Prednáška 7

Teória optimálneho riadenia. Dynamická optimalizácia

Optimalizačný problém: vzniká pri výbere z viacerých variant riešenia – hľadanie najlepšieho variantu

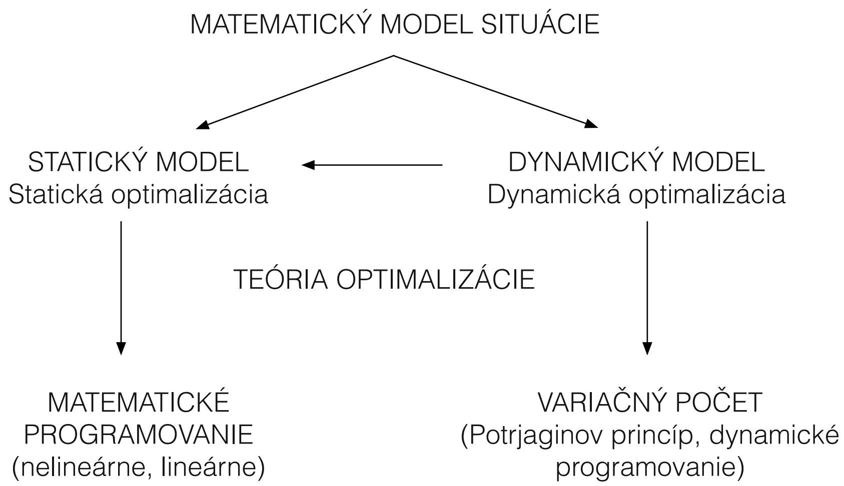
Optimálne riešenie: možné riešenie, pre ktoré neexistujú lepšie riešenia

Matematická formulácia optimalizačného problému: matematický model problému + kritérium optimality $\rightarrow$ výber najlepšieho riešenia

Teória optimalizácie: riešenie optimalizačných problémov (určenie štruktúry a hodnôt parametrov *riadiaceho* systému tak, aby sa dosiahla najlepšia *kvalita riadenia*)

Dynamická optimalizácia: cieľom je optimálny priebeh prechodových javov regulovanej veličiny pri zmene riadiacich alebo poruchových veličín

Statická optimalizácia: cieľom je dosiahnutie optimálnych hodnôt veličín v ustálenom stave, ktoré zabezpečia najlepší technologický a ekonomický výsledok riadenia (maximálna energetická účinnosť, kvalita výroby, minimálne straty).



7.1 Klasifikácia optimalizačných problémov

– **Alokačné problémy** – optimálne rozdelenie zdrojov a určenie optimálneho výrobného programu (maximalizácia zisku)

– **Problémy plánovania** – plánovanie investícií do výrobných zariadení, plánovanie výroby (na základe dopytu, produkcie, výrobných a skladových nákladov), napr. maximalizovať celkové výrobné náklady voľbou optimálnej produkcie

– **PROBLÉMY OR DYNAMICKÝCH SYSTÉMOV** (obsah predmetu)

– **Problémy aproximácie** – aproximácia funkcie na danom intervale inou funkciou. Cieľ: minimalizovať chybu aproximácie v zmysle určitého kritéria

– **Konfliktné situácie** (hry) – situácie s protikladnými záujmami účastníkov

7.2 Moderná teória riadenia

7.2.1 Historické obdobia TAR

– 1868: **Maxwell**, matematická analýza SV riadiacich systémov

– 1900–1960: klasické obdobie (frekvenčné m.)

– 1960: moderné obdobie (časová oblasť)

7.2.2 Optimalita v prírodných systémoch

– dosiahnutie optimality je základnou vlastnosťou pohybu v prírodných systémoch

– *Princíp optimality* (**Johann Bernoulli** – 1696 – úloha o brachystochrone)

– *Princíp časovej optimality v optike* (**P. de Fermat** – 17. st – minimum-time principle)

– **Eulerove** práce (1744)

– **Hamilton**: systém sa pohybuje tak, že sa minimalizuje časový integrál rozdielu medzi jeho kinetickou a potenciálnou energiou (*princípy maxima*)

– **Einstein** (1900): vzhľadom na 4D časopriestor sa pri pohybu systému čas maximalizuje

7.2.3 Základné práce modernej TAR

R. Bellman (1957) – dynamické programovanie

L. S. Pontrjagin (1958) – princíp maxima, časovo-optimálne problémy – *riadenie je reléového typu*

Kalman a kol. (1960) – začiatok *Modern control*:

1. Ljapunova teória pre NS v časovej oblasti
2. OR systémov, rovnice pre návrh LQ regulátora
3. Optimálna filtrácia + teória odhad, rovnice pre návrh diskrétneho Kalmanovho filtra

7.3 Problém optimálneho riadenia dynamického systému

- modely objektov, ktoré chceme optimalizovať – dynamické systémy
- uvažujme úlohu riadenia DS:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{f}_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \\ \dot{\boldsymbol{y}}(t) &= \boldsymbol{g}_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \end{aligned} \tag{7.1}$$

  kde

  $\boldsymbol{x}(t)$ stav systému

  $\boldsymbol{u}(t)$ riadiaci vektor

  $\boldsymbol{y}(t)$ výstupný vektor

- veličiny v systéme nemôžu nadobúdať ľubovoľných hodnôt, sú nejakým spôsobom obmedzené:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(t) &\in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^r \\ \boldsymbol{x}(t) &\in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{7.2}$$

- obvykle poznáme počiatočný stav DS: $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$. *Úlohou je riadiť systém tak, aby na konci intervalu riadenia* $[t_0, t_1]$ *bol systém v stave* $\boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{x}_1$
- Prechod z $\boldsymbol{x}(t_0) \to \boldsymbol{x}(t_1)$ môže byť uskutočnený rôzne – aby sme mohli vybrať **optimálne riadenie**, je nutné zvoliť **kritérium kvality riadenia**, ktoré ohodnotí riešenie úlohy, t.j. každému riešeniu priradí reálne číslo (vyberieme najlepšie)
- kritérim kvality riadenia v úlohách dynamickej optimalizácie:

$$J(t_0, \boldsymbol{x}(t_0), t_1, \boldsymbol{x}(t_1), \boldsymbol{u}(t)) = h(\boldsymbol{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} g(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)\mathrm{d}t,$$

  kde h, g sú skalárne funkcie.

- Úloha OR spočíva v určení takého riadenia $\boldsymbol{u}(t)$ systému (7.1), aby boli splnené obmedzenia (7.2) a bol dosiahnutý koncový stav $\boldsymbol{x}(t_1)$ a kritérium akosti riadenia bolo minimálne. Takéto riadenie nazveme optimálnym riadením $\boldsymbol{u}^*(t)$

Modifikácie.

- koniec trajektórie – čas t_1 a stav $\boldsymbol{x}(t_1)$ môže byť pevne zadaný – **úloha s pevným koncom trajektórie**
- ak nie je určený koncový čas t_1 – **úloha s voľným koncovým časom**
- koncový stav $\boldsymbol{x}(t_1)$ môže byť neurčený – **úloha s voľným koncom trajektórie**

Záver.

Regulačná úloha: úloha nájdenia extrému funkcionálu pri rešpektovaní obmedzení danými stavovou rovnicou systému (7.1) a obmedzujúcimi podmienkami (7.2).

7.4 Lagrangeova, Mayerova a Boltzova úloha

– 3 základné typy úloh

1. **Lagrangeova úloha**

   – spočíva v minimalizácii funkcionálu

$$J_1(\boldsymbol{x}(t)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} g(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t), t)\mathrm{d}t \tag{7.3}$$

   s obmedzením

$$f(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t) = 0. \tag{7.4}$$

   Úlohu riešime zavedením rozšíreného funkcionálu

2. **Mayerova úloha** – spočíva v minimalizácii funkcionálu

$$J_2(\boldsymbol{x}(t)) = g_1(\boldsymbol{x}(t), t)|_{t_0}^{t_1} = g_1(\boldsymbol{x}(t_1), t_1) - g_1(\boldsymbol{x}(t_0), t_0) \tag{7.5}$$

   s obmedzením (7.4)

3. **Boltzova úloha** – spočíva v minimalizácii funkcionálu

$$J_3(\boldsymbol{x}(t)) = g_1(\boldsymbol{x}(t), t)|_{t_0}^{t_1} + \int\limits_{t_1}^{t_2} g(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t), t)\mathrm{d}t \tag{7.6}$$

   s obmedzením (7.4)

Na základe skôr definovaných pojmov môžu byť formulované 2 varianty úlohy optimálneho riadenia pri známom stave systému:

1. **Problém programového OR** – pri známom počiatočnom stave systému

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}^*[t, \boldsymbol{x}_0]$$

2. **Problém spätného OR** – pri známom okamžitom stave systému

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}^*[t, \boldsymbol{x}(t)]$$

Záver.

Na rozdiel od POR $\boldsymbol{u}^*(t, \boldsymbol{x}_0)$, ktorý pre daný počiatočný stav $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0)$ môže byť stanovené dopredu (a uložené do OP počítača) ako daná funkcia času, je SOR $u^*(t, \boldsymbol{x}(t))$ generované v reálnom čase v závislosti na skutočnom okamžitom stave systému.

– z hľadiska realizovateľnosti je v obidvoch variantách dôležitá podmienka obmedzenia na vektor riadenia $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^r$

– problémy OR bez rešpektovania obmedzenia môžu byť riešené metódami klasického variačného počtu

– problém POR pri rešpektovaní obmedzenia môžu byť riešené princípom minima (maxima) Pontrjagina, ktorý môže byť interpretovaný ako zobecnenie nutných podmienok optimality vo forme Hamiltonovských kanonickým rovníc.

– problémy SOR – systém Riccatiho diferenciálnych rovníc.