

Úvod do nelineárných systémov

doc. Ing. Anna Jadlovská, PhD.

ZS 2016

Prednáška 1

1.1 Stručné zopakovanie pojmov z LDS

Uvažujme *lineárny* t -invariantný DS n -tého rádu (*LDS*):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

pričom $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$.

Rovnovážny stav $\mathbf{x}_r \in \mathbb{R}^n$ je stav neriadeného systému ($\mathbf{u}(t) = 0$ pre $\forall t$), $\dot{\mathbf{x}}(t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_r} = 0$

Rovnovážny stav LDS je určený riešením lineárnej homogénnej sústavy rovníc

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_r = 0 \iff \mathbf{x}_r = 0$$

Z matematického hľadiska je rovnovážny stav \mathbf{x}_r singulárnym bodom riešenia stavových rovníc.

Ustáleným stavom (pracovným bodom) $\mathbf{x}_r \in \mathbb{R}^n$ budeme nazývať stav systému pri konštantnom riadení

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_{konst} \neq 0, \quad \text{pre } \forall t.$$

Ustálené stavy LDS:

$$\mathbf{x}_r = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_{konst},$$

za predpokladu, že matica \mathbf{A} je regulárna.

Nelineárny t -invariantný DS (n -tého rádu)

NDS:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]; & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)],\end{aligned}$$

kde $\mathbf{f}[\cdot]$, $\mathbf{h}[\cdot]$ sú dané nelineárne vektorové funkcie.

Rovnovážny stav NDS:

$$\begin{aligned}0 &= \mathbf{f}[\mathbf{x}_r, 0] \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}[\mathbf{x}_r, 0].\end{aligned}$$

Ustálený stav NDS:

$$\begin{aligned}0 &= \mathbf{f}[\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_{konst}] \\ \mathbf{y}_r &= \mathbf{h}[\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_{konst}].\end{aligned}$$

1.2 Vlastnosti nelineárnych dynamických systémov

Nelineárne systémy majú odlišné vlastnosti ako LDS, t.j.:

- neplatí princíp superpozície
Princíp superpozície: ak na vstup systému privedieme lineárnu kombináciu vstupných signálov; na výstupe dostaneme *tú istú* lineárnu kombináciu výstupných signálov.
- rovnovážne stavy existujú aj mimo začiatok súradníc
- počiatkové podmienky majú vplyv na dosiahnutie rovnovážnych stavov autonómnych systémov
- vznik autooscilácií (samobudených kmitov)
- **neexistuje jednotná metodika na riešenie NS**

1.3 Klasifikácia nelinearít

NS obsahujú okrem lineárnej časti aj časť nelineárnu.

1. Statické nelinearity: $v(t) = f[u(t); \text{sign } u'(t)]$
 - (a) linearizovateľné SN: v každom bode sa dá jednoznačne nahradiť nelineárna charakteristika dotyčnicou ku charakteristike, napr. $v(t) = au^2(t)$, $v(t) = au^3(t)$.
 - (b) typické SN: náhrada nie je možná, napr. relé, hysterezia, pásmo necitlivosti. vid'. (**Modrlák, Nelineárne systémy**).
2. Dynamické nelinearity – systém NDR n -tého rádu

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = \mathbf{f}[y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}, u(t), \dots, u^{(m-1)}(t)]$$

P1

$$y'''(t) + 3(y'(t))^2 y''(t) + y'(t)\sqrt{y''(t)} + 2y(t) = u(t)$$

P2

$$my''(t) + c_0 y'(t) + c_1 y(t) + c_2 y^3(t) = F \cos \omega t$$

P3 (rovnica matematického kyvadla)

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 \sin y(t) = u(t)$$

P4 (rovnica servomechanizmu s podstatnou nelinearitou)

$$y''(t) + a_1 y'(t) - a_0 y(t) y'(t) \operatorname{sign} y(t) = u(t)$$

NDR n -tého rádu je možné rozložiť na n DR prvého rádu. *Rozklad na kanonický tvar* je podstatou **metódy stavového priestoru**, ktorá sa používa pri posudzovaní stability rovnovážnych stavov (je ich viac ako 1) pomocou **prvej (nepriamej) Ljapunovej metódy**.

Pozn. Ak NS obsahuje typické nelinearity, funkcia f obsahuje nespojitosti opísané pomocou funkcie sign ; *nemožno použiť metódu linearizácie* a metóda fázovej roviny musí byť pre ne upravená.

Príklad 1 *Prepíšte do substitučného kanonického tvaru NDS v P1.*

$$\begin{aligned} y(t) &= x_1(t) \\ y'(t) : \quad \dot{x}_1(t) &= x_2(t) = f_1(x_1, x_2, x_3, u) \\ y''(t) : \quad \dot{x}_2(t) &= x_3(t) = f_2(x_1, x_2, x_3, u) \\ y'''(t) : \quad \dot{x}_3(t) &= -3(x_2(t))^2 x_3(t) - x_2(t) \sqrt{x_3(t)} - 2x_1(t) + u(t) \\ &= f_3(x_1, x_2, x_3, u) \end{aligned}$$

Úloha 1 *Príklad P1 reprezentovaný dynamickou nelinearitou namodelujte pri definovanom vstupe $u(t)$ v jazyku MATLAB a v prostredí Simulink.*

1.4 Metódy riešenia NS

Stabilita NS: pri LDS existoval 1 rovnovážny stav, avšak pri NDS môže existovať aj viacero rovnovážnych stavov, z ktorých niektoré sú stabilné a niektoré nestabilné. Úlohou je určiť, ktoré to sú.

Pracovným režimom NS sú netlmené kmity (**medzné cykly**). Sú to rovnovážne periodické stavy, t.j. existujú bez toho, aby sme na vstup priviedli budiaci signál.

Medzi metódy pre analýzu a syntézu NS patria:

1. metóda linearizácie: úloha sa transformuje na riešenie LS, ktoré sú aproximáciou NS.
2. metóda fázového priestoru: aplikačne použiteľná pre systému 2. rádu (graficko-analytické znázornenie fázového portrétu, algoritmické riešenie fázového portrétu)
3. Ljapunova metóda stability

4. metóda harmonickej rovnováhy: pre NS s typickými nelinearitami, určujú sa parametre medzného cyklu (amplitúda, fáza)
5. metóda Popova – kritérium stability (pre systémy so statickou a dynamickou nelinearitou).

1.4.1 Metóda linearizácie

Využívame v nasledovných prípadoch:

1. ak sa v NS vyskytujú pomerne malé zmeny premenných
2. ak charakteristiky nelinearít sú v okolí pracovného bodu spojité a diferencovateľné, t.j. môžeme tieto systémy linearizovať,
3. takto získané linearizované systémy potom vyšetrujeme metódami známymi z teórie LS,
4. metóda linearizácie sa nehodí pre systémy s *typickými nelinearitami*.

Určenie parametrov linearizovaného systému

1. Nech je systém opísaný vťahom

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \mathbf{f} \text{ je nelineárna funkcia.} \quad (1.1)$$

\mathbf{y} výstup systému (alebo jeho n -tá derivácia)

x_i vstupná premenná (alebo jej derivácia)

\mathbf{f} nelineárna funkcia, obsahuje statické aj dynamické nelinearity

2. Lineárna náhrada (1.1)

$$\mathbf{y}(t) \cong A_0 + A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t) + \dots + A_n x_n(t) \quad (1.2)$$

$$\mathbf{Y}(t) \cong A_0 + A_1 X_1(t) + A_2 X_2(t) + \dots + A_n X_n(t) = \mathbf{f}(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (1.3)$$

kde $\mathbf{f}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ je hodnota v PB.

- náhradu robíme v okolí pracovného bodu (X_1, X_2, \dots, X_n)
- pre malé zmeny premenných x_i , koeficienty A_i dobre aproximujú pôvodný systém:
- odčítaním (1.2) of (1.3) získame:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} - \mathbf{Y} &= A_1(x_1 - X_1) + \dots + A_n(x_n - X_n) \\ \Delta \mathbf{y} &= A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n \end{aligned} \quad (1.4)$$

hodnota funkcie v PB: $\mathbf{Y} = \mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

odchýlka od PB: $\Delta x_i = x_i - X_i$.

3. Ak funkciu (1.1) je možné analyticky vyjadriť a v okolí PB je spojitá a pre $\forall x$ diferencovateľná, môžeme ju zapísať do Taylorovho radu:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(X_1, X_2, \dots, X_n) + \sum_{i=1}^n (x_i - X_i) \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} \right|_{x_i=X_i} + \dots,$$

pričom zanedbaním vyšších členov získavame

$$\Delta \mathbf{y} \cong \sum_{i=1}^n \Delta x_i \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} \right|_{x_i=X_i} \quad (1.5)$$

4. Porovnaním (1.4) a (1.5) získavame:

$$A_1(x_1 - X_1) + \dots + A_n(x_n - X_n) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}(x_1 - X_1) + \dots + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n}(x_n - X_n),$$

z čoho vyplýva:

$$A_i = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(x_i - X_i) \right|_{x_i=X_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

a teda

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots \Rightarrow x_i = X_i + \Delta x_i$$

$$A_0 = \mathbf{Y} - \sum_{i=1}^n A_i X_i$$

1.4.2 Ljapunova metóda vyšetovania stability

Metóda sa dá použiť ak platí:

1. nelinearita sa dá opísať jednoznačne analytickou funkciou,
2. ak sú v okolí pracovného bodu parciálne derivácie funkcie spojité, konečné, t.j. ak je možný *rozvoj do Taylorovho radu*,
3. ak za PB zvolíme **rovnovážny stav NS** – podľa **1. Ljapunovho kritéria** sa dá posúdiť stabilita tohto systému *v okolí pracovného bodu* na základe príslušnej aproximácie vo všetkých prípadoch, keď korene charakteristickej rovnice lineárnej aproximácie majú nenulovú reálnu zložku.

Záver: zo stability 1. priblíženia je možné usudzovať stabilitu pôvodného NS.

- ak všetky korene CHR 1. priblíženia ležia v ľavej polrovine – pôvodný systém je **stabilný**,
- ak 1 koreň 1. priblíženia je v pravej polrovine – 1. priblíženie aj pôvodný NS bol **nestabilný**,
- ak jeden z koreňov CHR leží na imaginárnej osi a ostatné ležia vľavo – **o stabilite sa nedá rozhodnúť**.

Príklad 2 (Výpočet rovnovážnych stavov NS)

Určte rovnovážne stavy systému

$$\ddot{x}(t) + 0.5\dot{x}(t) + 3x(t) + x^2(t) = 0$$

v rovine (x_1, x_2) .

Riešenie:

Stavový opis NDS v SKT:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -3x_1(t) - 0.6x_2(t) - (x_1(t))^2 \end{array} \right\} \text{SKT} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t).$$

Rovnovážny stav: je definovaný ako bod, kde má NDS nulové derivácie, t.j. $\dot{\mathbf{x}}(t) = 0$

NDS má väčší počet rovnovážnych stavov rôzneho charakteru – vypočítajú sa riešením nelineárnych algebraických rovníc $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) = 0$

Pre rovnovážne stavy platí:

$$x_2(t) = 0; \quad -3x_1(t) - 0.6x_2(t) - (x_1(t))^2 = 0$$

Rovnovážne stavy v rovine (x_1, x_2) sú body:

$$RS_1 \equiv [0, 0], \quad RS_2 \equiv [-3, 0].$$

Príklad 3 Pomocou nepriameho Ljapunovho kritéria vyšetrite stabilitu rovnovážnych stavov NDS

$$y''(t) - \left(0.1 - \frac{10}{3}(y'(t))^2\right)y'(t) + y(t) + y^2(t) = 0$$

Riešenie:

Po zavedení substitúcie prepis do SKT:

- SKT:

$$\begin{array}{l} y(t) = x_1(t) \\ y'(t) : \quad \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ y''(t) : \quad \dot{x}_2(t) = \left(0.1 - \frac{10}{3}x_2^2(t)\right)x_2(t) - x_1(t) - x_1^2(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2). \end{array}$$

- Pre rovnovážne stavy platí:

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) = 0 \quad \iff \quad x_2(t) = 0 \quad \wedge \quad \left(0.1 - \frac{10}{3}x_2^2(t)\right)x_2(t) - x_1(t) - x_1^2(t) = 0,$$

t.j.,

$$RS_1 \equiv [0, 0], \quad RS_2 \equiv [-1, 0]$$

- Charakteristická rovnica 1. približenia (pre DR 2-hého rádu):

$$p^2 - \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{x_i=X_i} p - \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x_i=X_i} = 0$$

$$y''(t) - \frac{\partial f}{\partial x_2} y'(t) - \frac{\partial f}{\partial x_1} y(t) = K$$

$$A_1 = -1 - 2X_1, \quad A_2 = 0.1 - 10x_2^2$$

$$p^2 - (0.1 - 10X_2^2)p - (-1 - 2X_1) = 0$$

- $(X_1, X_2) \equiv [0, 0] \Rightarrow p^2 - 0.1p + 1 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = 0.5 \pm i$

rovnovážny stav (singulárny bod $[0, 0]$) odpovedá **nestabilnému ohnisku**

$$(X_1, X_2) \equiv [-1, 0] \Rightarrow p^2 - 0.1p - 1 = 0 \Rightarrow p_1 = 1.05, p_2 = -0.9.$$

rovnovážny stav (singulárny bod $[-1, 0]$) je typu **sedlo**, asymptoty sedla majú smernicu 1.05 a -0.9 . Pri koreňoch p_1, p_2 nevieme posúdiť stabilitu!

1.5 Záver

- Niektoré NS sa dajú vyšetrovať s dostatočnou presnosťou ako lineárne, ak sa ich správanie neodlišuje od lineárnej aproximácie, t.j. je dodržaný pohyb v blízkosti PB alebo rovnovážnych stavov,
- vyskytujú sa situácie, keď linearizovaný model je neadekvátny – linearizácia je neprípustná (rôzne typy oscilácií nevybudené vonkajším periodickým signálom; subharmonické kmity; skoková rezonancia; chaotické javy); mnohé z týchto javov sú *nežiadúce* a sú vyvolané **parazitnými nelinearitami** v regulátoroch + regulovaných procesoch (napr. trenie, nasýtenie, relé)
- iné javy sú žiadúce – ak nelinearity úmyselne zavádzame (dvojpolohová regulácia, ...)

1.5.1 Dôvody pre využitie nelineárneho riadenia

- pohyb vo veľkých pracovných rozsahoch (neplatia podmienky linearizácie okolo PB, lineárne riadenie má zlé vlastnosti – zlá kvalita),
- riadenie systémov s nelinearitami, ktoré sa nedajú linearizovať (trenie, nasýtenie, hysterezia): vyvolávajú oscilácie a veľké regulačné odchýlky,
- jednoduchosť niektorých NS – veľké množstvo regul. procesov sa dá riadiť jednoduchými a lacnými prostriedkami (napr. nespojitá regulácia tlaku/teploty/prietoku)
- v regulátoroch používame prvky "relé-ového typu",

- robustný návrh s ohľadom na zmeny parametrov: pomalé zmeny parametrov v čase (napr starnutie prvkov), rýchle zmeny (uchopenie záťaže u manipulátorov),
- ak linearizácia rozvojom do TR u NS v syntéze nelineárneho riadenia vykazuje zhoršené regulačné pochody (nestabilné správanie), používa sa presná *exaktná* linearizácia.

V nelineárnych regulačných obvodoch sa vyskytujú:

- trvalé kmity o stálej amplitúde (*autooscilácie*)
- jav ferorezonancie (v elektrických RO s nelineárnou indukčnosťou L). Typický príklad z mechaniky: mechanický systém s nelineárnou charakteristikou pružiny:

$$my''(t) + by'(t) + ay(t)cy^3(t) = F \cos \omega t.$$

Prednáška 2

Linearizácia a stabilita v malom

Uvažujme autonómny nelineárny časovo-invariantný systém:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \implies \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (2.1)$$

Nelineárny systém definovaný rovnicou (2.1) má dva typy ustálených stavov:

- **rovnovážny stav** – definovaný vo fázovom priestore izolovanými singulárnymi bodmi (kľudové stavy)
- množinou singulárnych bodov, ktoré vytvárajú uzavreté trajektórie – **medzné cykly**

V rovnovážnom stave sú časové zmeny všetkých stavových veličín rovné nule, t.j. singulárne body ${}^i x_s$ vo fázovom priestore musia spĺňať podmienku:

$$\left. \begin{array}{l} f_1({}^i x_{1s}, {}^i x_{2s}, \dots, {}^i x_{ns}) = 0 \\ f_2({}^i x_{1s}, {}^i x_{2s}, \dots, {}^i x_{ns}) = 0 \\ \vdots \\ f_n({}^i x_{1s}, {}^i x_{2s}, \dots, {}^i x_{ns}) = 0 \end{array} \right\} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}({}^i \mathbf{x}_s) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, P(\text{počet riešení}) \quad (2.2)$$

Podmienka (2.2) môže mať u nelineárnych systémov viac riešení, t.j. vo fázovom priestore jej vyhovuje P singulárnych bodov.

Pozn. Tak ako singulárne body (rovnovážne stavy), tak aj medzné cykly môžu byť stabilné (nestabilné) podľa toho, či sa zastupujúci bod v stavovom priestore pre $t \rightarrow \infty$ k tomto bodu blíži alebo sa od neho vzdiaľuje.

Stabilitu v malom okolí singulárnych bodov môžeme vyšetrovať **linearizáciou nelineárneho systému v singulárnych bodoch**. Pre každý singulárny bod získame náhradný lineárny systém a potom kontrolujeme jeho stabilitu.

Linearizáciu vykonáme rozvojom do TR v okolí singulárnych bodov

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_s, \quad \mathbf{x}_s = {}^i \mathbf{x}_s, \quad i = 1, 2, \dots, P$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x_1 - x_{s1}) &= \left. \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right) \right|_{\mathbf{x}_s} (x_1 - x_{s1}) + \left. \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) \right|_{\mathbf{x}_s} (x_2 - x_{s2}) + \dots + \left. \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right) \right|_{\mathbf{x}_s} (x_n - x_{sn}) \\ \frac{d}{dt}(x_2 - x_{s2}) &= \left. \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) \right|_{\mathbf{x}_s} (x_1 - x_{s1}) + \left. \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \right|_{\mathbf{x}_s} (x_2 - x_{s2}) + \dots + \left. \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right) \right|_{\mathbf{x}_s} (x_n - x_{sn}) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt}(x_n - x_{sn}) &= \left. \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right) \right|_{\mathbf{x}_s} (x_1 - x_{s1}) + \left. \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right) \right|_{\mathbf{x}_s} (x_2 - x_{s2}) + \dots + \left. \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right) \right|_{\mathbf{x}_s} (x_n - x_{sn}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Sústava (2.3) zapísaná v maticovom tvare:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x}_s)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) = \mathbf{J}(\mathbf{x}_s)\Delta \mathbf{x} = \mathbf{A}\Delta \mathbf{x},$$

kde $\mathbf{J}(\mathbf{x}_s)$ je Jakobiho matica daná

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Náhradný lineárny systém v danom singulárnom bode má maticu systému $\mathbf{A} = \mathbf{J}(\mathbf{x}_s)$ a jeho stabilitu vyšetríme metódami, ktoré poznáme z lineárnych systémov.

Z analýzy systémov v stavovom priestore je známe, že charakteristická rovnica je daná ako

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \det[s\mathbf{I} - \mathbf{J}(\mathbf{x}_s)] = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0, \quad n \text{ je rád systému.}$$

Príklad 4 *Uvažujme nelineárny systém*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + x_1 - x_1^2 & &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Úloha.

1. *Nájdite singulárne body.*
2. *Nájdite náhradné lineárne systémy v týchto bodoch.*
3. *Rozhodnite o stabilite v okolí singulárnych bodov.*

Riešenie.

1. Singulárne body vyhovujú rovnosti:

$$\begin{aligned} 0 = x_2 = f_1(x_1, x_2) &\rightarrow x_2 = 0; \\ 0 - 2x_2 + x_1 - x_1^2 = f_2(x_1, x_2) &\rightarrow x_1(1 - x_1) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \vee x_1 = 1. \end{aligned}$$

Dostali sme dva singulárne body

$${}^1\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^2\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Náhradné lineárne systémy:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_s) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 2x_1 & -2 \end{bmatrix}$$

(a)

$${}^1\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}({}^1\mathbf{x}_s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det [s\mathbf{I} - \mathbf{J}({}^1\mathbf{x}_s)] = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -1 & s+2 \end{vmatrix} = s^2 + 2s - 1$$

Charakteristická rovnica $s^2 + 2s - 1 = 0$ má korene

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Singulárny bod ${}^1\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ je nestabilný a jeho náhradný lineárny systém má rovnicu

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}({}^1\mathbf{x}_s)\Delta \mathbf{x} = A_1\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}$$

(b)

$${}^2\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}({}^2\mathbf{x}_s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det [s\mathbf{I} - \mathbf{J}({}^2\mathbf{x}_s)] = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{vmatrix} = s^2 + 2s + 1$$

$$s_{1,2} = -1$$

Singulárny bod ${}^2\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ je stabilný a jeho náhradný lineárny systém má rovnicu

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}({}^2\mathbf{x}_s)\Delta \mathbf{x} = A_2\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}$$

Analýza nelineárnych systémov je v mnohých smeroch zovšeobecnením analýzy lineárnych systémov. Skôr ako pristúpime k rozboru singulárnych bodov nelineárnych systémov, uvedieme najprv základné vlastnosti singulárnych bodov lineárnych systémov.

Cieľ: trajektórie vo fázovej rovine (pre lineárny systém)

1. Stavový model zlinearizovaného (lineárneho) systému 2. rádu môžeme zapísať do tvaru:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{bmatrix}$$

kde

$$c = \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}_s}, \quad d = \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}_s}.$$

Charakteristická rovnica je:

$$\det [s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ -c & s - d \end{bmatrix} = s^2 - ds - c,$$

pričom vlastné čísla (korene charakteristickej rovnice) sú

$$s_{1,2} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 + 4c}}{2} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + c}$$

Fázová trajektória okolo singulárneho bodu závisí na koreňoch charakteristickej rovnice linearizovaného systému, t.j. na koeficientoch c, d . Za predpokladu, že korene CHR s_1 a s_2 sú reálne (rôzne) môžeme riešenie lineárneho dynamického systému x_1 a x_2 vyjadriť ako:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \exp(s_1 t) + C_2 \exp(s_2 t) \\ x_2(t) &= s_1 C_1 \exp(s_1 t) + s_2 C_2 \exp(s_2 t), \end{aligned}$$

C_1, C_2 sú konštanty, ktoré závisia na PP.

Rovnica fázovej trajektórie má tvar:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{s_1^2 C_1 \exp(s_1 t) + s_2^2 C_2 \exp(s_2 t)}{s_1 C_1 \exp(s_1 t) + s_2 C_2 \exp(s_2 t)}$$

2. Parametre lineárneho systému a im odpovedajúce korene (typ singulárneho bodu)

$d^2 + 4c$	c	d	korene	typ SB
≥ 0	< 0	< 0	$s_1 < 0, \quad s_2 < 0$	uzol stabilný
≥ 0	< 0	> 0	$s_1 > 0, \quad s_2 > 0$	uzol nestabilný
> 0	> 0	$<=> 0$	$s_1 > 0, \quad s_2 < 0$	sedlo
< 0	< 0	$= 0$	$s_{1,2} = \pm i\omega$	stred
< 0	< 0	< 0	$s_{1,2} = \alpha \pm i\omega, \quad \alpha = d/2 < 0, \quad \omega = \sqrt{ (d/2)^2 + c }$	ohnisko stabilné
< 0	< 0	> 0	$s_{1,2} = \alpha \pm i\omega, \quad \alpha = d/2 > 0, \quad \omega = \sqrt{ (d/2)^2 + c }$	ohnisko nestabilné

2.1 Priebehy fázových trajektórií

Stabilný uzol ($s_1 < 0$; $s_2 < 0$; $|s_2| > |s_1|$)

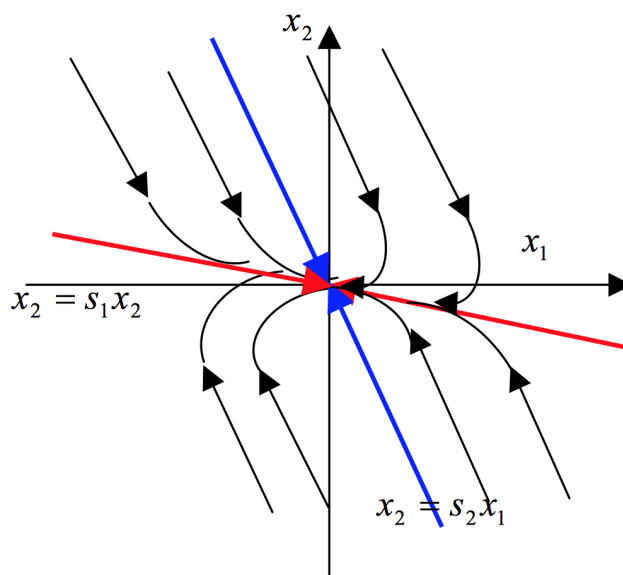
Predpokladajme, že PP v rovnici fázovej trajektórie (1) sa volia tak, že platí

$$c_1 = 0, \quad \frac{dx_2}{dx_1} = s_2,$$

teda fázová trajektória je priamka $x_2 = s_2 x_1$.

$$c_2 = 0, \quad \frac{dx_2}{dx_1} = s_1,$$

teda fázová trajektória je priamka $x_2 = s_1 x_1$. Pre takto zvolené konštantny sú fázové trajektórie priamky so zápornými smernicami s_1, s_2 .



Obr. 2.1: Stabilný uzol $s_1 \neq s_2 < 0$.

Príklad 5

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -2x_2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

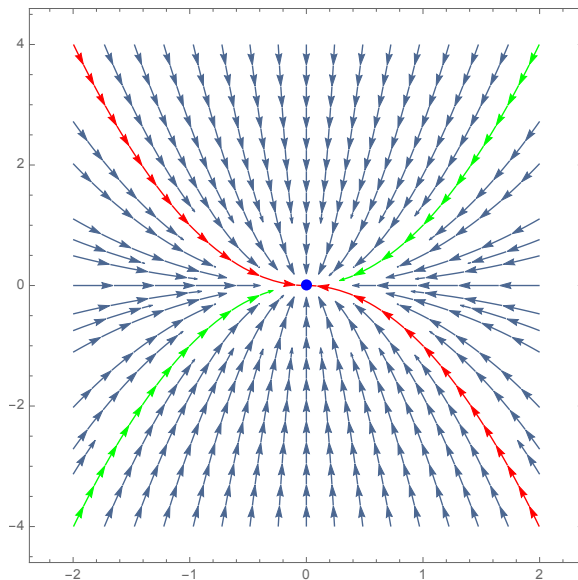
Riešenie:

$$x_1(t) = x_{10} e^{-t}, \quad x_2(t) = x_{20} e^{-2t}$$

Zjavne $x_1(t) \rightarrow 0$ a $x_2(t) \rightarrow 0$ pre $t \rightarrow \infty$, t.j. $SB \equiv [0, 0]$.

Tvar riešenia pre vyhlúčenie t :

$$x_2(t) = x_{20} \left(\frac{x_1(t)}{x_{10}} \right)^2 \implies x_2(t) = \frac{x_{20}}{x_{10}^2} x_1^2(t). \quad (2.5)$$



Obr. 2.2: Stabilný uzol $s_1 = -1, s_2 = -2$.

Všimnime si, že

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad CHR: \quad s^2 + 3s + 2 = 0 \implies s_1 = -1, s_2 = -2, \quad (2.6)$$

a teda singulárny bod je stabilný uzol.

Stabilný uzol ($s_1 = s_2 < 0$) – násobný koreň

Stavové premenné:

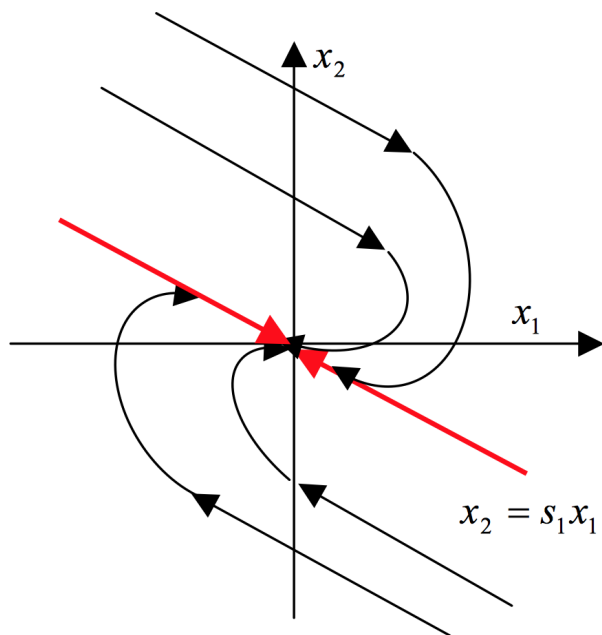
$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) = c_1 \exp(s_1 t) + c_2 t \exp(s_1 t) \\ x_2(t) &= y'(t) = s_1 c_1 \exp(s_1 t) + c_2 \exp(s_1 t) + s_1 c_2 t \exp(s_1 t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Rovnica fázovej trajektórie má tvar

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{s_1^2 c_1 \exp(s_1 t) + 2s_1^2 c_2 \exp(s_1 t) + s_1 c_2 t \exp(s_1 t)}{s_1 c_1 \exp(s_1 t) + c_2 \exp(s_1 t) + s_1 c_2 t \exp(s_1 t)} \implies \frac{dx_2}{dx_1} = s_1 \quad (2.8)$$

a teda

$$x_2 = s_1 x_1$$



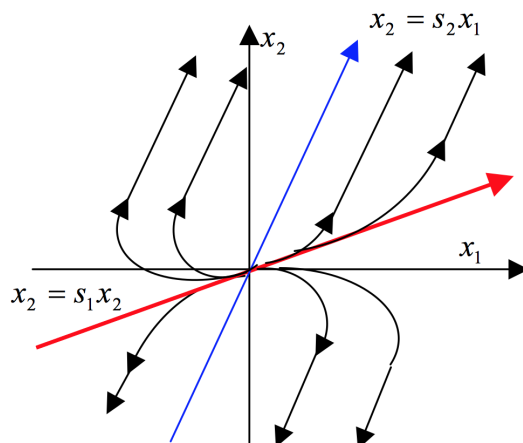
Obr. 2.3: Stabilný uzol $s_1 = s_2 < 0$.

Pre $t \rightarrow \infty$ a ľub. PP je rovnica fázovej trajektórie

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dx_2}{dx_1} = s_1,$$

t.j. pre $t \rightarrow \infty$ sa každá trajektória tangenciálne blíži k priamke $x_2 = s_1 x_1$ a vo veľkej vzdialenosti od $SB \equiv [0, 0]$ je s ňou rovnobežná.

Nestabilný uzol ($s_1 > 0, s_2 > 0, s_1 \neq s_2$)



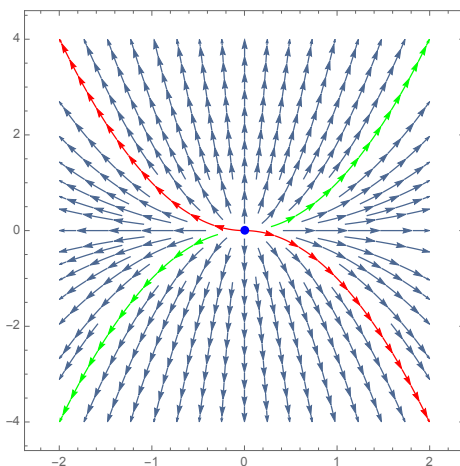
Obr. 2.4: Nestabilný uzol $s_1 > 0, s_2 > 0$.

Fázový portrét nestabilného uzla obsahuje 2 priamky $x_2 = s_1 x_1$ a $x_2 = s_2 x_1$ s kladnými

smernicami s_1 a s_2 . Pre $t \rightarrow \infty$ sú trajektórie rovnobežné s priamkou $x_2 = s_2x_1$.

Príklad 6

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 2x_2. \end{aligned} \tag{2.9}$$



Obr. 2.5: Nestabilný uzol $s_1 = 1$, $s_2 = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad CHR: \quad s^2 - 3s + 2 = 0 \quad \implies \quad s_1 = 1, s_2 = 2, \tag{2.10}$$

a teda singulárny bod je nestabilný uzol.

$$x_2(t) = \frac{x_{20}}{x_{10}^2} x_1^2(t) \tag{2.11}$$

Sedlo ($s_1 < 0$, $s_2 > 0$) Trajektórie sa pohybujú rovnobežne s $x_2 = s_1x_1$ (záporná smernica) a neskôr pre $t \rightarrow \infty$ sú rovnobežné s $x_2 = s_2x_1$.

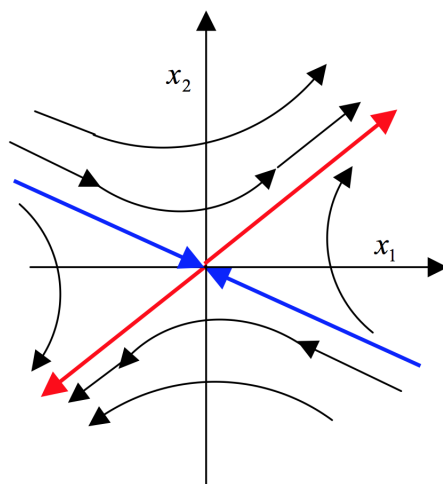
Príklad 7

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -2x_2. \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad CHR: \quad s^2 + s - 2 = 0 \quad \implies \quad s_1 = 1, s_2 = -2, \tag{2.13}$$

Riešenie:

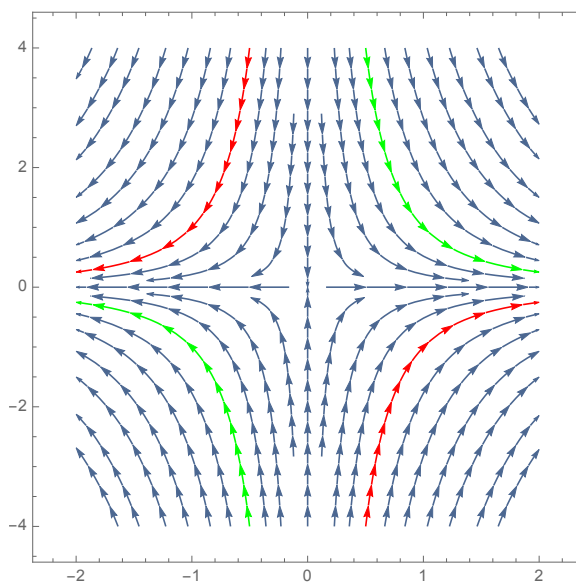
$$x_1(t) = x_{10}e^t, \quad x_2(t) = x_{20}e^{-2t}$$



Obr. 2.6: Sedlo $s_1 < 0$, $s_2 > 0$.

Tvar riešenia pre vylúčenie t :

$$x_2(t) = x_{20} \left(\frac{x_1(t)}{x_{10}} \right)^{-2} \implies x_1^2 x_2(t) = x_{10}^2 x_{20} \implies x_2(t) = \frac{x_{10}^2 x_{20}}{x_1^2(t)} \quad (2.14)$$

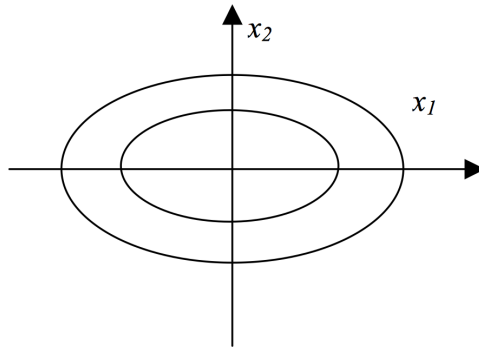


Obr. 2.7: Nestabilný uzol $s_1 = 1$, $s_2 = -2$.

Stred ($s_{1,2} = \pm i\omega = \pm i\sqrt{|c|}$)

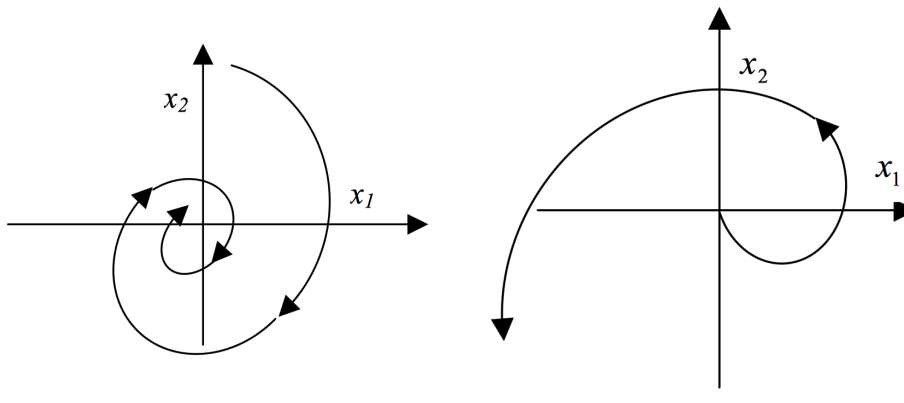
$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{cx_1}{x_2} \implies x_2 dx_2 = cx_1 dx_1 \quad (2.15)$$

Integráciou: $x_2^2 - cx_1^2 = k$. Fázový portrét trajektórie **stred** je elipsa.



Obr. 2.8: Stred

Stabilné ohnisko ($s_{1,2} = \alpha \pm i\omega$; $\alpha = d/2 < 0$; $\omega = \sqrt{|(d/2)^2 + c|}$)



Obr. 2.9: Stabilné, resp. nestabilné ohnisko

Pre komplexne združené korene môžeme stavové premenné vyjadriť v tvare:

$$\begin{aligned} x_1(t) = y(t) &= e^{\alpha t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) \\ x_2(t) = y'(t) &= e^{\alpha t}[(\alpha c_1 + \omega c_2) \cos \omega t + (\alpha c_2 - \omega c_1) \sin \omega t] \end{aligned} \quad (2.16)$$

Nestabilné ohnisko ($s_{1,2} = \alpha \pm i\omega$; $\alpha = d/2 > 0$; $\omega = \sqrt{(d/2)^2 + c}$), fázová trajektória je rozvíjajúca špirála.

Prednáška 3

Príklad 8 Uvažujme nelineárny autonómny systém

$$y''(t) + 3y'(t) + 4y^3(t) - y(t) = 0.$$

Úloha. Nájdite singulárne body a rozhodnite o stabilite v okolí singulárnych bodov. Nakreslite výsledný fázový portrét nelineárneho systému – urobte záver týkajúci sa globálnej stability.

Riešenie:

1. Stavové rovnice (SKT):

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = y'(t)$$

↓

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -3x_2(t) - 4x_1^3(t) + x_1(t) \end{aligned}$$

2. Singulárne body:

$$\begin{aligned} 0 = x_2 &\Rightarrow x_{2s} = 0 \\ 0 = -3x_2(t) - 4x_1^3(t) + x_1(t) &\Rightarrow x_1(1 - 4x_1^2(t)) = 0 \\ &x_{1s} = 0, \\ &x_{2s_{1,2}} = \pm 0.5 \end{aligned}$$

Vypočítané singulárne body:

$${}^1x_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^2x_s = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^3x_s = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{bmatrix};$$

Linearizácia v okolí singulárnych bodov:

Jakobiho matica $\mathbf{J}(\mathbf{x}_s) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 12x_1^2(t) & -3 \end{bmatrix}$

(a) Pre singulárny bod ${}^1x_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ je charakteristická rovnica linearizovaného systému

$$\mathbf{J}({}^1x_s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det[s\mathbf{I} - \mathbf{J}({}^1x_s)] = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix} = s^2 + 3s - 1,$$

teda póly sú

$$s_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+4}}{2},$$

$$s_1 = 0.3028, \quad s_2 = -3.3028.$$

Singulárny bod ${}^1x_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ je nestabilný a podľa koreňov charakteristickej rovnice je jeho fázový portrét **sedlo**.

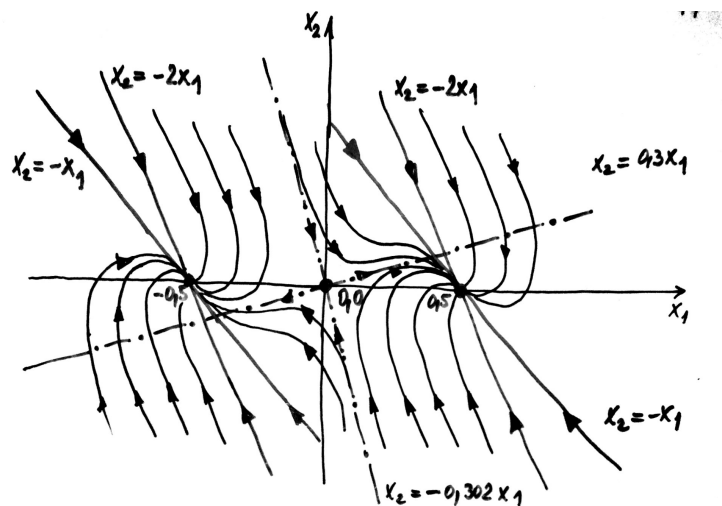
(b) Pre singulárny bod ${}^2x_s = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$ je charakteristická rovnica linearizovaného systému

$$\mathbf{J}({}^2x_s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det[s\mathbf{I} - \mathbf{J}({}^2x_s)] = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} = s^2 + 3s + 2,$$

teda póly sú $s_1 = -1$, $s_2 = -2$. Singulárny bod ${}^2x_s = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$ je stabilný a podľa koreňov charakteristickej rovnice je jeho trajektória **stabilný uzol**.

(c) Pre singulárny bod ${}^3x_s = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$ platí rovnaký záver ako pre singulárny bod 2x_s .

Fázové trajektórie: aby sa dalo rozhodnúť o globálnej stabilite, je nutné zakresliť fázové trajektórie v celej fázovej rovine



Obr. 3.1: Fázový portrét nelineárneho systému

Prednáška 4

Prednáška 5

Priama Ljapunova metóda

Ljapunova teória stability: umožňuje študovať stabilitu systému bez toho, aby sa riešili pohybové DR.

A.M. Ljapunov predložil 2 metódy na vyšetovanie stability:

1. Prvá Ljapunova metóda – posudzuje stabilitu NDS podľa približného lineárneho modelu (stabilita v malom/nepriama Ljapunova metóda)
2. Druhá Ljapunova metóda (priama Ljapunova metóda) – umožňuje posudzovať stabilitu v malom a vo veľkom pri lineárnych a nelineárnych DS (s budením a bez budením)
 - úspech metódy spočíva v nájdení vhodnej Ljapunovej funkcie a v stanovení jej definitnosti.
 - Ljapunove funkcie sú matematickým zobecnením základného fyzikálneho princípu: pri pohybe DS v systéme klesá (ubúda) z celkovej energie.
 - Ak je rovnovážny stav systému asymptoticky stabilný – pri pohybe po trajektórii sa akumulovaná energia systému s rastúcim časom znižuje a svoju minimálnu hodnotu dosiahne v rovnovážnom stave. Ljapunova metóda spočíva v nájdení vhodnej funkcie, ktorú si predstavujeme ako zovšeobecnenú energiu.
 - Definitnosť Ljapunovej funkcie spolu s definitnosťou jej časovej derivácie pozdĺž riešenia stavovej rovnice systému dáva informáciu o stabilite systému.

Definícia 1 *Ljapunovova funkcia je taká reálna funkcia $V(\mathbf{x})$, ktorá spĺňa nasledujúce podmienky:*

- (a) $V(\mathbf{x})$ je spojitá a má spojité parciálne derivácie
- (b) $V(\mathbf{x})$ je pozitívne definitná: $V(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \neq 0, V(0) = 0$
- (c) časová derivácia $\dot{V}(\mathbf{x})$ pozdĺž riešenia daného NDS $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ je negatívne definitná (negatívne semidefinitná)

Derivácia $\dot{V}(\mathbf{x})$ podľa času pozdĺž riešenia daného systému je definovaná vzťahom:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}V(\mathbf{x}) = \frac{dV(x_1, \dots, x_n)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$$

$$\frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n$$

Veta 1 (Ljapunove kritérium): Ak existuje k danému systému $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ pozitívne definitná Ljapunova funkcia ($V(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \neq 0, V(0) = 0$) a jej derivácia $\dot{V}(\mathbf{x})$ je negatívne semidefinitná (resp. negatívne definitná) – je rovnovážny stav $\mathbf{x} = 0$ Ljapunovsky stabilný (resp. asymptoticky stabilný).

Ljapunove vety o stabilite sú iba postačujúce podmienky, t.j. ak nemôžeme k danému systému nájsť vhodnú Ljapunovu funkciu, neznamená to, že systém je nestabilný – dá sa konštatovať, že pokus o určenie stability sa nevydaril.

5.1 Generovanie Ljapunovskej funkcie pre nelineárne autonómne systémy

- zatiaľ neexistuje jednoduchá a spoľahlivá metóda, ktorá by nám umožnila stanoviť vhodnú Ljapunovu funkciu pre ľubovoľný nelineárny systém
- voľba Ljapunovej funkcie v tvare kvadratickej formy – všeobecne zlyháva
- existuje viacero metód pre generovanie $V(x)$ – zaujímavé sú tie, ktoré sa dajú využiť pre praktické riešenie

5.1.1 Voľba Ljapunovej funkcie na základe fyzikálnej analógie.

- pri nelineárnych rovniciach nižšieho rádu môžeme nájsť jednoduchú fyzikálnu interpretáciu Ljapunovej teórie a podľa nej navrhnúť vhodnú funkciu $V(x)$.
- táto metóda sa často využíva v teoretickej mechanike, v robotike, ... , a pomocou nej sa dajú vysvetľovať súvislosti medzi Ljapunovskou teóriou stability a teóriou optimálnych systémov.

Príklad 9 Uvažujme mechanický systém pružina-hmota-tlmič, v ktorom direktívna sila $f(x)$ a tlmiaca sila $g(\dot{x})$ sú nelineárne. Pre pohyb systému platí

$$\ddot{x} + g(\dot{x}) + f(x) = 0, \tag{5.1}$$

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

U konzervatívneho systému: tlmenie $g(\dot{x}) = 0$ a celková energia je konštantná.

Ak riešime konzervatívny systém vo fázovej rovine

$$\begin{aligned} x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x} &\Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -f(x_1) \end{aligned} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Pre $f(x_1) \neq 0$ pri $x_1 \neq 0$ má systém 1 rovnovážny stav v počiatku súradníc (stred). Trajektórie sú uzavreté krivky:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f(x_1)}{x_2}$$

Integráciou dostaneme rovnicu trajektórie

$$\begin{aligned} x_2 dx_2 &= -f(x_1) dx_1 \\ \frac{x_2^2}{2} + \int f(x_1) dx_1 &= c \end{aligned} \quad (5.3)$$

Celková energia $E(x_1, x_2)$ pohybujúceho sa systému je daná kinetickou energiou $x_2^2/2$ a potenciálnou energiou $\int f(x_1) dx_1$.

$$E(x_1, x_2) = E_k + E_p = \frac{x_2^2}{2} + \int f(x_1) dx_1 \quad (5.4)$$

Trajektórie systému sú krivkami celkovej energie tohto konzervatívneho systému:

časová zmena energie = 0, t.j.

$$\frac{dE(x_1, x_2)}{dt} = x_2 \dot{x}_2 + f(x_1) \dot{x}_1 = x_2 (\dot{x}_2 + f(x_1)) = 0$$

Zo stavových rovníc $\dot{x}_2 = -f(x_1)$

Pre nekonzervatívne systémy (s tlmením $g(x_2)$) kde $g(x_2)x_2 > 0$ pre $x_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -f(x_1) - g(x_2) \end{aligned} \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-f(x_1) + g(x_2)}{x_2} \quad (5.5)$$

Časová zmena energie systému:

$$\frac{dE(x_1, x_2)}{dt} = x_2 (\dot{x}_2 + f(x_1)) = -g(x_2)x_2 \quad (5.6)$$

Nakoľko $g(x_2)x_2 > 0$ pre $x_2 \neq 0$ je vidieť, že energia systému stále klesá so zväčšujúcim sa časom riešenia.

– uviesť obrázok riešenia mechanického systému vo fázovej rovine!

5.1.2 Príklad na NDS – zavesené inverzné tlmené kyvadlo

Tlmené kyvadlo – zavesené na tuhom závесе a môže sa pohybovať v celom rozsahu uhlov.

Matematické kyvadlo (II. Newtonov zákon):

$$\ddot{\varphi}(t) = -gl \sin \varphi(t) - \frac{kl}{m} \dot{\varphi}(t) + \frac{F(t)}{m}$$

m hmotnosť koncovej záťaže kyvadla

l dĺžka nehmotného závесu

k koeficient trenia

g gravitačné zrýchlenie

$\varphi(t)$ uhlová výchylka

$F(t)$ vonkajšia sila na vstupe systému (napr. sily vyvolané vhodným pohonom pripojeným k závесu kyvadla)

V rozbere úlohy predpokladáme, že $F(t)$ poznáme a môžeme ju aj ľubovoľne ovládať a nechať pôsobiť na kyvadlo

$$x_1(t) = \varphi(t); \quad x_2(t) = \dot{\varphi}(t); \quad u(t) = \frac{F(t)}{m}; \quad y = \varphi(t)$$

Model:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -gl \sin x_1(t) - \frac{kl}{m} x_2(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned} \tag{5.7}$$

1. Ak $u \equiv 0$, na systém nebudeme pôsobiť. Nebudený systém – tzv. autonómny systém.

Rovnovážny stav $\dot{x}_i = 0$ implikuje

$$\begin{aligned} x_1^{e1} &= 0, & x_2^{e1} &= 0 & (\text{zavesené dole}) \\ x_1^{e2} &= \pi, & x_2^{e2} &= 0 & (\text{inverzné kyvadlo zavesené hore}) \end{aligned}$$

Rovnovážny stav (fyzikálny kontext):

- $e1$ je stabilný,
- $e2$ je nestabilný
- v $e1$ sa systém udrží (reálne pozorovateľný)
- v $e2$ sa systém bez vonkajšieho pôsobenia neudrží.

Pre vyšetrowanie stability uvažujme energiu systému

- v dolnej polohe (rýchlosť = 0) je energia vždy menšia než v akejkoľvek inej polohe;
- v hornej polohe (rýchlosť = 0) je energia vždy väčšia.

Uvažujme funkciu $V(\mathbf{x})$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}mx_2^2 + mgl(1 - \cos x_1),$$

ktorá má globálne minimum v rovnovážnom stave $(0, 0)$. Nech $\mathbf{x}(t)$ je trajektória systému a budeme uvažovať, ako sa vyvíja funkcia $V(x(t))$ na tejto trajektórii (pozdĺž tejto trajektórie):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\mathbf{x}(t)) &= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 \\ &= (mx_2)\dot{x}_2 + (mgl \sin x_1)\dot{x}_1 \end{aligned}$$

Pretože $\mathbf{x}(t)$ je trajektória systému, musí spĺňať rovnice (5.7), preto za jej časovú deriváciu dosadíme z (5.7)

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}(t)) = (mgl \sin x_1)x_2 + (mx_2)\left(-gl \sin x_1 - \frac{kl}{m}x_2\right) = -klx_2^2 \quad (5.8)$$

Vidíme, že z funkcie $V(\mathbf{x}(t))$ ubúda (okrem $x_2 = 0$), t.j. keď je rýchlosť kyvadla = 0.

Energia $V(\mathbf{x}(t))$ klesá a najmenšia je v rovnovážnom stave $(0, 0)$, ktorý je stabilný.

2. V ďalšom sa budeme zaoberať ako je možné zmeniť nežiadúce vlastnosti nelineárneho systému.

Cieľ: Úloha je stabilizovať hornú polohu kyvadla pomocou statickej stavovej spätnej väzby, t.j. na základe okamžitých ohdnôt stavu chceme určiť hodnotu akčnej veličiny, ktorú aplikujeme na kyvadlo tak, že ho udržíme asymptoticky v hornej polohe (proti poruchám a odchýlkam).

Matematicky to znamená, že potrebujeme určiť funkciu $u = \alpha(x_1, x_2)$ pre ktorú by systém

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -gl \sin x_1(t) - \frac{kl}{m}x_2(t) + \alpha(x_1, x_2) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned} \quad (5.9)$$

mal jediný asymptoticky stabilný stav $x_1 = \pi, x_2 = 0$.

Použijeme Ljapunovský návrh, ktorý pozostáva z nasledujúcich krokov:

– určíme funkciu, ktorá bude Ljapunovskou funkciou pre cieľový systém v uzavretej slučke

– vypočítame riadenie, ktoré to zaistí.

Ako v prvom prípade (spodný rovnovážny stav) použijeme funkciu celkovej energie kyvadla s tým, že jej potenciálnu zložku budeme počítat' vzhľadom k hornému rovnovážnemu stavu, lebo ten chceme stabilizovať. Táto funkcia má tvar:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}mx_2^2 + mgl(1 - \cos(x_1 - \pi)) = \frac{1}{2}mx_2^2 + mgl(1 + \cos x_1) \quad (5.10)$$

Časová derivácie Ljapunovskej funkcie (5.10):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\mathbf{x}(t)) &= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 \\ &= (mx_2)\dot{x}_2 - (mgl \sin x_1)\dot{x}_1 \end{aligned}$$

Nakoľko podľa predpokladu je $\mathbf{x}(t)$ trajektóriou systému, musí spĺňovať rovnice kyvadla (5.9) – za časové derivácie dosadíme z (5.9) do (5.10).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\mathbf{x}(t)) &= (mx_2) \left(\alpha(x_1, x_2) - gl \sin x_1 - \frac{kl}{m}x_2 \right) - (mgl \sin x_1)x_2 \\ &= mx_2 (\alpha(x_1, x_2) - 2gl \sin x_1) - klx_2^2 \end{aligned}$$

Ponúka sa voľba $\alpha(x_1, x_2) = 2gl \sin x_1$, ktorá vedie na

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}(t)) = -klx_2^2. \quad (5.11)$$

Opakujeme úvahu, že kyvadlo zaujme polohu, v ktorej je funkcia $V(x_1, x_2)$ minimálna. Takýto stav je iba jeden: $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$.

Vypočítaná spätná väzba umelo modifikuje gravitačné pole – ak dosadíme za $\alpha(x_1, x_2) = 2gl \sin x_1$ do (5.9) dostávame:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= gl \sin x_1(t) - \frac{kl}{m}x_2(t) \\ y(t) &= x_1(t), \end{aligned} \quad (5.12)$$

čo je vlastne popis kyvadla (prevráteného hore nohami). Gravitačné pole pôsobí opačným smerom – pôvodne nestabilná poloha sa stala stabilná. Je potrebné si uvedomiť, že $\alpha(\mathbf{x})$ je statická spätná väzba, t.j. dáva informácie iba o polohe, rýchlosť nie je potrebná.

5.2 Stabilita nelineárnych systémov – porovnanie

stabilita (všeobecne): najdôležitejšia vlastnosť regulačných obvodov (lineárnych alebo nelineárnych)

stabilita nelineárnych obvodov: širší pojem a odlišuje sa od stability lineárnych systémov

stabilita lineárnych systémov: je vlastnosťou týchto systémov a nezávisí na ich okamžitom stave, vstupných signáloch, počiatočných podmienkach

stabilita LDS: definuje sa ako schopnosť vrátiť sa do rovnovážneho stavu, ak skončilo pôsobenie signálu, ktorý systém z toho stavu vyviedol

stabilita NDS: definícia stability pre LDS je nepostačujúca (napr. rovnovážnych stavov je v NDS viac – odpovedajú im singulárne body)

5.2.1 Rozsah platnosti stability NDS

– LDS je stabilný/nestabilný pre akékoľvek počiatočné podmienky – za istých predpokladov to platí aj pre nelineárny systém – hovoríme o **globálnej stabilite** (o stabilite vo veľkom). Systém je globálne stabilný, ak je stabilný pre všetky počiatočné podmienky.

– pri NDS sa často stretávame so stabilitou pri malých výchylkách v istom okolí rovnovážneho stavu – **lokálna stabilita** (stabilita v malom). NDS je stabilný lokálne, ak je stabilný pre počiatočné podmienky vo vnútri oblasti okolo rovnovážneho stavu. **Ak je systém stabilný globálne, je automaticky stabilný aj lokálne (naopak to neplatí).**

5.2.2 Ustálené stavy NDS

– LDS majú 1 ustálený stav pre $t \rightarrow \infty$ alebo sa nestávajú vôbec (teda sú nestabilné)

– NDS disponujú na rozdiel od LDS viacerými ustálenými stavmi – dva typy ustálených stavov:

- rovnovážne ustálené stavy (kľudové stavy): nulové vzdialenosti v jednotlivých osiach
- periodické ustálené stavy (medzné cykly): kmity o konštantnej amplitúde a frekvencii.

Ak vyšetrujeme stabilitu NDS – nehovoríme o stabilite systému, ale o **stabilite jeho rovnovážnych stavov**, ktoré môžu byť stabilné alebo nestabilné.

NDS má toľko rovnovážnych stavov, koľko existuje riešení sústav rovníc: $\dot{x}_1 = 0$; $\dot{x}_2 = 0$, \dots , $\dot{x}_n = 0$ (žiaden rovnovážny stav, jeden, dva, \dots , nekonečne veľa) – pozri singulárne body LDS (a zovšeobecnenie na NDS)

Ak majú stavové trajektórie v okolí SB smer dovnútra (k SB), speje systém do stavu klľudu a tento rovnovážny stav je stabilný (ak stavové trajektórie opúšťajú singulárne body, rovnovážny stav je nestabilný). Pre NDS je to hodnotenie lokálnej stability, nakoľko NDS disponuje viacerými rovnovážnymi stavmi

Ďalším typom ustálených stavov NDS sú periodické ustálené stavy – sú to ustálené vlastné kmity (autooscilácie) – v stavovej rovine sú reprezentované uzavretými trajektóriami (medzné cykly)

Medzné cykly:

- (a) stabilné – trajektórie smerujú z blízkeho okolia k MC
- (b) nestabilné – trajektórie sa vzdilľujú od MC
- (c) polostabilné – trajektórie sa z vonkajšej strany približujú, zvnútra vzdilľujú
- (d) polonestabilné – naopak.

5.2.3 Ljapunova teória stability (pre systémy so sústredenými parametrami)

1. Reálny systém

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = f[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (5.13)$$

2. Úvahy o stabilite – voľný systém $\iff \mathbf{u}(t) = 0$, potom (5.13) je autonómny, t.j.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = f[\mathbf{x}(t)] \quad (5.14)$$

3. Rovnovážny stav \mathbf{x}_r vyhovuje rovnici $f(\mathbf{x}_r) = 0$, pretože $\frac{d}{dt}\mathbf{x}_r = 0$.
4. Rovnovážny stav často býva začiatok SS $f(0) = 0$.
5. Definícia stability, ak riešenie (5.14) existuje:

Definícia 2 Ak $\mathbf{x}_r = 0$ je rovnovážny stav systému (5.14), hovoríme, že $\mathbf{x}_r = 0$ je stabilný rovnovážny stav, ak riešenie rovnice (5.14) $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\mathbf{x}(t_0))$, ktoré začína v nejakom stave $\mathbf{x}(t_0)$, blízko rovnovážnemu stavu $\mathbf{x}_r = 0$ zostane blízko rovnovážneho stavu \mathbf{x}_r , alebo sa k nemu približuje.

Definícia 3 (V Ljapunovskom zmysle:) Systém (5.14) je stabilný v L.J. zmysle v rovnovážnom stave $\mathbf{x}_r = 0$, ak pre každé reálne číslo $\epsilon > 0$ existuje $\delta(\epsilon) > 0$ také, že každé riešenie $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\mathbf{x}(t_0))$ systému (5.14), ktoré začína v nejakom δ okolí rovnovážneho stavu $\mathbf{x}_r = 0$, kde $|\mathbf{x}(t_0)| < \delta$, bude v ϵ okolí rovn. stavu $\mathbf{x}_r = 0$:

$$|\mathbf{x}(\mathbf{x}(t_0))| < \epsilon, \quad \text{pre } \forall t > t_0$$

Prednáška 6

Metódy syntézy nelineárnych systémov

Úlohou syntézy je navrhnuť k lineárnemu/nelineárnemu systému vhodný lineárny/nelineárny regulátor, ktorý zaistí splnenie cieľa syntézy, t.j. splnenie požiadavky na požadované chovanie URO.

Ak je cieľom stabilné správanie + vhodná dynamika pri veľkých rýchlostiach a pracovných rozsahoch je nutné nelineárne riadenie.

Stabilizačný problém: úlohou je nájsť pre definovaný NDS

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$$

taký zákon riadenia \mathbf{u} , aby pri ľubovoľnej počiatočnej podmienke $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ smeroval stav $\mathbf{x}(t)$ do požadovaného rovnovážneho stavu (a dosiahol ho v konečnom čase).

Príklady na stabilizačné úlohy: regulácia teploty v peci na konštantnú teplotu, regulácia hladiny v nádobách, regulácia letu lietadla v konštantnej výške.

Problém sledovania: Je zadaný systém

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t))\end{aligned}\tag{6.1}$$

a referenčná trajektória výstupu

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{y}_{ref}(t).\tag{6.2}$$

Úlohou je nájsť také riadenie $\mathbf{u}(t)$, aby pri pohybe z ľubovoľného počiatočného stavu v oblasti Ω konvergovala regulačná odchýlka

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{w}(t) - \mathbf{y}(t) \rightarrow 0$$

a stav zostal ohraničený.

Príklad na sledovanie: robotické systémy (buď je referenčná trajektória známa alebo sa dá vypočítať).

Úlohy sledovania sú obtiažnejšie ako úlohy stabilizácie, pretože pr sledovaní musí riadiaci systém udržiavať nielen stabilný stav systému, ale tiež udržiavať výstup systému na referenčnej trajektórii.

Postup pri návrhu riadenia (dodržať pri zadaní)

Pri návrhu riadenia dodržiavame nasledovné kroky:

1. fyzikálny systém modelujeme pomocou systému DR
2. špecifikujeme požadované správanie, voľba snímačov, akčných členov – modelujú sa ich vlastnosti
3. navrhujeme podľa zvolenej metódy vhodnú riadiacu štruktúru a parametre riadenia
4. analyzujeme správanie výsledného systému (URO) – simuláciou na PC. Ak vlastnosti riadenia nevyhovujú, návrat k bodu 3 – zmena metódy pre návrh riadenia.
5. implementácia riadiaceho systému (číslicové riadenie).

Pozn. Návrh riadiaceho systému pre NS musí zaistiť:

- stabilitu (globálnu)
- pre typické trajektórie musí byť zaistená vyhovujúca rýchlosť a presnosť odozvy.
- výsledný systém musí byť:
 - robustný (necitlivý na poruchy, šum, malé zmeny parametrov, vplyv nemodelovateľnej dynamiky)
 - dostupný cenovo

6.1 Linearizácia nelineárnych systémov

- fyzikálne systémy sú **nelineárne** – riadenie je náročné

- snaha NDS – linearizovať, nakoľko metódy riadenia lineárnych systémov sú podrobne rozpracované – umožňujú jednoduchý návrh riadiaceho systému

1. linearizácia v jednom pracovnom bode
2. linearizácia vo viacerých pracovných bodoch
3. exaktná (spätoväzobná) linearizácia

6.1.1 Linearizácia v jednom pracovnom bode

- existuje množstvo prípadov, keď NDS môžeme linearizovať v pracovnom bode avšak lineárna aproximácia dáva iba lokálny popis chovania systému a zanedbáva všetky špeciálne javy, ktoré NDS majú. Ak to vieme tolerovať – môžeme využiť všetky známe metódy riadenia LDS.

6.1.2 Linearizácia vo viacerých pracovných bodoch

≡ gain scheduling (programové zosilnenie)

- volíme viacero pracovných bodov, ktoré dostatočne pokrývajú pracovnú oblasť a v ich blízkosti systém linearizujeme.
- pre každú linearizáciu navrhujeme vhodný lineárny regulátor
- globálny nelineárny regulátor získame prepínaním príslušných regulátorov (riadenie letu lietadla).

6.1.3 Exaktná linearizácia

- najvšeobecnejší spôsob linearizácie (spätnevázobná linearizácia)
- princíp metódy spočíva v snahe vykompenzovať nelinearity systému inými nelinearitami a pretransformovať ho na lineárny systém.
- kompenzácia nelinearít môže byť **čiasočná** alebo **úplná**, vykonať ju môžeme buď **globálne** v celom stavovom priestore alebo **lokálne** v určitej oblasti.

Príklad 10 Lineárny matematický model spätnevázobných systémov môžeme získať exaktnou linearizáciou pomocou nelineárnej spätnej väzby. Základná myšlienka spočíva v kompenzácii nelineárnej (spojitej) funkcie riadeného systému

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (6.3)$$

nelineárnou spätanou väzbou

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x})[\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}\mathbf{x}]. \quad (6.4)$$

Za podmienky, že $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x})$ existuje.

Po dosadení (6.4) do (6.3):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x})[\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}\mathbf{x}] = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (6.5)$$

Rovnica (6.5) opisuje dynamiku lineárneho systému. Volbou konštánt matice \mathbf{A} možno získať požadovanú dynamiku exaktne linearizovaného systému.

Príklad 11 Vytvorte lineárny model systému:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - x_2^3 + u \end{aligned} \quad (6.6)$$

pomocou exaktnej linearizácie.

1. Linearizujúca spätaná väzba:

$$u = -x_1^2 + x_2^3 - a_1x_1 - a_2x_2.$$

2. Model linearizovaného systému:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a_1x_1 - a_2x_2 \end{array} \right\} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

3. CHR linearizovaného systému:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} s & -1 \\ a_1 & s + a_2 \end{vmatrix} = s^2 + a_2s + a_1$$

4. Vlastné čísla CHR:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_2}{2} \pm \sqrt{\frac{a_2^2}{4} - a_1}$$

6.2 Základné metódy syntézy riadenia

– neexistuje rovnako ako pre analýzu ani syntézu riadenia univerzálna metóda pre návrh vhodného regulátora.

6.2.1 Lineárny/linearizovaný systém s nelineárnym riadením

- pre riadenie lineárneho systému (LDS – získaný linearizáciou s vyhovujúcou presnosťou v požadovanej pracovnej oblasti – popis je tvorený LDR)
- volíme PID-regulátor alebo stavový regulátor. (parazitné nelinearity v snímačoch, akčných členoch sa snažíme pri prvom návrhu kompenzovať alebo zanedbať). Ak sa to nedá – syntézu vykonáme aj s parazitnými nelinearitami (**metóda harmonickej linearizácie a ekvivalentných prenosov**)
- stabilitu riadiacej štruktúry zaistíme pomocou Ljapunovej teórie stability (**Popoveho kritéria**)
- dynamické vlastnosti výsledného návrhu overíme simuláciou (spojito pracujúce regulátory s parazitujúcimi nelinearitami)
 - *vplyv nasýtenia akčných členov*: obmedzenie výstupu akčného člena vedie na zhoršenie prechodových dejov a tiež ku nestabilite pri väčších poruchách. Ak má regulátor "I"zložku – po dosiahnutí hranice obmedzenia sa nezväčšuje vstup na DS, ale integrátor pracuje ďalej (integruje) – vplyvom obmedzenia akčnej veličiny je reakcia regulátora na zmenu polaritu e opozdená – "WIN-DUP"
 - *nespojito pracujúce regulátory* - používajú sa vtedy, ak nie je spojitá akčná veličina z konštrukčného/ekonomického hľadiska výhodná.

Návrh jednoduchých nespojito pracujúcich regulátorov môžeme vykonať **metódou ekvivalentných prenosov** alebo simuláciou.

6.2.2 Nelineárny DS s lineárnym alebo nelineárnym riadením

– ak sme nevykonali linearizáciou NDS, môžeme navrhnuť ku NDS vhodný regulátor pomocou

- (a) Ljapunovej teórie (priamej)
- (b) simuláciou

Implementácia riadenia nelineárnych systémov: zložitejšie algoritmy riadenia NDS si vyžadujú diskretnú implementáciu. Keďže priamy návrh diskretných algoritmov je časovo náročný, postupujeme nasledovne:

1. návrh riadenia v spojitej oblasti
2. diskretná realizácia s malou T_{vz}

Metódy analýzy a syntézy DS

- priama Ljapunova metóda (A+S)
- metóda fázovej roviny (A)
- metóda harmonickej rovnováhy (S)
- spätnoväzobná linearizácia (S)

Príklad 12 Navrhnite riadenie $u(t)$ pomocou priamej Ljapunovej metódy pre nelineárny systém

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1^2(t) - x_2^3(t) + u(t)\end{aligned}\tag{6.7}$$

tak, aby rovnovážny stav $(0, 0)$ bol stabilný.

1. Podľa LM treba nájsť pre systém (6.7) Ljapunovu funkciu, ktorá musí byť **kladne definitná** a jej derivácia pozdĺž trajektórie systému musí byť **záporne definitná**.
2. Zvoľme funkciu $V(x) = x_1^2(t) + x_2^2(t)$ za kandidáta na Ljapunovu funkciu systému (6.7). Funkcia vyhovuje podmienkam:

- je spojitá a jej parciálne derivácie sú spojité v okolí rovnovážneho stavu
- je kladne definitná, $V(0, 0) = 0$, $V(x_1, x_2) > 0$.
- jej derivácia pozdĺž (6.7) je

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial V}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2} (x_1^2 - x_2^3 + u) \\ &= 2x_1x_2 + 2x_2(x_1^2 - x_2^3 + u) \\ &= 2(x_1x_2 + x_2x_1^2 - x_2^4 + x_2u)\end{aligned}\tag{6.8}$$

Podstatou návrhu stabilizujúceho riadenia pomocou priamej LM je nájsť funkciu, ktorá pri navrhnutom riadení spĺňa podmienky Ljapunovej funkcie – vo výraze (6.8) treba voliť

$u(t)$ tak, aby $\dot{V}(\mathbf{x})$ bola záporne definitná funkcia – štruktúru zákona riadenia volíme tak, aby sa členy $(x_1x_2 + x_2x_1^2)$ vykrátili

– ak zvolíme $u_1 = -x_1^2 - x_1$, $V(\mathbf{x})$ spĺňa podmienky Ljapunovej funkcie, lebo $\dot{V}(t) = -2x_2^4 \leq 0$.

– voľbou zákona riadenia vieme ovplyvniť **kvalitu prechodových dejov** a nie len stabilitu rovnovážneho stavu.

Voľbou

$$u_2 = -x_1^2 - x_1 - x_2$$

získame vyššiu kvalitu prechodových dejov.

– cieľom týchto metód je pre daný NDS navrhnuť funkciu, ktorá by mohla byť Ljapunovou funkciou (generovanie Ljapunových funkcií – **metóda variabilného gradientu**).

Prednáška 7

Teória optimálneho riadenia. Dynamická optimalizácia

Optimalizačný problém: vzniká pri výbere z viacerých variant riešenia – hľadanie najlepšieho variantu

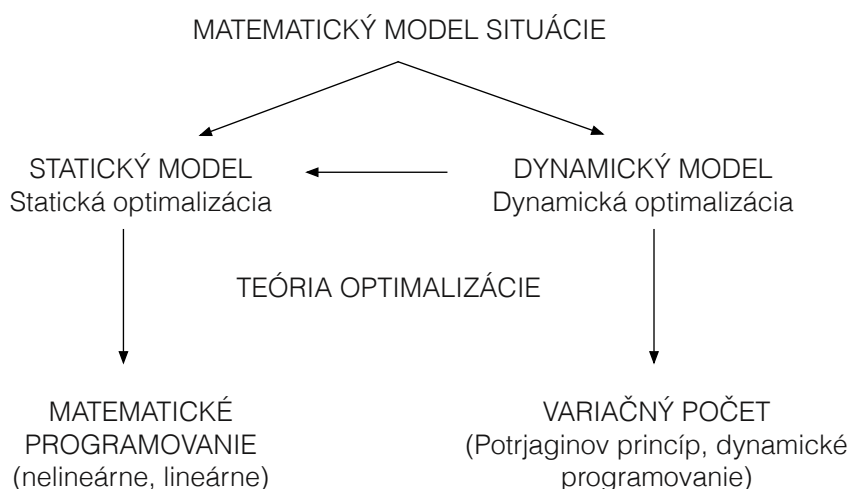
Optimálne riešenie: možné riešenie, pre ktoré neexistujú lepšie riešenia

Matematická formulácia optimalizačného problému: matematický model problému + kritérium optimality → výber najlepšieho riešenia

Teória optimalizácie: riešenie optimalizačných problémov (určenie štruktúry a hodnôt parametrov *riadiaceho* systému tak, aby sa dosiahla najlepšia *kvalita riadenia*)

Dynamická optimalizácia: cieľom je optimálny priebeh prechodových javov regulovanej veličiny pri zmene riadiacich alebo poruchových veličín

Statická optimalizácia: cieľom je dosiahnutie optimálnych hodnôt veličín v ustálenom stave, ktoré zabezpečia najlepší technologický a ekonomický výsledok riadenia (maximálna energetická účinnosť, kvalita výroby, minimálne straty).



7.1 Klasifikácia optimalizačných problémov

- **Alokačné problémy** – optimálne rozdelenie zdrojov a určenie optimálneho výrobného programu (maximalizácia zisku)
- **Problémy plánovania** – plánovanie investícií do výrobných zariadení, plánovanie výroby (na základe dopytu, produkcie, výrobných a skladových nákladov), napr. maximalizovať celkové výrobné náklady voľbou optimálnej produkcie
- **PROBLÉMY OR DYNAMICKÝCH SYSTÉMOV** (obsah predmetu)
- **Problémy aproximácie** – aproximácia funkcie na danom intervale inou funkciou. Cieľ: minimalizovať chybu aproximácie v zmysle určitého kritéria
- **Konfliktné situácie** (hry) – situácie s protikladnými záujmami účastníkov

7.2 Moderná teória riadenia

7.2.1 Historické obdobia TAR

- 1868: **Maxwell**, matematická analýza SV riadiacich systémov
- 1900–1960: klasické obdobie (frekvenčné m.)
- 1960: moderné obdobie (časová oblasť)

7.2.2 Optimalita v prírodných systémoch

- dosiahnutie optimality je základnou vlastnosťou pohybu v prírodných systémoch
- *Princíp optimality* (**Johann Bernoulli** – 1696 – úloha o brachystochrone)
- *Princíp časovej optimality v optike* (**P. de Fermat** – 17. st – minimum-time principle)
- **Eulerove práce** (1744)
- **Hamilton**: systém sa pohybuje tak, že sa minimalizuje časový integrál rozdielu medzi jeho kinetickou a potenciálnou energiou (*princípy maxima*)
- **Einstein** (1900): vzhľadom na 4D časopriestor sa pri pohybu systému čas maximalizuje

7.2.3 Základné práce modernej TAR

R. Bellman (1957) – dynamické programovanie

L. S. Pontrjagin (1958) – princíp maxima, časovo-optimálne problémy – *riadenie je reléového typu*

Kalman a kol. (1960) – začiatok *Modern control*:

1. Ljapunova teória pre NS v časovej oblasti
2. OR systémov, rovnice pre návrh LQ regulátora
3. Optimálna filtrácia + teória odhad, rovnice pre návrh diskretného Kalmanovho filtra

7.3 Problém optimálneho riadenia dynamického systému

- modely objektov, ktoré chceme optimalizovať – dynamické systémy
- uvažujme úlohu riadenia DS:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}_p(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}_p(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\end{aligned}\tag{DS}$$

kde

$\mathbf{x}(t)$ stav systému

$\mathbf{u}(t)$ riadiaci vektor

$\mathbf{y}(t)$ výstupný vektor

- veličiny v systéme nemôžu nadobúdať ľubovoľných hodnôt, sú nejakým spôsobom obmedzené:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) &\in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{x}(t) &\in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n\end{aligned}\tag{OB}$$

- obvykle poznáme počiatočný stav DS: $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Úlohou je riadiť systém tak, aby na konci intervalu riadenia $[t_0, t_1]$ bol systém v stave $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$
- Prechod z $\mathbf{x}(t_0) \rightarrow \mathbf{x}(t_1)$ môže byť uskutočnený rôzne – aby sme mohli vybrať **optimálne riadenie**, je nutné zvoliť **kritérium kvality riadenia**, ktoré ohodnotí riešenie úlohy, t.j. každému riešeniu priradí reálne číslo (vyberieme najlepšie)
- kritérium kvality riadenia v úlohách dynamickej optimalizácie:

$$J(t_0, \mathbf{x}(t_0), t_1, \mathbf{x}(t_1), \mathbf{u}(t)) = h(\mathbf{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt,$$

kde h, g sú skalárne funkcie.

- Úloha OR spočíva v určení takého riadenia $\mathbf{u}(t)$ systému (DS), aby boli splnené obmedzenia (OB) a bol dosiahnutý koncový stav $\mathbf{x}(t_1)$ a kritérium akosti riadenia bolo minimálne. Takéto riadenie nazveme optimálnym riadením $\mathbf{u}^*(t)$

Modifikácie.

- koniec trajektórie – čas t_1 a stav $\mathbf{x}(t_1)$ môže byť evne zadaný – **úloha s pevným koncom trajektórie**
- ak nie je určený koncový čas t_1 – **úloha s voľným koncovým časom**
- koncový stav $\mathbf{x}(t_1)$ môže byť neurčený – **úloha s voľným koncom trajektórie**

Záver.

Regulačná úloha: úloha nájdenia extrému funkcionálu pri rešpektovaní obmedzení danými stavovou rovnicou systému (*DS*) a obmedzujúcimi podmienkami (*OB*).

7.4 Lagrangeova, Mayerova a Boltzova úloha

– 3 základné typy úloh

1. Lagrangeova úloha

– spočíva v minimalizácii funkcionálu

$$J_1(\mathbf{x}(t)) = \int_{t_0}^{t_1} g(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) dt \quad (7.1)$$

s obmedzením

$$f(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = 0. \quad (7.2)$$

Úlohu riešime zavedením rozšíreného funkcionálu

2. Mayerova úloha – spočíva v minimalizácii funkcionálu

$$J_2(\mathbf{x}(t)) = g_1(\mathbf{x}(t), t)|_{t_0}^{t_1} = g_1(\mathbf{x}(t_1), t_1) - g_1(\mathbf{x}(t_0), t_0) \quad (7.3)$$

s obmedzením (7.2)

3. Boltzova úloha – spočíva v minimalizácii funkcionálu

$$J_3(\mathbf{x}(t)) = g_1(\mathbf{x}(t), t)|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} g(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) dt \quad (7.4)$$

s obmedzením (7.2)

Na základe skôr definovaných pojmov môžu byť formulované 2 varianty úlohy optimálneho riadenia pri známom stave systému:

1. Problém programového OR – pri známom počiatočnom stave systému

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*[t, \mathbf{x}_0]$$

2. Problém spätného OR – pri známom okamžitom stave systému

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*[t, \mathbf{x}(t)]$$

Záver.

Na rozdiel od POR $\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}_0)$, ktorý pre daný počiatočný stav $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ môže byť stanovené dopredu (a uložené do OP počítača) ako daná funkcia času, je SOR $\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}(t))$ generované v reálnom čase v závislosti na skutočnom okamžitom stave systému.

– **z hľadiska realizovateľnosti je v oboch variantách dôležitá podmienka obmedzenia na vektor riadenia $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^2$**

– problémy OR bez rešpektovania obmedzenia môžu byť riešené metódami klasického variačného počtu

– problém POR pri rešpektovaní obmedzenia môžu byť riešené princípom minima (maxima) Pontrjagina, ktorý môže byť interpretovaný ako zobecnenie nutných podmienok optimality vo forme Hamiltonovských kanonických rovníc.

– problémy SOR – systém Riccatiho diferenciálnych rovníc.