Prednáška 3

Príklad 8 *Uvažujme nelineárny autonómny systém*

$$y''(t) + 3y'(t) + 4y^3(t) - y(t) = 0.$$

Úloha. *Nájdite singulárne body a rozhodnite o stabilite v okolí singulárnych bodov. Nakreslite výsledný fázový portrét nelineárneho systému – urobte záver týkajúci sa globálnej stability.*

Riešenie:

1. *Stavové rovnice (SKT):*

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = y'(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -3x_2(t) - 4x_1^3(t) + x_1(t)\end{aligned}$$

2. *Singulárne body:*

$$0 = x_2 \quad \Rightarrow \quad x_{2s} = 0$$

$$0 = -3x_2(t) - 4x_1^3 + x_1(t) \quad \Rightarrow \quad x_1(1 - 4x_1^2(t)) = 0$$

$$x_{1s} = 0,$$

$$x_{2s_{1,2}} = \pm 0.5$$

Vypočítané singulárne body:

$$^1x_s = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}; \quad ^2x_s = \begin{bmatrix}0.5\\0\end{bmatrix}; \quad ^3x_s = \begin{bmatrix}-0.5\\0\end{bmatrix};$$

Linearizácia v okolí singulárnych bodov:

Jakobiho matica $\quad \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_s) = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 - 12x_1^2(t) & -3\end{bmatrix}$

(a) *Pre singulárny bod* ${}^1x_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *je charakteristická rovnica linearizovaného systému*

$$\boldsymbol{J}\left({}^1x_s\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det\left[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}\left({}^1x_s\right)\right] = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix} = s^2 + 3s - 1,$$

teda póly sú

$$s_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+4}}{2},$$
$$s_1 = 0.3028, \quad s_2 = -3.3028.$$

Singulárny bod ${}^1x_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *je nestabilný a podľa koreňov charakteristickej rovnice je jeho fázový portrét* ***sedlo****.*

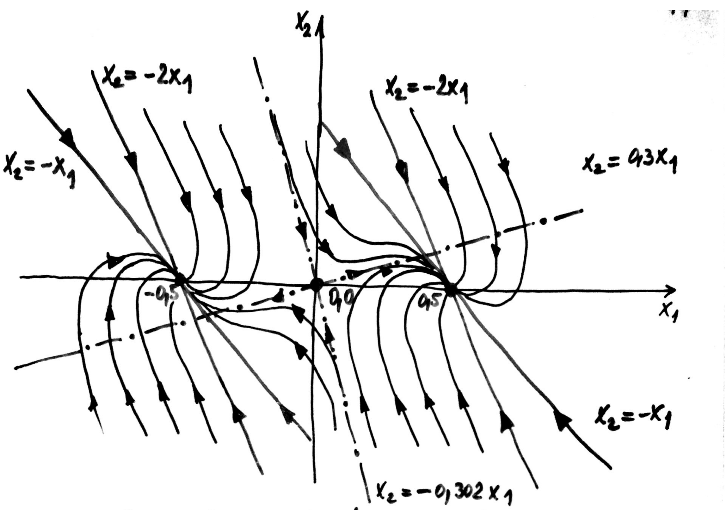
(b) *Pre singulárny bod* ${}^2x_s = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$ *je charakteristická rovnica linearizovaného systému*

$$\boldsymbol{J}\left({}^2x_s\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det\left[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}\left({}^1x_s\right)\right] = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} = s^2 + 3s + 2,$$

teda póly sú $s_1 = -1, \quad s_2 = -2$. *Singulárny bod* ${}^2x_s = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$ *je stabilný a podľa koreňov charakteristickej rovnice je jeho trajektória* ***stabilný uzol****.*

(c) *Pre singulárny bod* ${}^3x_s = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$ *platí rovnaký záver ako pre singulárny bod* ${}^2x_s$.

Fázové trajektórie: aby sa dalo rozhodnúť o globálnej stabilite, je nutné zakresliť fázové trajektórie v celej fázovej rovine



Obr. 3.1: Fázový portrér nelineárneho systému