Prednáška 6

Metódy syntézy nelineárnych systémov

Úlohou syntézy je navrhnúť k lineárnemu/nelineárnemu systému vhodný lineárny/nelineárny regulátor, ktorý zaistí splnenie cieľa syntézy, t.j. splnenie požiadavky na požadované chovanie URO.

Ak je cieľom stabilné správanie + vhodná dynamika pri veľkých rýchlostiach a pracovných rozsahoch je nutné nelineárne riadenie.

Stabilizačný problém: úlohou je nájsť pre definovaný NDS

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$$

taký zákon riadenia $\boldsymbol{u}$, aby pri ľubovoľnej počiatočnej podmienke $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ smeroval stav $\boldsymbol{x}(t)$ do požadovaného rovnovážneho stavu (a dosiahol ho v konečnom čase).

Príklady na stabilizačné úlohy: regulácia teploty v peci na konštantnú teplotu, regulácia hladiny v nádobách, regulácia letu lietadla v konštantnej výške.

Problém sledovania: Je zadaný systém

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t)) \end{aligned} \tag{6.1}$$

a regerenčná trajektória výstupu

$$\boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{y}_{ref}(t). \tag{6.2}$$

Úlohou je nájsť také riadenie $\boldsymbol{u}(t)$, aby pri pohybe z ľubovoľného počiatoćného stavu v oblasti Ω konvergovala regulačná odchýlka

$$\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{w}(t) - \boldsymbol{y}(t) \to 0$$

a stav zostal ohraničený.

Príklad na sledovanie: robotické systémy (buď je referenčná trajektória známa alebo sa dá vypočítať).

Úlohy sledovania sú obtiažnejšie ako úlohy stabilizácie, pretože pr sledovaní musí riadiaci systém udržiavať nielen stabilný stav systému, ale tiež udržiavať výstup systému na referenčnej trajektórii.

Postup pri návrhu riadenia (dodržať pri zadaní)

Pri návrhu riadenia dodržiavame nasledovné kroky:

1. fyzikálny systém modelujeme pomocou systému DR
2. špecifikujeme požadované správanie, voľba snímačov, akčných členov – modelujú sa ich vlastnosti
3. navrhneme podľa zvolenej metódy vhodnú riadiacu štruktúru a parametre riadenia
4. analyzujeme správanie výsledného systému (URO) – simuláciou na PC. Ak vlastnosti riadenia nevyhovujú, návrat k bodu 3 – zmena metódy pre návrh riadenia.
5. implementácia riadiaceho systému (číslicové riadenie).

Pozn. Návrh riadiaceho systému pre NS musí zaistiť:

- stabilitu (globálnu)
- pre typické trajektórie musí byť zaistená vyhovujúca rýchlost a presnosť odozvy.
- výsledný systém musí byť:
  - robustný (necitlivý na poruchy, šum, malé zmeny parametrov, vplyv nemodelovateľnej dynamiky)
  - dostupný cenovo

6.1 Linearizácia nelineárnych systémov

- fyzikálne systémy sú **nelineárne** – riadenie je náročné

– snaha NDS – linearizovať, nakoľko metódy riadenia lineárnych systémov sú podrobne rozpracované – umožňujú jednoduchý návrh riadiaceho systému

1. linearizácia v jednom pracovnom bode
2. linearizácia vo viacerých pracovných bodoch
3. exaktná (spätnoväzobná) linearizácia

6.1.1 Linearizácia v jednom pracovnom bode

– existuje množstvo prípadov, keď NDS môžeme linearizovať v pracovnom bode avšak lineárna aproximácia dáva iba lokálny popis chovania systému a zanedbáva všetky špeciálne javy, ktoré NDS majú. Ak to vieme tolerovať – môžeme využiť všetky známe metódy riadenia LDS.

6.1.2 Linearizácia vo viacerých pracovných bodoch

$\equiv$ gain scheduling (programové zosilnenie)

– volíme viacero pracovných bodov, ktoré dostatočne pokrývajú pracovnú oblasť a v ich blízkosti systém linearizujeme.

– pre každú linearizáciu navrhneme vhodný lineárny regulátor

– globálny nelineárny regulátor získame prepínaním príslušných regulátorov (riadenie letu lietadla).

6.1.3 Exaktná linearizácia

– najvšeobecnejší spôsob linearizácie (spätnoväzobná linearizácia)

– princíp metódy spočíva v snahe vykompenzovať nelinearizty systému inými nelinearitami a pretransformovať ho na lineárny systém.

– kompenzácia nelinearít môže byť **čiastočná** alebo **úplná**, vykonať ju môžme buď **globálne** v celom stavovom priestore alebo **lokálne** v určitej oblasti.

Príklad 10 *Lineárny matematický model spätnoväzobných systémov môžeme získať exaktnou linearizáciou pomocou nelineárnej spätnej väzby. Základná myšlienka spočíva v kompenzácii nelineárnej (spojitej) funkcie riadeného systému*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \tag{6.3}$$

nelineárnou spätnou väzbou

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{x})\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right]. \tag{6.4}$$

Za podmienky, že $\boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{x})$ existuje.

Po dosadení (6.4) *do* (6.3)*:*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{x})\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{6.5}$$

Rovnica (6.5) *opisuje dynoamiku lineárneho systému. Voľbou konštánt matice $\boldsymbol{A}$ možno získať požadovanú dynamiku exaktne linearizovaného systému.*

Príklad 11 *Vytvorte lineárny model systému:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - x_2^3 + u \end{aligned} \tag{6.6}$$

pomocou exaktnej linearizácie.

1. *Linearizujúca spätná väzba:*

$$u = -x_1^2 + x_2^3 - a_1 x_1 - a_2 x_2.$$

2. *Model linearizovaného systému:*

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -a_1x_1 - a_2x_2\end{aligned}\right\} \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ a_1 & -a_2\end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

3. *CHR linearizovaného systému:*

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix}s & -1\\ a_1 & s + a_2\end{vmatrix} = s^2 + a_2s + a_1$$

4. *Vlastné čísla CHR:*

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_2}{2} \pm \sqrt{\frac{a_2^2}{4} - a_1}$$

6.2 Základné metódy syntézy riadenia

– neexistuje rovnako ako pre analýzu ani syntézu riadenia univerzálna metóda pre návrh vhodného regulátora.

6.2.1 Lineárny/linearizovaný systém s nelineárnym riadením

- pre riadenie lineárneho systému (LDS – získaný linearizáciou s vyhovujúcou presnosťou v *požadovanej pracovnej oblasti* – popis je tvorený LDR)
- volíme PID-regulátor alebo stavový regulátor. (parazitné nelinearity v snímačoch, akčných členoch sa snažíme pri prvom návrhu kompenzovať alebo zanedbať). Ak sa to nedá – syntézu vykonáme aj s parazitnými nelinearitami (**metóda harmonickej linearizácie a ekvivalentných prenosov**)
- stabilitu riadiacej štruktúry zaistíme pomocou Ljapunovej teórie stability (**Popoveho kritéria**)
- dynamické vlastnosti výsledného návrhu overíme simuláciou (spojito pracujúce regulátory s parazitujúcimi nelinearitami)
  - *vplyv nasýtenia akčných členov*: obmedzenie výstupu akčného člena vedie na zhoršenie prechodových dejov a tiež ku nestabilite pri väčších poruchách.
    Ak má regulátor "I"zložku – po dosiahnutí hranice obmedzenia sa nezväčšuje vstup na DS, ale integrátor pracuje ďalej (integruje) – vplyvom obmedzenia akčnej veličiny je reakcia regulátora na zmenu polarity e opozdená – "WINDUP"
  - *nespojito pracujúce regulátory* - používajú sa vtedy, ak nie je spojitá akčná veličina z konštrukčného/ekonomického hľadiska výhodná.

  Návrh jednoduchých nespojito pracujúcich regulátorov môžeme vykonať **metódou ekvivalentných prenosov** alebo simuláciou.

6.2.2 Nelineárny DS s lineárnym alebo nelineárnym riadením

– ak sme nevykonali linearizáciou NDS, môžeme navrhunúť ku NDS vhodný regulátor pomocou

(a) Ljapunovej teórie (priamej)

(b) simuláciou

Implementácia riadenia nelineárnych systémov: zložitejšie algoritmy riadenia NDS si vyžadujú diskrétnu implementáciou. Keďže priamy návrh diskrétnych algoritmov je časovo náročný, postupujeme nasledovne:

1. návrh riadenia v spojitej oblasti
2. diskrétna realizácia s malou T_{vz}

Metódy analýzy a syntézy DS

- priama Ljapunova metóda (A+S)
- metóda fázovej roviny (A)
- metóda harmonickej rovnováhy (S)
- spätnoväzobná linearizácia (S)

Príklad 12 *Navrhnite riadenie $u(t)$ pomocou priamej Ljapunovej metódy pre nelineárny systém*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1^2(t) - x_2^3(t) + u(t) \end{aligned} \tag{6.7}$$

tak, aby rovnovážny stav $(0,0)$ bol stabilný.

1. *Podľa LM treba nájsť pre systém (6.7) Ljapunovu funkciu, ktorá musí byť* ***kladne definitná*** *a jej derivácia pozdĺž trajektórie systému musí byž* ***záporne definitná***.
2. *Zvoľme funkciu $V(x) = x_1^2(t) + x_2^2(t)$ za kandidáta na Ljapunovu funkciu systému (6.7). Funkcia vyhovuje podmienkam:*

   – je spojitá a jej parciálne derivácie sú spojité v okolí rovnovážneho stavu

   – je kladne definitná, $V(0,0) = 0$, $V(x_1, x_2) > 0$.

   – jej derivácia pozdĺž (6.7) je

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial V}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1^2 - x_2^3 + u) \\ &= 2x_1x_2 + 2x_2(x_1^2 - x_2^3 + u) \\ &= 2(x_1x_2 + x_2x_1^2 - x_2^4 + x_2u) \end{aligned} \tag{6.8}$$

Podstatou návrhu stabilizujúceho riadenia pomocou priamej LM je nájsť funkciu, ktorá pri navrhunutom riadení spĺňa podmienky Ljapunovej funkcie – vo výraze (6.8) treba voliť

$u(t)$ tak, aby $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ bola záporne definitná funkcia – štruktúru zákona riadenia volíme tak, aby sa členy $(x_1x_2 + x_2x_1^2)$ vykrátili

– ak zvolíme $u1 = -x_1^2 - x_1$, $V(\boldsymbol{x})$ splĺňa podmienky Ljapunovej funkcie, lebo $\dot{V}(t) = -2x_2^4 \leq 0$.

*– voľbou zákona riadenia vieme ovplyvniť **kvalitu prechodových dejov** a nie len stabilitu rovnovážneho stavu.*

Voľbou

$$u_2 = -x_1^2 - x_1 - x_2$$

získame vyššiu kvalitu prechodových dejov.

*– cieľom týchto metód je pre daný NDS navrhnúť funkciu, ktorá by mohla byť Ljapunovou funkciou (generovanie Ljapunových funckií – **metóda variabilného gradientu**).*