Prednáška 5

Priama Ljapunova metóda

Ljapunova teória stability: umožňuje študovať stabilitu systému bez toho, aby sa riešeili pohybové DR.

A.M. Ljapunov predložil 2 metódy na vyšetrovanie stability:

1. Prvá Ljapunova metóda – posudzuje stabilitu NDS podľa približného lineárneho modelu (stabilita v malom/nepriama Ljapunova metóda)
2. Druhá Ljapunova metóda (priama Ljapunova metóda) – umožňuje posudzovať stabilitu v malom a vo veľkom pri lineárnych a nelineárnych DS (s budením a bez budenia)

– úspech metódy spočíva v nájdení vhodnej Ljapunovej funkcie a v stanovení jej definitnosti.

– Ljapunove funkcie sú matematickým zobecnením základného fyzikálneho princípu: pri pohybe DS v systéme klesá (ubúda) z celkovej energie.

– Ak je rovnovážny stav systému asymptotický stabilný – pri pohybe po trajektórii sa akumulovaná energia systému s rastúcim časom zmenšuje a svoju minimálnu hodnotu dosiahne v rovnovážnom stave. Ljapunova metóda spočíva v nájdení vhodnej funkcie, ktorú si predstavujeme ako zovšeobecnenú energiu.

– Definitnosť Ljapunovej funkcie spolu s definitnosťou jej časovej derivácie pozdĺž riešenia stavovej rovnice systému dáva informáciu o stabilite systému.

Definícia 1 *Ljapunovova funkcia je taká reálna funkcia $V(\boldsymbol{x})$, ktorá spĺňa nasledujúce podmienky:*

(a) *$V(\boldsymbol{x})$ je spojitá a má spojité parciálne derivácie*

(b) *$V(\boldsymbol{x})$ je pozitívne definitná: $V(\boldsymbol{x}) > 0, \boldsymbol{x} \neq 0$, $V(0) = 0$*

(c) *časová derivácia $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ pozdĺž riešenia daného NDS $\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x})$ je negatívne definitná (negatívne semidefinitná)*

Derivácia $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ podľa času pozdĺž riešenia daného systému je definovaná vzťahom:

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \frac{d}{dt}V(\boldsymbol{x}) = \frac{dV(x_1, \cdots, x_n)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

$$\frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}f_2 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n}f_n$$

Veta 1 *(Ljapunove kritérium): Ak existuje k danému systému $\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x})$ pozitívne definitná Ljapunova funkcia ($V(\boldsymbol{x}) > 0, \boldsymbol{x} \neq 0, V(0) = 0$) a jej derivácia $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ je negatívne semidefinitná (resp. negatívne definitná) – je rovnovážny stav $\boldsymbol{x} = 0$ Ljapunovsky stabilný (resp. asymptoticky stabilný).*

Ljapunove vety o stabilite sú iba postačujúce podmienky, t.j. ak nemôžeme k danému systému nájsť vhodnú Ljapunovu funkciu, neznamená to, že systém je nestabilný – dá sa konštatovať, že pokus o určenie stability sa nevydaril.

5.1 Generovanie Ljapunovskej funkcie pre nelineárne autonómne systémy

– zatiaľ neexistuje jednoduchá a spoľahlivá metóda, ktorá by nám umožnila stanoviť vhodnú Ljapunovu funkciu pre ľubovoľný nelineárny systém

– voľba Ljapunovej funkcie v tvare kvadratickej formy – všeobecne zlyháva

– existuje viacero metód pre generovanie $V(x)$ – zaujímavé sú tie, ktoré sa dajú využiť pre praktické riešenie

5.1.1 Voľba Ljapunovej funkcie na základe fyzikálnej analógie.

– pri nelineárnych rovniciach nižšieho rádu môžeme nájsť jednoduchú fyzikálnu interpretáciu Ljapunovej teórie a podľa nej navrhnúť vhodnú funkciu $V(x)$.

– táto metóda sa často využíva v teoretickej mechanike, v robotike, ..., a pomocou nej sa dajú vysvetľovať súvislosti medzi Ljapunovskou teóriou stability a teóriou optimálnych systémov.

Príklad 9 *Uvažujme mechanický systém pružina-hmota-tlmič, v ktorom direktívna sila $f(x)$ a tlmiaca sila $g(\dot{x})$ sú nelineárne. Pre pohyb systému platí*

$$\ddot{x} + g(\dot{x}) + f(x) = 0, \tag{5.1}$$

$$x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

U konzervatívneho systému: tlmenie $g(\dot{x}) = 0$ a celková energia je konštantná.

Ak riešime konzervatívny systém vo fázovej rovine

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -f(x_1) \end{aligned} \tag{5.2}$$

Pre $f(x_1) \neq 0$ *pri* $x_1 \neq 0$ *má systém 1 rovnovážny stav v počiatku súradníc (stred). Trajektórie sú uzavreté krivky:*

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f(x_1)}{x_2}$$

Integráciou dostaneme rovnicu trajektórie

$$x_2\, dx_2 = -f(x_1)dx_1$$

$$\frac{x_2^2}{2} + \int f(x_1)dx_1 = c \tag{5.3}$$

Celková energia $E(x_1, x_2)$ *pohybujúceho sa systému je daná kinetickou energiou* $x_2^2/2$ *a potenciálnou energiou* $\int f(x_1)dx_1$.

$$E(x_1, x_2) = E_k + E_p = \frac{x_2^2}{2} + \int f(x_1)dx_1 \tag{5.4}$$

Trajektórie systému sú krivkami celkovej energie tohto konzervatívneho systému:

časová zmena energie = 0, t.j.

$$\frac{dE(x_1, x_2)}{dt} = x_2\dot{x}_2 + f(x_1)\dot{x}_1 = x_2\left(\dot{x}_2 + f(x_1)\right) = 0$$

Zo stavových rovníc $\dot{x}_2 = -f(x_1)$

Pre nekonzervatívne systémy (s tlmením $g(x_2)$*) kde* $g(x_2)x_2 > 0$ *pre* $x_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -f(x_1) - g(x_2) \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-f(x_1) + g(x_2)}{x_2} \tag{5.5}$$

Časová zmena energie systému:

$$\frac{dE(x_1, x_2)}{dt} = x_2\left(\dot{x}_2 + f(x_1)\right) = -g(x_2)x_2 \tag{5.6}$$

Nakoľko $g(x_2)x_2 > 0$ *pre* $x_2 \neq 0$ *je vidieť, že energia systému stále klesá so zväčšujúcim sa časom riešenia.*

– uviesť obrázok riešenia mechanického systému vo fázovej rovine!

5.1.2 Príklad na NDS – zavesené inverzné tlmené kyvadlo

Tlmené kyvadlo – zavesené na tuhom zavese a môže sa pohybovať v celom rozsahu uhlov.

Matematické kyvadlo (II. Newtonov zákon):

$$\ddot{\varphi}(t) = -gl \sin \varphi(t) - \frac{kl}{m}\dot{\varphi}(t) + \frac{F(t)}{m}$$

m hmotnosť koncovej záťaže kyvadla

l dĺžka nehmotného závesu

k koeficient trenia

g gravitačné zrýchlenie

$\varphi(t)$ uhlová výchylka

$F(t)$ vonkajšia sila na vstupe systému (napr. sily vyvolané vhodným pohonom pripojeným k závesu kyvadla)

V rozbore úlohy predpokladáme, že $F(t)$ poznáme a môžeme ju aj ľubovoľne ovládať a nechať pôsobiť na kyvadlo

$$x_1(t) = \varphi(t); \quad x_2(t) = \dot{\varphi}(t); \quad u(t) = \frac{F(t)}{m}; \quad y = \varphi(t)$$

Model:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -gl \sin x_1(t) - \frac{kl}{m}x_2(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned} \tag{5.7}$$

1. Ak $u \equiv 0$, na systém nebudeme pôsobiť. Nebudený systém – tzv. autonómny systém.

   Rovnovážny stav $\dot{x}_i = 0$ implikuje

   $$\begin{array}{llll} x_1^{e1} & = 0, & x_2^{e1} & = 0 \quad \text{(zavesené dole)} \\ x_1^{e2} & = \pi, & x_2^{e2} & = 0 \quad \text{(inverzné kyvadlo zavesené hore)} \end{array}$$

   Rovnovážny stav (fyzikálny kontext):

   – $e1$ je stabilný,

   – $e2$ je nestabilný

   – v $e1$ sa systém udrží (reálne pozorovateľný)

   – v $e2$ sa systém bez vonkajšieho pôsobenia neudrží.

   Pre vyšetrovanie stability uvažujme energiu systému

- v dolnej polohe (rýchlosť = 0) je energia vždy menšia než v akejkoľvek inej polohe;
- v hornej polohe (rýchlosť = 0) je energia vždy väčšia.

Uvažujme funkciu $V(\boldsymbol{x})$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}mx_2^2 + mgl(1 - \cos x_1),$$

ktorá má globálne minimum v rovnovážnom stave $(0, 0)$. Nech $\boldsymbol{x}(t)$ je trajektória systému a budeme uvažovať, ako sa vyvíja funkcia $V(x(t))$ na tejto trajektórii (pozdĺž tejto trajektórie):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{x}(t)) &= \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \\
&= \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 \\
&= (mx_2)\dot{x}_2 + (mgl \sin x_1)\dot{x}_1
\end{aligned}$$

Pretože $\boldsymbol{x}(t)$ je trajektória systému, musí splňovať rovnice (5.7), preto za jej časovú deriváciu dosadíme z (5.7)

$$\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{x}(t)) = (mlg \sin x_1)x_2 + (mx_2)(-gl \sin x_1 - \frac{kl}{m}x_2) = -klx_2^2 \tag{5.8}$$

Vidíme, že z funkcie $V(\boldsymbol{x}(t))$ ubúda (okrem $x_2 = 0$), t.j. keď je rýchlosť kyvadla $= 0$.

Energia $V(\boldsymbol{x}(t))$ klesá a najmenšia je v rovnovážnom stave $(0, 0)$, ktorý je stabilný.

2. V ďalšom sa budeme zaoberať ako je možné zmeniť nežiadúce vlastnosti nelineárneho systému.

   Cieľ: Úloha je stabilizovať hornú polohu kyvadla pomocou statickej stavovej spätnej väzby, t.j. na základe okamžitých ohdnôt stavu chceme určiť hodnotu akčnej veličiny, ktorú aplikujeme na kyvadlo tak, že ho udržíme asymptoticky v hornej polohe (proti poruchám a odchýlkam).

   Matematicky to znamená, že potrebujeme určiť funkciu $u = \alpha(x_1, x_2)$ pre ktorú by systém

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= -gl \sin x_1(t) - \frac{kl}{m}x_2(t) + \alpha(x_1, x_2) \\
y(t) &= x_1(t)
\end{aligned} \tag{5.9}$$

   mal jediný asymptoticky stabilný stav $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$.

   Použijeme Ljapunovský návrh, ktorý pozostáva z nasledujúcich krokov:

   – určíme funkciu, ktorá bude Ljapunovskou funkciou pre cieľový systém v uzavretej slučke

– vypočítame riadenie, ktoré to zaistí.

Ako v prvom prípade (spodný rovnovážny stav) použijeme funkciu celkovej energie kyvadla s tým, že jej potenciálnu zložku budeme počítať vzhľadom k hornému rovnovážnemu stavu, lebo ten chceme stabilizovať. Táto funkcia má tvar:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}mx_2^2 + mgl(1 - \cos(x_1 - \pi)) = \frac{1}{2}mx_2^2 + mgl(1 + \cos x_1) \tag{5.10}$$

Časová derivácie Ljapunovskej funkcie (5.10):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\boldsymbol{x}(t)) &= \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 \\ &= (mx_2)\dot{x}_2 - (mgl\sin x_1)\dot{x}_1 \end{aligned}$$

Nakoľko podľa predpokladu je $\boldsymbol{x}(t)$ trajektóriou systému, musí splňovať rovnice kyvadla (5.9) – za časové derivácie dosadíme z (5.9) do (5.10).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\boldsymbol{x}(t)) &= (mx_2)\left(\alpha(x_1, x_2) - gl\sin x_1 - \frac{kl}{m}x_2\right) - (mgl\sin x_1)x_2 \\ &= mx_2\left(\alpha(x_1, x_2) - 2gl\sin x_1\right) - klx_2^2 \end{aligned}$$

Ponúka sa voľba $\alpha(x_1, x_2) = 2gl\sin x_1$, ktorá vedie na

$$\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{x}(t)) = -klx_2^2. \tag{5.11}$$

Opakujeme úvahu, že kyvadlo zaujme polohu, v ktorej je funkcia $V(x_1, x_2)$ minimálna. Takýto stav je iba jeden: $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$.

Vypočítaná spätná väzba umelo modifikuje gravitačné pole – ak dosadíme za $\alpha(x_1, x_2) = 2gl\sin x_1$ do (5.9) dostávame:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= gl\sin x_1(t) - \frac{kl}{m}x_2(t) \\ y(t) &= x_1(t), \end{aligned} \tag{5.12}$$

čo je vlastne popis kyvadla (prevráteného hore nohami). Gravitačné pole pôsobí opačným smerom – pôvodne nestabilná poloha sa stala stabilná. Je potrebné si uvedomiť, že $\alpha(\boldsymbol{x})$ je statická spätná väzba, t.j. dáva informácie iba o polohe, rýchlosť nie je potrebná.

5.2 Stabilita nelineárnych systémov – porovnanie

stabilita (všeobecne): najdôležitejšia vlasnosť regulačných obvodov (lineárnych alebo nelineárnych)

stabilita nelineárnych obvodov: širší pojem a odlišuje sa od stability lineárnych systémov

stabilita lineárnych systémov: je vlastnosťou týchto systémov a nezávisí na ich okamžitom stave, vstupných signáloch, počiatočných podmienkach

stabilita LDS: definuje sa ako schopnosť vrátiť sa do rovnovážneho stavu, ak skončilo pôsobenie signálu, ktorý systém z toho stavu vyviedol

stabilita NDS: definícia stability pre LDS je nepostačujúca (napr. rovovážnych stavov je v NDS viac – odpovedajú im singulárne body)

5.2.1 Rozsah platnosti stability NDS

– LDS je stabilný/nestabilný pre akékoľvek počiatočné podmienky – za istých predpokladov to platí aj pre nelineárny systém – hovoríme o **globálnej stabilite** (o stabilite vo veľkom). Systém je globálne stabilný, ak je stabilný pre všetky počiatočné podmienky.

– pri NDS sa často stretávame so stabilitou pri malých výchylkách v istom okolí rovnovážneho stavu – **lokálna stabilita** (stabilita v malom). NDS je stabilný lokálne, ak je stabilný pre počiatočné podmienky vo vnútri oblasti okolo rovnovážneho stavu. **Ak je systém stabilný globálne, je automaticky stabilný aj lokálne (naopak to neplatí).**

5.2.2 Ustálené stavy NDS

– LDS majú 1 ustálený stav pre $t \to \infty$ alebo sa nestaľujú vôbec (teda sú nestabilné)

– NDS disponujú na rozdiel od LDS viacerými ustálenými stavmi – dva typy ustálených stavov:

- rovnovážne ustálené stavy (kľudové stavy): nulové vzdialenosti v jednotlivých osiach
- periodické ustálené stavy (medzné cykly): kmity o konštantnej amplitúde a frekvencii.

Ak vyšetrujeme stabilitu NDS – nehovoríme o stabilite systému, ale o **stabilite jeho rovnovážnych stavov**, ktoré možu byť stabilné alebo nestabilné.

NDS má toľko rovnovážnych stavov,koľko existuje riešení sústav rovníc: $\dot{x}_1 = 0$; $\dot{x}_2 = 0, \cdots, \dot{x}_n = 0$ (žiaden rovnovážny stav, jeden, dva, . . . , nekonečne veľa) – pozri signulárne body LDS (a zovšeobecnenie na NDS)

Ak majú stavové trajektórie v okolí SB smer dovnútra (k SB), speje systém do stavu kľudu a tento rovnovážny stav je staiblný (ak stavové trajektórie opúšťajú singulárne body, rovnovážny stav je nestabilný). Pre NDS je to hodnotenie lokálnej stability, nakoľko NDS disponuje viacerými rovnovážnymi stavmi

Ďalším typov ustálených stavov NDS sú periodické ustálené stavy – sú to ustálené vlastné kmity (autooscilácie) – v stavovej rovine sú reprezentované uzavretými trajektóriami (medzné cykly)

Medzné cykly:

(a) stabilné – trajektórie smerujú z blízkeho okolia k MC

(b) nestabilné – trajektórie sa vzdiľujú od MC

(c) polostabilné – trajektórie sa z vonkajšej strany približujú, zvnútra vzdiaľujú

(d) polonestabilné – naopak.

5.2.3 Ljapunova teória stability (pre systémy so sústredenými parametrami)

1. Reálny systém
$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = f[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t] \tag{5.13}$$

2. Úvahy o stabilite – voľný systém $\iff$ $\boldsymbol{u}(t) = 0$, potom (5.13) je autonómny, t.j.
$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = f[\boldsymbol{x}(t)] \tag{5.14}$$

3. Rovnovážny stav $\boldsymbol{x}_r$ vyhovuje rovnici $f(\boldsymbol{x}_r) = 0$, pretože $\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}_r = 0$.

4. Rovnovážny stav často býva začiatok SS $f(0) = 0$.

5. Definícia stability, ak riešenie (5.14) existuje:

   Definícia 2 *Ak $\boldsymbol{x}_r = 0$ je rovnovážny stav systému (5.14), hovoríme, že $x_r = 0$ je stabilný rovnovážny stav, ak riešenie rovnice (5.14) $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}(t_0))$, ktoré začína v nejakom stave $\boldsymbol{x}(t_0)$, blížko rovnovážnemu stavu $\boldsymbol{x}_r = 0$ zostane blízko rovnovážneho stavu $\boldsymbol{x}_r$, alebo sa k nemu približuje.*

   Definícia 3 (V Ljapunovskom zmysle:) *Systém (5.14) je stabilný v LJ. zmysle v rovnovážnom stave $\boldsymbol{x}_r = 0$, ak pre každé reálne číslo $\epsilon > 0$ existuje $\delta(\epsilon) > 0$ také, že každé riešenie $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}(t_0))$ systému (5.14), ktoré začína v nejakom δ okolí rovnovážneho stavu $\boldsymbol{x}_r = 0$, kde $|\boldsymbol{x}(t_0)| < \delta$, bude v ϵ okolí rovn. stavu $\boldsymbol{x}_r = 0$:*
$$|\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}(t_0))| < \epsilon, \quad pre \quad \forall t > t_0$$