Prednáška 2

Linearizácia a stabilita v malom

Uvažujme autonómny nelineárny časovo-invariantný systém:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Nelineárny systém definovaný rovnicou (2.1) má dva typy ustálených stavov:

- **rovnovážny stav** – definovaný vo fázovom priesotre izolovanými singulárnymi bodmi (kľudové stavy)
- množinou singulárnych bodov, ktoré vytvárajú uzavreté trajektórie – **medzné cykly**

V rovnovážnom stave sú časové zmeny všetkých stavových veličín rovné nule, t.j. singulárne body ${}^i x_s$ vo fázovom priestore musia spĺňať podmienku:

$$\left.\begin{aligned} f_1({}^i x_{1s}, {}^i x_{2s}, \cdots, {}^i x_{ns}) &= 0 \\ f_2({}^i x_{1s}, {}^i x_{2s}, \cdots, {}^i x_{ns}) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n({}^i x_{1s}, {}^i x_{2s}, \cdots, {}^i x_{ns}) &= 0 \end{aligned}\right\} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}\left({}^i \boldsymbol{x}_s\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, P(\text{počet riešení}) \tag{2.2}$$

Podmienka (2.2) môže mať u nelineárnych systémov viac riešení, t.j. vo fázovom priestore jej vyhovuje P singulárnych bodov.

Pozn. Tak ako singulárne body (rovnovážne stavy), tak aj medzné cykly môžu byť stabilné (nestabilné) podľa toho, či sa zastupujúci bod v stavovom priestore pre $t \to \infty$ k tomto bodu blíži alebo sa od neho vzdiaľuje.

Stabilitu v malom okolí singulárnych bodov môžeme vyšetrovať **linearizáciou nelineárneho systému v singulárnych bodoch.** Pre každý singulárny bod získame náhradný lineárny systém a potom kontrolujeme jeho stabilitu.

Linearizáciu vykonáme rozvojom do TR v okolí singulárnych bodov

$$\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_s, \quad \boldsymbol{x}_s =^i \boldsymbol{x}_s, \quad i = 1, 2, \dots, P$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1 - x_{s1}) &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\bigg|_{\boldsymbol{x}_s}(x_1 - x_{s1}) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\bigg|_{\boldsymbol{x}_s}(x_2 - x_{s2}) + \cdots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)\bigg|_{\boldsymbol{x}_s}(x_n - x_{sn}) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_2 - x_{s2}) &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)\bigg|_{\boldsymbol{x}_s}(x_1 - x_{s1}) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\bigg|_{\boldsymbol{x}_s}(x_2 - x_{s2}) + \cdots + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right)\bigg|_{\boldsymbol{x}_s}(x_n - x_{sn}) \\
&\vdots \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_n - x_{sn}) &= \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)\bigg|_{\boldsymbol{x}_s}(x_1 - x_{s1}) + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right)\bigg|_{\boldsymbol{x}_s}(x_2 - x_{s2}) + \cdots + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)\bigg|_{\boldsymbol{x}_s}(x_n - x_{sn})
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Sústava (2.3) zapísaná v maticovom tvare:

$$\Delta \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_s)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_s) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_s)\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\Delta \boldsymbol{x},$$

kde $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_s)$ je Jakobiho matica daná

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Náhradný lineárny systém v danom singulárnom bode má maticu systému $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_s)$ a jeho stabilitu vyšetrujeme metódami, ktoré poznáme z lineárnych systémov.

Z analýzy systémov v stavovom priestore je známe, že charakteristická rovnica je daná ako

$$\det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}] = \det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_s)] = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0, \quad n \text{ je rád systému.}$$

Príklad 4 *Uvažujme nelineárny systém*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + x_1 - x_1^2 & &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Úloha.

1. *Nájdite singulárne body.*
2. *Nájdite náhradné lineárne systémy v týchto bodoch.*
3. *Rozhodnite o stabilite v okolí singulárnych bodov.*

Riešenie.

1. *Singulárne body vyhovujú rovnosti:*

$$0 = x_2 = f_1(x_1, x_2) \quad \rightarrow \quad x_2 = 0;$$
$$0 - 2x_2 + x_1 - x_1^2 = f_2(x_1, x_2) \quad \rightarrow \quad x_1(1 - x_1) = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0 \vee x_1 = 1.$$

   Dostali sme dva singulárne body

$${}^1\boldsymbol{x}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^2\boldsymbol{x}_s = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. *Náhradné lineárne systémy:*

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_s) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 2x_1 & -2 \end{bmatrix}$$

   (a)

$${}^1\boldsymbol{x}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{J}({}^1\boldsymbol{x}_s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det\left[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}({}^1\boldsymbol{x}_s)\right] = \begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} = s^2 + 2s - 1$$

   Charakteristická rovnica $s^2 + 2s - 1 = 0$ *má korene*

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

   Singulárny bod ${}^1\boldsymbol{x}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *je nestabilný a jeho náhradný lineárny systém má rovnicu*

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}({}^1\boldsymbol{x}_s)\Delta\boldsymbol{x} = A_1\Delta\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}$$

   (b)

$${}^2\boldsymbol{x}_s = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{J}({}^2\boldsymbol{x}_s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det\left[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}({}^2\boldsymbol{x}_s)\right] = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix} = s^2 + 2s + 1$$

$$s_{1,2} = -1$$

   Singulárny bod ${}^2\boldsymbol{x}_s = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *je stabilný a jeho náhradný lineárny systém má rovnicu*

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}({}^2\boldsymbol{x}_s)\Delta\boldsymbol{x} = A_2\Delta\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}$$

Analýza nelineárnych systémov je v mnohých smeroch zovšeobecnením analýzy lineárnych systémov. Skôr ako pristúpime k rozboru singulárnych bodov nelineárnych systémov, uvedieme najprv základné vlastnosti singulárnych bodov lineárnych systémov.

Cieľ: trajektórie vo fázovej rovine (pre lineárny systém)

1. Stavový model zlinearizovaného (lineárneho) systému 2. rádu môžeme zapísať do tvaru:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2\end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ c & d\end{bmatrix}$$

kde

$$c = \left.\frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{x}_s}, \quad d = \left.\frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right|_{\boldsymbol{x}_s}.$$

Charakteristická rovnica je:

$$\det\left[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right] = \det\begin{bmatrix}s & -1\\ -c & s-d\end{bmatrix} = s^2 - ds - c,$$

pričom vlastné čísla (korene charakteristickej rovnice) sú

$$s_{1,2} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 + 4c}}{2} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + c}$$

Fázová trajektória okolo singulárneho bodu závisí na koreňoch charakteristickej rovnice linearizovaného systému, t.j. na koeficientoch c, d. Za predpokladu, že korene CHR s_1 a s_2 sú reálne (rôzne) môžeme riešenie lineárneho dynamického systému x_1 a x_2 vyjadriť ako:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= C_1 \exp(s_1 t) + C_2 \exp(s_2 t)\\ x_2(t) &= s_1 C_1 \exp(s_1 t) + s_2 C_2 \exp(s_2 t),\end{aligned}$$

C_1, C_2 sú konštanty, ktoré závisia na PP.

Rovnica fázovej trajektórie má tvar:

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \frac{s_1^2 C_1 \exp(s_1 t) + s_2^2 C_2 \exp(s_2 t)}{s_1 C_1 \exp(s_1 t) + s_2 C_2 \exp(s_2 t)}$$

2. Parametre lineárneho systému a im odpovedajúce korene (typ singulárneho bodu)

$d^2 + 4c$	c	d	korene	typ SB
≥ 0	< 0	< 0	$s_1 < 0, \quad s_2 < 0$	uzol stabilný
≥ 0	< 0	> 0	$s_1 > 0, \quad s_2 > 0$	uzol nestabilný
> 0	> 0	$<=> 0$	$s_1 > 0, \quad s_2 < 0$	sedlo
< 0	< 0	$= 0$	$s_{1,2} = \pm i\omega$	stred
< 0	< 0	< 0	$s_{1,2} = \alpha \pm i\omega,\ \alpha = d/2 < 0,\ \omega = \sqrt{\lvert (d/2)^2 + c \rvert}$	ohnisko stabilné
< 0	< 0	> 0	$s_{1,2} = \alpha \pm i\omega,\ \alpha = d/2 > 0,\ \omega = \sqrt{\lvert (d/2)^2 + c \rvert}$	ohnisko nestabilné

2.1 Priebehy fázových trajektórií

Stabilný uzol ($s_1 < 0$; $s_2 < 0$; $|s_2| > |s_1|$)

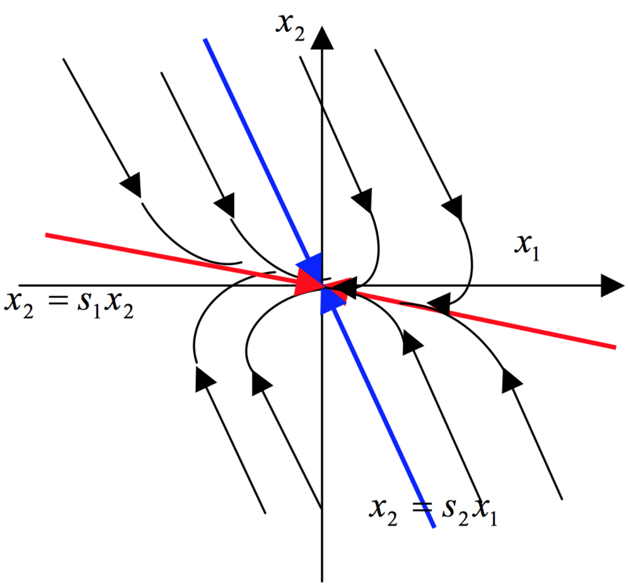
Predpokladajme, že PP v rovnici fázovej trajektórie (1) sa volia tak, že platí

$$c_1 = 0, \quad \frac{dx_2}{dx_1} = s_2,$$

teda fázová trajektória je priamka $x_2 = s_2 x_1$.

$$c_2 = 0, \quad \frac{dx_2}{dx_1} = s_1,$$

teda fázová trajektória je priamka $x_2 = s_1 x_1$. Pre takto zvolené konštantny sú fázové trajektórie priamky so zápornými smernicami s_1, s_2.



Obr. 2.1: Stabilný uzol $s_1 \neq s_2 < 0$.

Príklad 5

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= -x_1 \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= -2x_2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

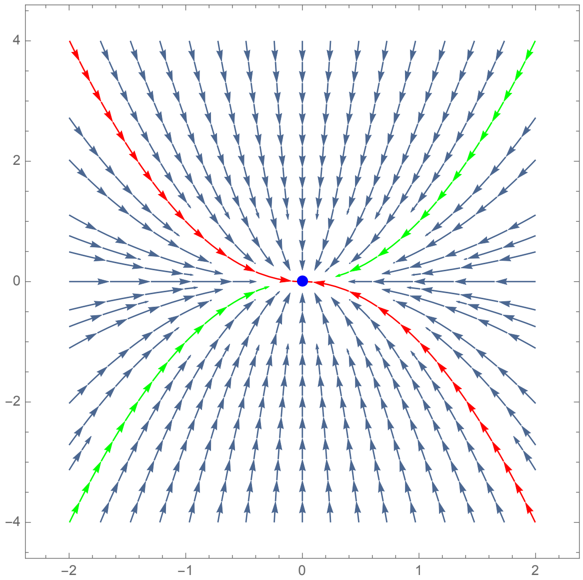
Riešenie:

$$x_1(t) = x_{10}e^{-t}, \quad x_2(t) = x_{20}e^{-2t}$$

Zjavne $x_1(t) \to 0$ *a* $x_2(t) \to 0$ *pre* $t \to \infty$, *t.j.* $SB \equiv [0,0]$.

Tvar riešenia pre vylúčenie t*:*

$$x_2(t) = x_{20}\left(\frac{x_1(t)}{x_{10}}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad x_2(t) = \frac{x_{20}}{x_{10}^2}x_1^2(t). \tag{2.5}$$



Obr. 2.2: Stabilný uzol $s_1 = -1$, $s_2 = -2$.

Všimnime si, že

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad CHR: \quad s_2^2 + 3s + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad s_1 = -1,\ s_2 = -2, \tag{2.6}$$

a teda singulárny bod je stabilný uzol.

Stabilný uzol ($s_1 = s_2 < 0$) **– násobný koreň**

Stavové premenné:

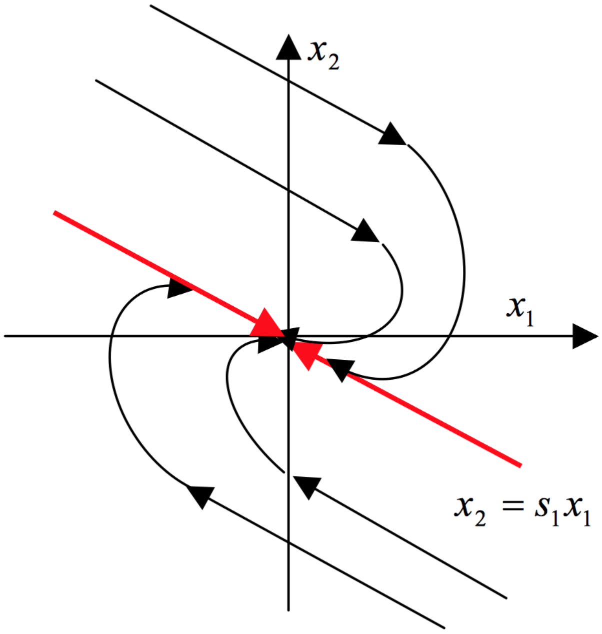
$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) = c_1 \exp(s_1 t) + c_2 t \exp(s_1 t) \\ x_2(t) &= y'(t) = s_1 c_1 \exp(s_1 t) + c_2 \exp(s_1 t) + s_1 c_2 t \exp(s_1 t) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Rovnica fázovej trajektórie má tvar

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{s_1^2 c_1 \exp(s_1 t) + 2 s_1^2 c_2 \exp(s_1 t) + s_1 c_2 t \exp(s_1 t)}{s_1 c_1 \exp(s_1 t) + c_2 \exp(s_1 t) + s_1 c_2 t \exp(s_1 t)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx_2}{dx_1} = s_1 \tag{2.8}$$

a teda

$$x_2 = s_1 x_1$$



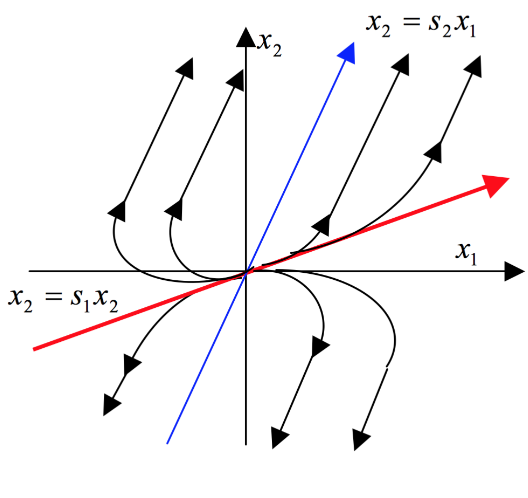
Obr. 2.3: Stabilný uzol $s_1 = s_2 < 0$.

Pre $t \to \infty$ a ľub. PP je rovnica fázovej trajektórie

$$\lim_{t \to \infty} \frac{dx_2}{dx_1} = s_1,$$

t.j. pre $t \to \infty$ sa každá trajektória tangenciálne blíži k priamke $x_2 = s_1 x_1$ a vo veľke vzdialenosti od $SB \equiv [0, 0]$ je s ňou rovnobežná.

Nestabilný uzol ($s_1 > 0$**,** $s_2 > 0$**,** $s_1 \neq s_2$)

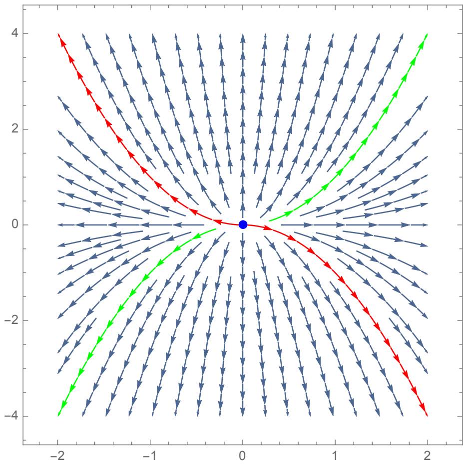


Obr. 2.4: Nestabilný uzol $s_1 > 0$, $s_2 > 0$.

Fázový portrét nestabilného uzla obsahuje 2 priamky $x_2 = s_1 x_1$ a $x_2 = s_2 x_1$ s kladnými smernicami s_1 a s_2. Pre $t \to \infty$ sú trajektórie rovnobežné s priamkou $x_2 = s_2 x_1$.

Príklad 6

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= x_1 \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= 2x_2.\end{aligned} \tag{2.9}$$



Obr. 2.5: Nestabilný uzol $s_1 = 1$, $s_2 = 2$.

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \quad CHR: \quad s_2^2 - 3s + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad s_1 = 1,\ s_2 = 2, \tag{2.10}$$

a teda singulárny bod je nestabilný uzol.

$$x_2(t) = \frac{x_{20}}{x_{10}^2} x_1^2(t) \tag{2.11}$$

Sedlo ($s_1 < 0$, $s_2 > 0$) Trajektórie sa pohybujú rovnobežne s $x_2 = s_1 x_1$ (záporná smernica) a neskôr pre $t \to \infty$ sú rovnobežné s $x_2 = s_2 x_1$.

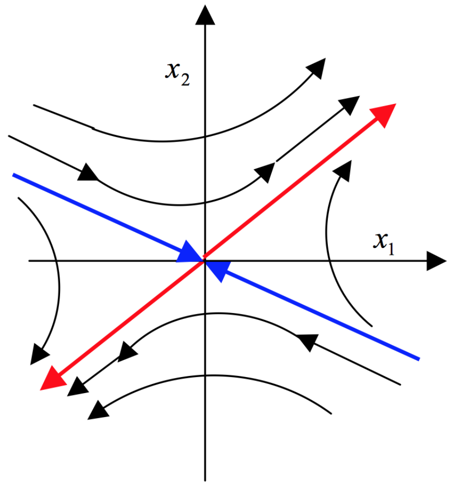
Príklad 7

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= x_1 \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= -2x_2.\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}, \quad CHR: \quad s_2^2 + s - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad s_1 = 1,\ s_2 = -2, \tag{2.13}$$

Riešenie:

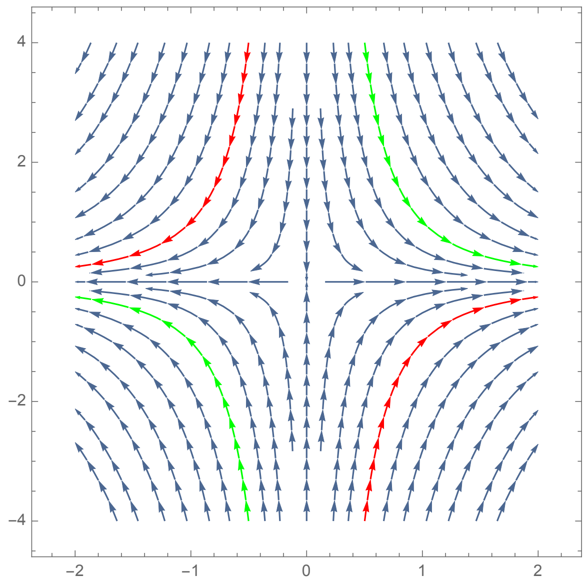
$$x_1(t) = x_{10} e^{t}, \quad x_2(t) = x_{20} e^{-2t}$$



Obr. 2.6: Sedlo $s_1 < 0$, $s_2 > 0$.

Tvar riešenia pre vylúčenie t:

$$x_2(t) = x_{20}\left(\frac{x_1(t)}{x_{10}}\right)^{-2} \implies x_1^2 x_2(t) = x_{10}^2 x_{20} \implies x_2(t) = \frac{x_{10}^2 x_{20}}{x_1^2(t)} \tag{2.14}$$

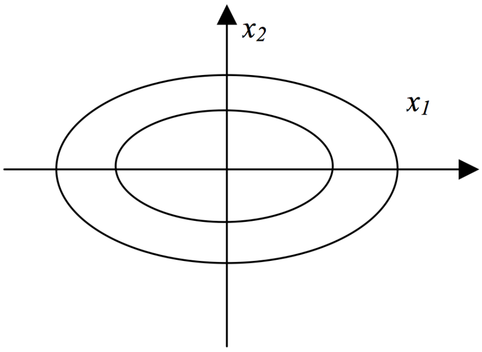


Obr. 2.7: Nestabilný uzol $s_1 = 1$, $s_2 = -2$.

Stred ($s_{1,2} = \pm i\omega = \pm i\sqrt{|c|}$)

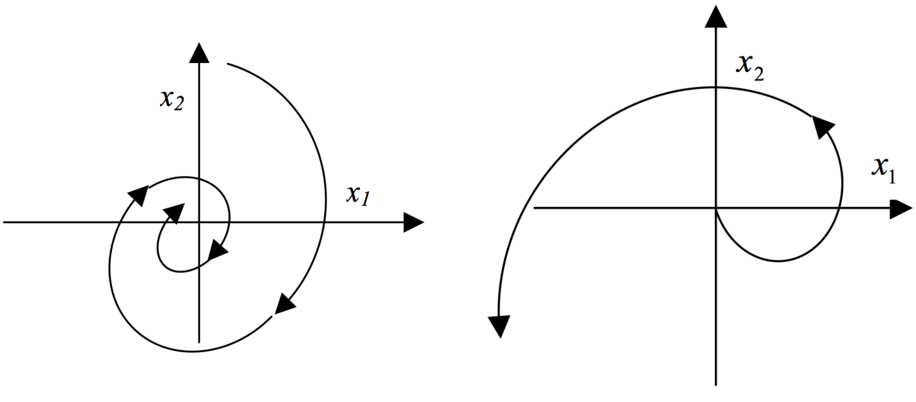
$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{cx_1}{x_2} \implies x_2 dx_2 = cx_1 dx_1 \tag{2.15}$$

Integráciou: $x_2^2 - cx_1^2 = k$. Fázový portrét trajektórie **stred** je elipsa.



Obr. 2.8: Stred

Stabilné ohnisko ($s_{1,2} = \alpha \pm i\omega$; $\alpha = d/2 < 0$; $\omega = \sqrt{|(d/2)^2 + c|}$)



Obr. 2.9: Stabilné, resp. nestabilné ohnisko

Pre komplexne združené korene môžeme stavové premenné vyjadriť v tvare:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) \\ x_2(t) &= y'(t) = e^{\alpha t}\left[(\alpha c_1 + \omega c_2)\cos \omega t + (\alpha c_2 - \omega c_1)\sin \omega t\right] \end{aligned} \tag{2.16}$$

Nestabilné ohnisko ($s_{1,2} = \alpha \pm i\omega$; $\alpha = d/2 > 0$; $\omega = \sqrt{(d/2)^2 + c}$), fázová trajektória je rozvíjajúca špirála.