Úvod do nelineárnych systémov

doc. Ing. Anna Jadlovská, PhD.

ZS 2016

Prednáška 1

1.1 Stručné zopakovanie pojmov z LDS

Uvažujme *lineárny* t-invariantný DS n-tého rádu (LDS):

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t); \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x_0}\\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned}$$

pričom $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^n$.

Rovnovážny stav $\boldsymbol{x}_r \in \mathbb{R}^n$ je stav neriadeného systému ($\boldsymbol{u}(t) = 0$ pre $\forall t$), $\dot{\boldsymbol{x}}(t)\,|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_r} = 0$

Rovnovážny stav LDS je určený riešením lineárnej homogénnej sústavy rovníc

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_r = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{x}_r = 0$$

Z matematického hľadiska je rovnovážny stav $\boldsymbol{x}_r$ singulárnym bodom riešenia stavových rovníc.

Ustáleným stavom (pracovným bodom) $\boldsymbol{x}_r \in \mathbb{R}^n$ budeme nazývať stav systému pri konštantnom riadení

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}_{konst} \neq 0, \quad \text{pre} \quad \forall t.$$

Ustálené stavy LDS:

$$\boldsymbol{x}_r = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_{konst},$$

za predpokladu, že matica $\boldsymbol{A}$ je regulárna.

Nelineárny t-invariantný DS (n-tého rádu)

NDS:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{f}\left[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\right]; \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x_0}\\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{h}\left[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\right],\end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{f}[\cdot]$, $\boldsymbol{h}[\cdot]$ sú dané nelineárne vektorové funkcie.

Rovnovážny stav NDS:

$$\begin{aligned}0 &= \boldsymbol{f}\left[\boldsymbol{x}_r, 0\right]\\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{h}\left[\boldsymbol{x}_r, 0\right].\end{aligned}$$

Ustálený stav NDS:

$$
\begin{aligned}
0 &= \boldsymbol{f}\left[\boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{u}_{konst}\right] \\
\boldsymbol{y}_r &= \boldsymbol{h}\left[\boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{u}_{konst}\right].
\end{aligned}
$$

1.2 Vlastnosti nelineárnych dynamických systémov

Nelineárne systémy maju odlišné vlastnosti ako LDS, t.j.:

- neplatí princíp superpozície

  Princíp superpozície: ak na vstup systému privedieme lineárnu kombináciu vstupných signálov; na výstupe dostaneme *tú istú* lineárnu kombináciu výstupných signálov.

- rovnovážne stavy existujú aj mimo začiatok súradníc
- počiatočné podmienky majú vplyv na dosiahnutie rovnovážnych stavov autonómnych systémov
- vznik autooscilácií (samobudených kmitov)
- **neexistuje jednotná metodika na riešenie NS**

1.3 Klasifikácia nelinearít

NS obsahujú okrem lineárnej časti aj časť nelineárnu.

1. Statické nelinearity: $v(t) = f[u(t); \operatorname{sign} u'(t)]$

   (a) linearizovateľné SN: v každom bode sa dá jednoznačne nahradiť nelineárna charakteristika dotyčnicou ku charakteristike, napr. $v(t) = au^2(t)$, $v(t) = au^3(t)$.

   (b) typické SN: náhrada nie je možná, napr. relé, hysterézia, pásmo necitlivosti.

   viď. (**Modrlák, Nelineárne systémy**).

2. Dynamické nelinearity – systém NDR n-tého rádu

$$
\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} = \boldsymbol{f}[y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}, u(t), \ldots, u^{(m-1)}(t)]
$$

P1

$$
y'''(t) + 3\left(y'(t)\right)^2 y''(t) + y'(t)\sqrt{y''(t)} + 2y(t) = u(t)
$$

P2

$$
my''(t) + c_0 y'(t) + c_1 y(t) + c_2 y^3(t) = F\cos\omega t
$$

P3 (rovnica matematického kyvadla)

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 \sin y(t) = u(t)$$

P4 (rovnica servomechanizmu s podstatnou nelinearitou)

$$y''(t) + a_1 y'(t) - a_0 y(t) y'(t) \mathrm{sign} y(t) = u(t)$$

NDR n-tého rádu je možné rozložiť na n DR prvého rádu. *Rozklad na kanonický tvar* je podstatou **metódy stavového priestoru**, ktorá sa používa pri posudzovaní stability rovnovážnych stavov (je ich viac ako 1) pomocou **prvej (nepriamej) Ljapunovej metódy**.

Pozn. Ak NS obsahuje typické nelinearity, funkcia f obsahuje nespojitosti opísané pomocou funkcie sign; *nemožno použiť metódu linearizácie* a metóda fázovej roviny musí byť pre ne upravená.

Príklad 1 *Prepíšte do substitučného kanonického tvaru NDS v P1.*

$$\begin{aligned}
& y(t) = x_1(t) \\
y'(t): \quad & \dot{x}_1(t) = x_2(t) = f_1(x_1, x_2, x_3, u) \\
y''(t): \quad & \dot{x}_2(t) = x_3(t) = f_2(x_1, x_2, x_3, u) \\
y'''(t): \quad & \dot{x}_3(t) = -3(x_2(t))^2 x_3(t) - x_2(t)\sqrt{x_3(t)} - 2x_1(t) + u(t) \\
& \phantom{\dot{x}_3(t)} = f_3(x_1, x_2, x_3, u)
\end{aligned}$$

Úloha 1 *Príklad P1 reprezentovaný dynamickou nelinearitou namodelujte pri definovanom vstupe $u(t)$ v jazyku MATLAB a v prostredí Simulink.*

1.4 Metódy riešenia NS

Stabilita NS: pri LDS existoval 1 rovnovážny stav, avšak pri NDS môže existovať aj viacero rovnovážnych stavov, z ktorých niektoré sú stabilné a niektoré nestabilné. Úlohou je určiť, ktoré to sú.

Pracovným režimom NS sú netlmené kmity (**medzné cykly**). Sú to rovnovážne periodické stavy, t.j. existujú bez toho, aby sme na vstup priviedli budiaci signál.

Medzi metódy pre analýzu a syntézu NS patria:

1. metóda linearizácie: úloha sa transformuje na riešenie LS, ktoré sú aproximáciou NS.
2. metóda fázového priestoru: aplikačne použiteľná pre systému 2. rádu (graficko-analytické znázornenie fázového portrétu, algoritmické riešenie fázového portrétu)
3. Ljapunova metóda stability

4. metóda harmonickej rovnováhy: pre NS s typickými nelinearitami, určujú sa parametre medzného cyklu (amplitúda, fáza)
5. metóda Popova – kritérium stability (pre systémy so statickou a dynamickou nelinearitou).

1.4.1 Metóda linearizácie

Využívame v nasledovných prípadoch:

1. ak sa v NS vyskytujú pomerne malé zmeny premenných
2. ak charakteristiky nelineárít sú v okolí pracovného bodu spojité a diferencovateľné, t.j. môžeme tieto systémy linearizovať,
3. takto získané linearizované systémy potom vyšetrujeme metódami známymi z teórie LS,
4. metóda linearizácie sa nehodí pre systémy s *typickými nelinearitami.*

Určenie parametrov linearizovaného systému

1. Nech je systém opísaný vťahom

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \boldsymbol{f} \text{ je nelineárna funkcia.} \tag{1.1}$$

   $\boldsymbol{y}$ výstup systému (alebo jeho n-tá derivácia)

   x_i vstupná premenná (alebo jej derivácia)

   $\boldsymbol{f}$ nelineárna funkcia, obsahuje statické aj dynamické nelinearity

2. Lineárna náhrada (1.1)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}(t) &\cong A_0 + A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t) + \cdots + A_n x_n(t) & (1.2) \\ \boldsymbol{Y}(t) &\cong A_0 + A_1 X_1(t) + A_2 X_2(t) + \cdots + A_n X_n(t) = \boldsymbol{f}(X_1, X_2, \ldots, X_n) & (1.3) \end{aligned}$$

   kde $\boldsymbol{f}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je hodnota v PB.

   - náhradu robíme v okolí pracovného bodu $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$
   - pre malé zmeny premenných x_i, koeficienty A_i dobre aproximujú pôvodný systém:
   - odčítaním (1.2) of (1.3) získame:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} - \boldsymbol{Y} &= A_1(x_1 - X_1) + \cdots + A_n(x_n - X_n) \\ \Delta\boldsymbol{y} &= A_1 \Delta x_1 + \cdots + A_n \Delta x_n \end{aligned} \tag{1.4}$$

   hodnota funkcie v PB: $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

   odchýlka od PB: $\Delta x_i = x_i - X_i$.

3. Ak funkciu (1.1) je možné analyticky vyjadriť a v okolí PB je spojitá a pre $\forall x$ diferencovateľná, môžeme ju zapísať do Taylorovho radu:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(X_1, X_2, \ldots, X_n) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - X_i)\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}\right|_{x_i = X_i} + \cdots,$$

   pričom zanedbaním vyšších členov získavame

$$\Delta \boldsymbol{y} \cong \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}\right|_{x_i = X_i} \tag{1.5}$$

4. Porovnaním (1.4) a (1.5) získavame:

$$A_1(x_1 - X_1) + \cdots + A_n(x_n - X_n) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}(x_1 - X_1) + \cdots + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_n}(x_n - X_n),$$

   z čoho vyplýva:

$$A_i = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}(x_i - X_i)\right|_{x_i = X_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

   a teda

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Y} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots \quad \Rightarrow \quad x_i = X_i + \Delta x_i$$

$$A_0 = \boldsymbol{Y} - \sum_{i=1}^{n} A_i X_i$$

1.4.2 Ljapunova metóda vyšetrovania stability

Metóda sa dá použiť ak platí:

1. nelinearita sa dá opísať jednoznačne analytickou funkciou,
2. ak sú v okolí pracovného bodu parciálne derivácie funkcie spojité, konečné, t.j. ak je možný *rozvoj do Taylorovho radu*,
3. ak za PB zvolíme **rovnovážny stav NS** – podľa **1. Ljapunovho kritéria** sa dá posúdiť stabilita tohto systému *v okolí pracovného bodu* na základe príslušnej aproximácie vo všetkých prípadoch, keď korene charakteristickej rovnice lineárnej aproximácie majú nenulovú reálnu zložku.

Záver: zo stability 1. priblíženia je možné usudzovať stabilitu pôvodného NS.

- ak všetky korene CHR 1. priblíženia ležia v ľavej polrovine – pôvodný systém je **stabilný**,
- ak 1 koreň 1. priblíženia je v pravej polrovine – 1. priblíženie aj pôvodný NS bol **nestabilný**,
- ak jeden z koreňov CHR leží na imaginárnej osi a ostatné ležia vľavo – **o stabilite sa nedá rozhodnúť**.

Príklad 2 *(Výpočet rovnovážnych stavov NS)*

Určte rovnovážne stavy systému

$$\ddot{x}(t) + 0.5\dot{x}(t) + 3x(t) + x^2(t) = 0$$

v rovine (x_1, x_2).

Riešenie:

Stavový opis NDS v SKT:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -3x_1(t) - 0.6x_2(t) - (x_1(t))^2 \end{aligned}\right\} \quad SKT \quad \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), t).$$

Rovnovážny stav: je definovaný ako bod, kde má NDS nulové derivácie, t.j. $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = 0$

NDS má väčší počet rovnovážnych stavov rôzneho charakteru – vypočítajú sa riešením nelineárnych algebraických rovníc $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), t) = 0$-

Pre rovnovážne stavy platí:

$$x_2(t) = 0; \quad -3x_1(t) - 0.6x_2(t) - (x_1(t))^2 = 0$$

Rovnovážne stavy v rovine (x_1, x_2) *sú body:*

$$RS_1 \equiv [0, 0], \quad RS_2 \equiv [-3, 0].$$

Príklad 3 *Pomocou nepriameho Ljapunovho kritéria vyšetrite stabilitu rovnovážnych stavov NDS*

$$y''(t) - \left(0.1 - \frac{10}{3}\left(y'(t)\right)^2\right) y'(t) + y(t) + y^2(t) = 0$$

Riešenie:

Po zavedení substitúcie prepis do SKT:

- *SKT:*

$$\begin{aligned} & y(t) = x_1(t) \\ y'(t):\quad & \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ y''(t):\quad & \dot{x}_2(t) = \left(0.1 - \frac{10}{3}x_2^2(t)\right) x_2(t) - x_1(t) - x_1^2(t) = \boldsymbol{f(x_1, x_2)}. \end{aligned}$$

- *Pre rovnovážne stavy platí:*

$$\dot{x_1}(t) = \dot{x_2}(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_2(t) = 0 \quad \wedge \quad \left(0.1 - \frac{10}{3}x_2^2(t)\right) x_2(t) - x_1(t) - x_1^2(t) = 0,$$

t.j.,

$$RS_1 \equiv [0, 0], \quad RS_2 \equiv [-1, 0]$$

- *Charakteristická rovnica 1. priblíženia (pre DR 2-hého rádu):*

$$p^2 - \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x_i=X_i} p - \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_i=X_i} = 0$$

$$y''(t) - \frac{\partial f}{\partial x_2} y'(t) - \frac{\partial f}{\partial x_1} y(t) = K$$

$$A_1 = -1 - 2X_1, \quad A_2 = 0.1 - 10x_2^2$$

$$p^2 - (0.1 - 10X_2^2)p - (-1 - 2X_1) = 0$$

- $(X_1, X_2) \equiv [0,0] \quad \Rightarrow \quad p^2 - 0.1p + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = 0.5 \pm \mathrm{i}$

  rovnovážny stav (singulárny bod $[0,0]$*) odpovedá* ***nestabilnému ohnisku***

  $(X_1, X_2) \equiv [-1,0] \quad \Rightarrow \quad p^2 - 0.1p - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 1.05,\ p_2 = -0.9.$

  rovnovážny stav (singulárny bod $[-1,0]$*) je typu* ***sedlo****, asymptoty sedla majú smernicu* 1.05 *a* -0.9*. Pri koreňoch* p_1*,* p_2 *nevieme posúdiť stabilitu!*

1.5 Záver

- Niektoré NS sa dajú vyšetrovať s dostatočnou presnosťou ako lineárne, ak sa ich správanie neodlišuje od lineárnej aproximácie, t.j. je dodržaný pohyb v blízkosti PB alebo rovnovážnych stavov,
- vyskytujú sa situácie, keď linearizovaný model je neadekvátny – linearizácia je neprípustná (rôzne typy oscilácií nevybudené vonkajším periodickým signálom; subharmonické kmity; skoková rezonancia; chaotické javy); mnohé z týchto javov sú *nežiadúce* a sú vyvolané **parazitnými nelinearitami** v regulátoroch + regulovaných procesoch (napr. trenie, nasýtenie, relé)
- iné javy sú žiadúce – ak nelinearity úmyselne zavádzame (dvojpolohová regulácia,. . .)

1.5.1 Dôvody pre využitie nelineárneho riadenia

- pohyb vo veľkých pracovných rozsahoch (neplatia podmienky linearizácie okolo PB, lineárne riadenie má zlé vlastnoti – zlá kvalita),
- riadenie systémov s nelinearitami, ktoré sa nedajú linearizovať (trenie, nasýtenie, hysterézia): vyvolávajú oscilácie a veľké regulačné odchýlky,
- jednoduchosť niektorých NS – veľké množstvo regul. procesov sa dá riadiť jednoduchými a lacnými prostriedkami (napr. nespojitá regulácia tlaku/teploty/prietoku)
- v regulátoroch používame prvky "relé-ového typu",

- robustný návrh s ohľadom na zmeny parametrov: pomalé zmeny parametrov v čase (napr starnutie prvkov), rýchle zmeny (uchopenie záťaže u manipulátorov),
- ak linearizácia rozvojom do TR u NS v syntéze nelineárneho riadenia vykazuje zhoršené regulačné pochody (nestabilné správanie), používa sa presná *exaktná* linearizácia.

V nelineárnych regulačných obvodoch sa vyskytujú:

- trvalé kmity o stálej amplitúde (*autooscilácie*)
- jav ferorezonancie (v elektrických RO s nelineárnou indukčnosťou L). Typický príklad z mechaniky: mechanický systém s nelineánou charakteristikou pružiny:

$$my''(t) + by'(t) + ay(t)cy^3(t) = F\cos\omega t.$$