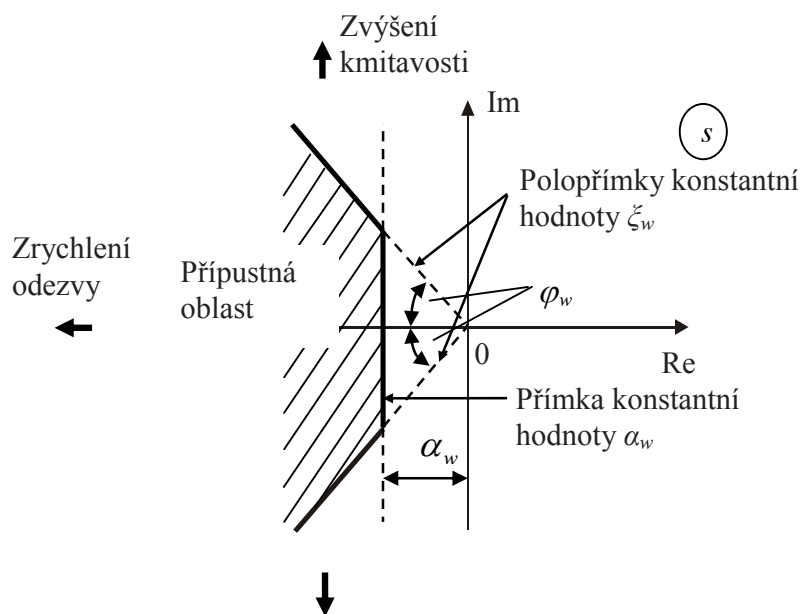
$$\alpha_w \geq (3 \div 5) \frac{1}{t_s}, \quad (\text{E.4})$$

$$\varphi_w \leq \arccos \xi_w. \quad (\text{E.5})$$

kde t_s je doba regulace, tj. doba, kdy výstupní veličina $y(t)$ vejde do pásma o šířce 2Δ , tj. $y(\infty) \pm \Delta$, kde tolerance regulace $\Delta = \delta y(\infty)$; $\delta = 0,01 \div 0,05$.



Obr. E.1 Vliv komplexně sdružených pólů systému 2. řádu na jeho přechodovou charakteristiku



Obr. E.2 Vymezení přípustné oblasti pro póly regulačního obvodu

Ve vztahu (E.4) je menší číslo uvažováno v případě jednoho dominantního reálného pólu a větší v případě dominantního dvojnásobného reálného pólu. První vztah je dán pro toleranci regulace okolo 5 %. Druhý vztah (E.5) vychází z předpokladu maximálního 25% přípustného relativního překmitu, tj.

$$\kappa \leq 0.25 \Rightarrow \xi_0 \geq 0.404 \Rightarrow \varphi_w \leq 66^\circ (1.15 \text{ rad}). \quad (\text{E.6})$$

Při návrhu stavového řízení se často používají standardní binomické tvary s násobným reálným pólem $s_i^w = -a$, $a > 0$ (obr. E.3):

$$N_{kw}(s) = (s + a)^n, \quad (\text{E.7})$$

$$\begin{aligned} n = 2 & \quad s^2 + 2as + a^2, \\ n = 3 & \quad s^3 + 3as^2 + 3a^2s + a^3, \\ n = 4 & \quad s^4 + 4as^3 + 6a^2s^2 + 4a^3s + a^4, \\ n = 5 & \quad s^5 + 5as^4 + 10a^2s^3 + 10a^3s^2 + 5a^4s + a^5. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Velmi populární je integrální kritérium ITAE.

$$I_{ITAE} = \int_0^\infty t |e(t)| dt \rightarrow \min. \quad (\text{E.9})$$

Integrální kritérium ITAE I_{ITAE} (ITAE = **I**ntegral of **T**ime multiplied by **A**bsolute **E**rror) v sobě zahrnuje čas i regulační odchylku, a proto při jeho minimalizaci dochází současně k minimalizaci jak absolutní regulační plochy, tak i doby regulace t_s . Je to velmi oblíbené integrální kritérium, i když jeho hodnotu v případě kmitavých průběhů lze určit pouze simulačně.

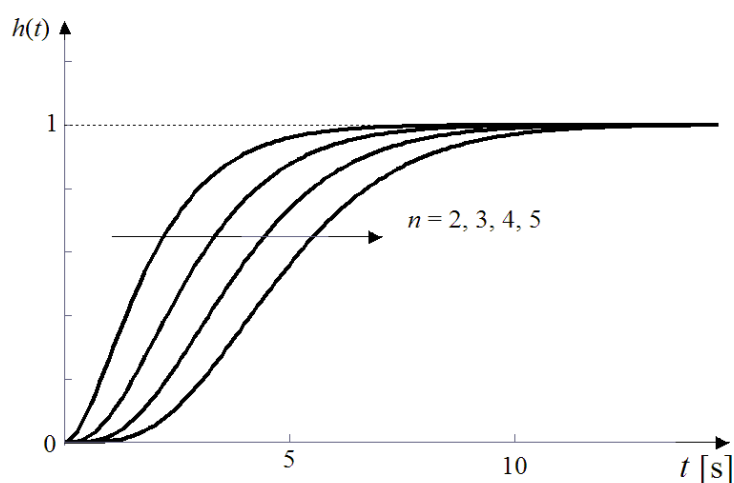
Původní koeficienty požadovaného charakteristického mnohočlenu $N_w(s)$ uvedené např. v [Graham, Lathrop 1953] byly získány na základě analogové simulace a později

byly upřesněny číslíkovou simulací [Cao 2008]. Nové standardní tvary ITAE dávají podstatně menší hodnotu integrálního kritéria (E.9) především pro vyšší stupně charakteristických mnohočlenů.

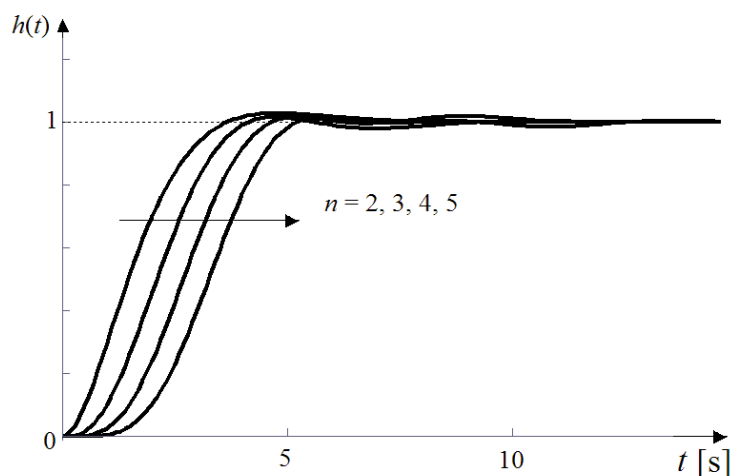
Nové koeficienty charakteristických mnohočlenů pro kritérium ITAE (obr. E.4):

$$\begin{aligned}
 n = 2 \quad & s^2 + 1,505as + a^2, \\
 n = 3 \quad & s^3 + 1,783as^2 + 2,172a^2s + a^3, \\
 n = 4 \quad & s^4 + 1,953as^3 + 3,347a^2s^2 + 2,648a^3s + a^4, \\
 n = 5 \quad & s^5 + 2,068as^4 + 4,499a^2s^3 + 4,675a^3s^2 + 3,257a^4s + a^5.
 \end{aligned} \tag{E.10}$$

Konstanta a ve vztazích (E.7), (E.8) a (E.10) vyjadřuje časové měřítko. Její volbou se přizpůsobí standardní tvar charakteristického mnohočlenu s reálným systémem.



Obr. E.3 Přejchodové charakteristiky pro standardní binomické tvary (E.8) pro $a = 1$



Obr. E.4 Přejchodové charakteristiky pro standardní tvary ITAE (E.10) pro $a = 1$

Na obr. E.3 a E.4 jsou ukázány přechodové charakteristiky pro binomické a ITAE standardní tvary pro $a = 1$.

LITERATURA

- CAO, Y. The Optimal ITAE Transfer Function for Step Response. Revisit the optimal ITAE transfer function using numerical optimization and digital computer. <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/18547-the-optimal-ita-transfer-function-for-step-input/content/itae/html/itaecoptimtf.html> (Updated 31 Jan 2008)
- DE SILVA, C. W. *Modeling and Control of Engineering Systems*. CRC Press, Taylor and Francis Group, Boca Raton, 2009, 776 p.
- GOODWIN, G. C., GRAEBE, S. F., SALDAGO, M. E. *Control System Design*. Pearson Education, 2001, 908 p.
- GRAHAM, F. D., LATHROP, R. C. *Synthesis of "Optimum" Transient Response-Criteria and Standard Forms*. WADC Technical Report No. 53-66, 1953, 45 p.
- DORF, R.C., BISHOP, R. *Modern Control Systems*. 12th Edition. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey 2011, 1082 p.
- FRANKLIN, G. F., POWELL, J. D., EMAMI-NAEIMI, A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Fourth Edition. Prentice-Hall, 2002, 910 p.
- FRIEDLAND, B. *Control System Design. An Introduction to State-Space Methods*. Dover Publications, Mineola, 2005, 710 p.
- KYPUROS, J. A. *System Dynamics and Control with Bond Graph. Modeling*. CRC Press Taylor and Francis Group, Boca Raton, 2013, 494 p.
- MANDAL, A. K. *Introduction to Control Engineering. Modeling, Analysis and Design*. New Age International (P) Limited, Publishers. New Delhi, 2006, 612 p.
- NISE, N. S. *Control Systems Engineering*. 6th Edition. John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey, 2011, 926 p.
- NOSKIEVIC, P. *Modelování a identifikace systémů*. Montanex, Ostrava, 1999, 276 p.
- O'DWYER, A. *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules*. Third Edition. Imperial College Press, London, 2009, 608 p.
- OGATA, K. *Modern Control Engineering*. First Edition. Prentice Hall, Boston, 2010, 894 p.
- SZKLARSKI, L., JARACZ, K., VITECEK, A. *Optimization of Electrical Drives (in Polish)*. Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1989, 291 p.
- VÍTEČEK, A., VÍTEČKOVÁ, M. *Zpětnovazební řízení mechatronických systémů*. VŠB-TU Ostrava, 2013, 204 p.
- VÍTEČEK, A., VÍTEČKOVÁ, M., FARANA, R., CEDRO, L. *Principles of Automatic Control*. Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce, 2012, 197 p.
- WILLIAMS II, R. L., LAWRENCE, D. A. *Linear State-Space Control Systems*. John Wiley and Sons, New Jersey, 2007, 464 p.
- ZITEK, P. *Time Delay Control System Design Using Functional State Models*. CTU Publishing House, Prague, 1998, 93p.

Autoři:	Prof. Ing. Miluše Vítečková, CSc. Prof. Ing. Antonín Víteček, CSc., Dr.h.c.
Katedra:	Automatizační techniky a řízení
Název:	Stavové řízení
Místo, rok, vydání:	Ostrava, 2016, 1 st
Počet stran:	101
Vydavatel:	VŠB – Technická univerzita Ostrava 17. listopadu 15/2172 708 33 Ostrava - Poruba

ISBN 978-80-248-3900-4