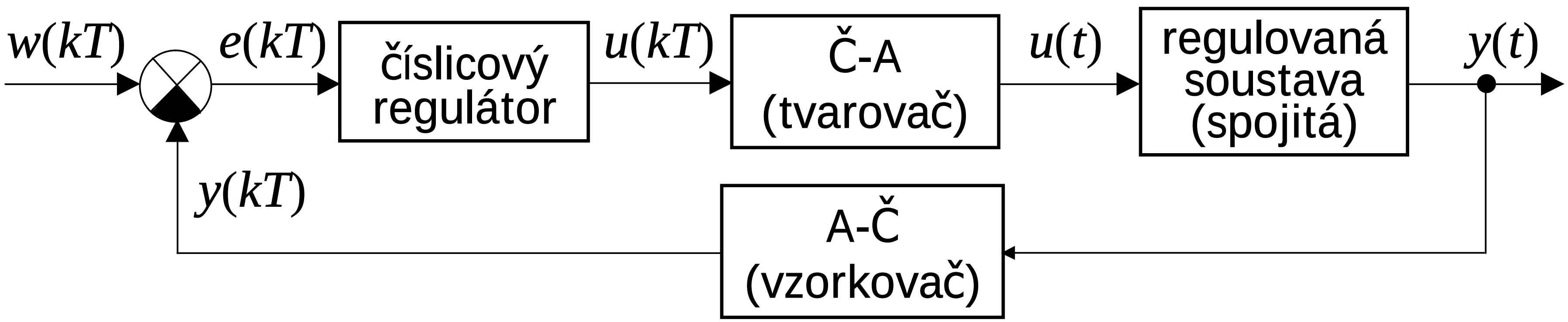
# DISKRÉTNÍ SYSTÉMY ŘÍZENÍ

Tato prezentace vznikla jako součást projektu CZ.04.1.03/3.2.15.2/0285 „Inovace VŠ oborů strojního zaměření“, který je spolufinancován evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

© 2007 Doc. RNDr. Ing. **Miloš Šeda**, Ph.D., seda@fme.vutbr.cz

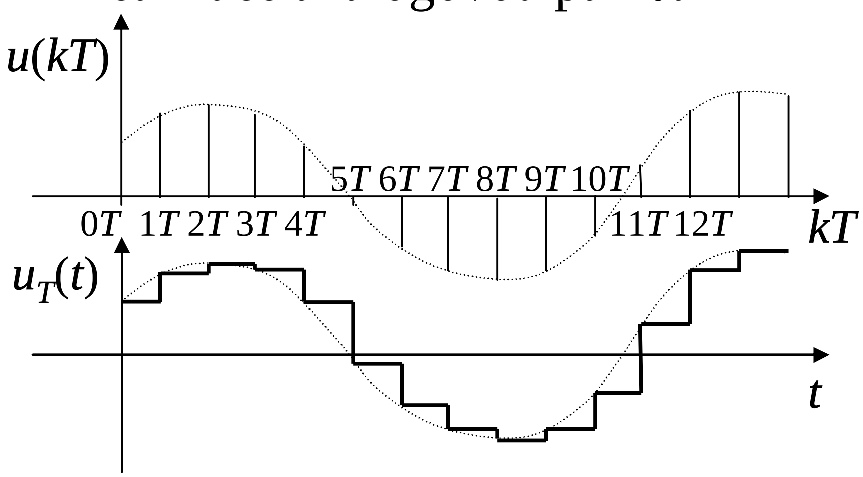
# Diskrétní systémy řízení

- takové systémy, v nichž alespoň jedna veličina systému řízení má tvar posloupnosti diskrétních hodnot (impulsů, čísel), např. z důvodu, že nemůže být měřena spojitě
- nejčastěji dáno použitím počítače jako regulátoru v systému automatického řízení



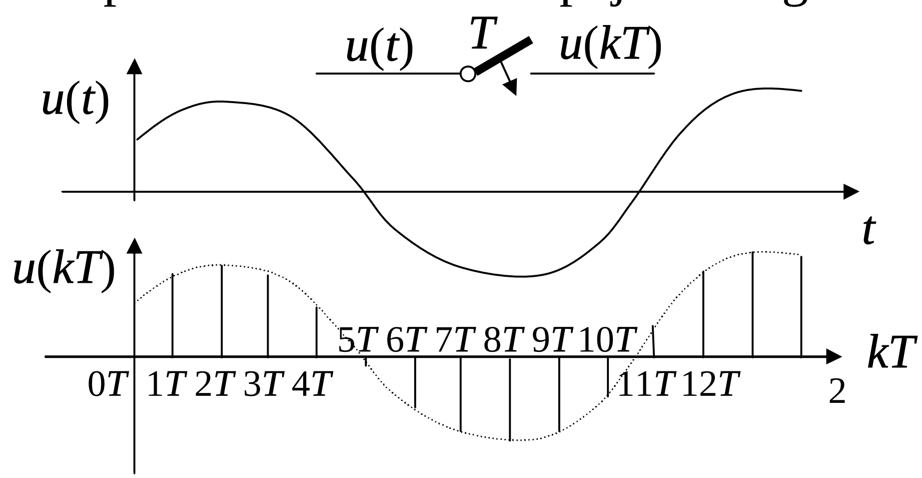

tvarovač (nultého řádu)

- realizace analogovou pamětí




vzorkovač

- provádí diskretizaci spojitého signálu



# volba vzorkovací periody

podle dynamiky regulované soustavy

a) $T \approx 0{,}5\,t_{\min}$,
kde $t_{\min}$ je nejmenší časová konstanta regulované soustavy

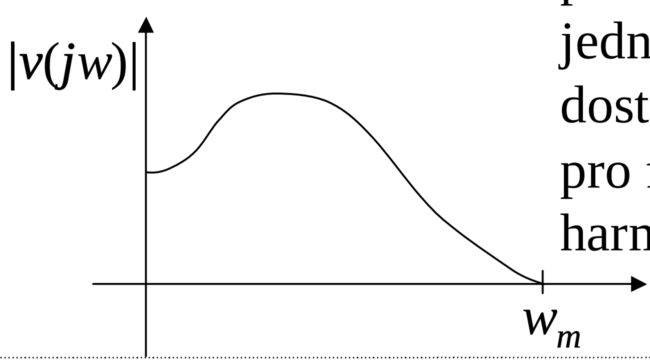
b) $T \approx (\frac{1}{4}$ až $\frac{1}{2})\ \Sigma t_i$,
kde $\Sigma t_i$ je součet všech časových konstant regulované soustavy

c) $T \approx (\frac{1}{8}$ až $\frac{1}{4})\ T_d$,
volí se u soustav s velkým časovým zpožděním $T_d$

d) $T \approx (\frac{1}{15}$ až $\frac{1}{6})\ T_{95}$,
kde $T_{95}$ je doba dosažení 95% ustálené hodnoty na přechodové charakteristice regulované soustavy

podle frekvenčního spektra vzorkované veličiny

e) podle *Shannon-Kotělnikovova teorému* $T < \pi / w_m$

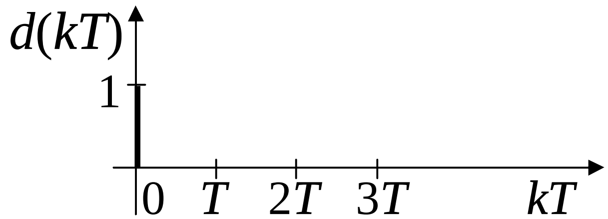



provedeme-li rozklad vzorkovaného signálu na jednotlivé harmonické Fourierova rozvoje, dostaneme amplitudové spektrum podle obrázku, pro frekvence $w > w_m$ je amplituda těchto harmonických kmitů nulová

f) doba závěru pohonu,
(nemá smysl, aby vzorkovací perioda byla kratší než doba, za kterou se stačí vykonat požadované nastavení akčního orgánu)

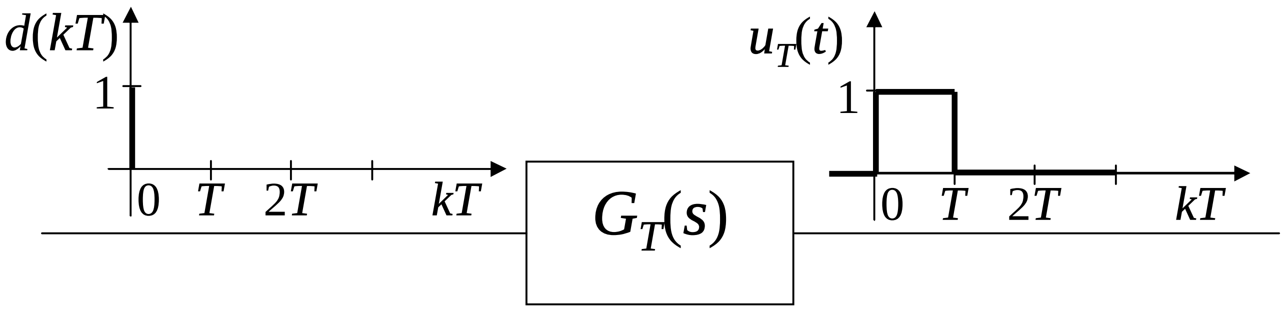
Přivedeme-li na vstup tvarovače nultého řádu diskrétní jednotkový impuls

$$d(kT) = \begin{cases} 1, & \text{pro} \quad k = 0 \\ 0, & \text{pro} \quad k \neq 0 \end{cases}$$

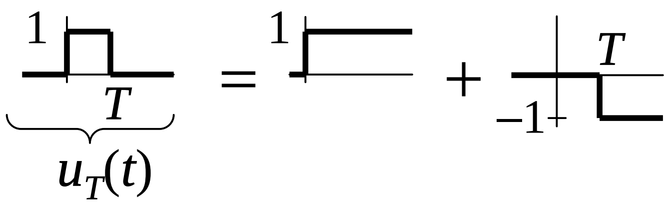


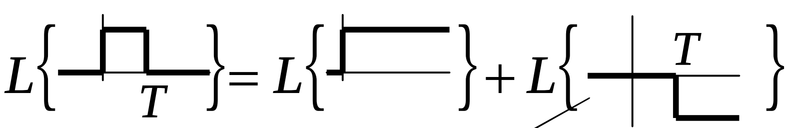

,

pak na výstupu tvarovače je pravoúhlá schodová funkce




její Laplaceův přenos je dán součtem Laplaceových obrazů dvou schodových funkcí




$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-Ts} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt = \int_T^\infty (-1)\, e^{-st} dt = (-1)\frac{1}{-s}\left[e^{-st}\right]_T^\infty = \frac{1}{s}\left(e^{-\infty} - e^{sT}\right) = -\frac{1}{s} e^{-Ts}$$

# Z-transformace

a) Přímá Z-transformace (originál $\rightarrow$ obraz)

$$F(z) = Z\{f(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\, z^{-k} = f(0) + f(T)\, z^{-1} + f(2T)\, z^{-2} + \ldots$$

(i) lze určit jako *součet geometrické řady*

(ii) pomocí *operátorového slovníku Z-transformace*

b) Zpětná Z-transformace (obraz $\rightarrow$ originál)

$$f(kT) = Z^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z).z^{k-1} dz\,,$$

kde $C$ je uzavřená křivka

Určuje se:

(i) z *operátorového slovníku Z-transformace*

(ii) dělením polynomu čitatele polynomem jmenovatele

(iii) pomocí *reziduové věty*

$$f(kT) = Z^{-1}\{F(z)\} = \sum_{\text{póly } F(z).z^{k-1}} \operatorname{res}\left\{F(z).z^{k-1}\right\}$$

výraz $z^{k-1}$ nemá žádné póly kromě případu $k$=0, pro $k$=0 má tedy výraz $F(z).z^{k-1}$ jeden pól navíc, proto předchozí vztah většinou rozdělujeme na 2 případy:

$$f(kT)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\text{póly } F(z);0}\operatorname{res}\left\{\frac{F(z)}{z}\right\} & \text{pro } k=0\\ \displaystyle\sum_{\text{póly } F(z)}\operatorname{res}\left\{\ F(z).z^{k-1}\right\} & \text{pro } k\geq 1\end{cases}$$

pro jednoduchý pól $z_0$ funkce $Y(z)$ platí

$$\operatorname*{res}_{z\to z_0}\{Y(z)\}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)Y(z)$$

§ pro $m$-násobný pól $z_0$ funkce $Y(z)$ je

$$\operatorname*{res}_{z\to z_0}\{Y(z)\}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[\ (z-z_0)^m.\ \ Y(z)\right]$$

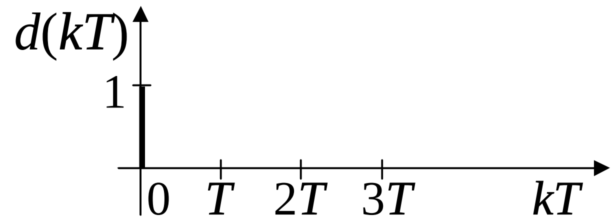
## Operátorový slovník Z-transformace

| | $f(t)$ | $F(s)$ | $F(z)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $d(t)$<br>Diracův impuls | $1$ | $1$ |
| 2 | $h(t)$<br>jednotkový skok | $\frac{1}{s}$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| 3 | $t$ | $\frac{1}{s^2}$ | $\frac{Tz}{(z-1)^2}$ |
| 4 | $t^2$ | $\frac{2}{s^3}$ | $\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$ |
| 5 | $a^n = a^{\frac{t}{T}}$ | $\frac{1}{s-\frac{1}{T}\ln a}$ | $\frac{z}{z-a}$ |

| | $f(t)$ | $F(s)$ | $F(z)$ |
|---|---|---|---|
| 6 | $e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ | $\frac{z}{z-e^{-aT}}$ |
| 7 | $\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$ | $\frac{1}{s(s+a)}$ | $\frac{1}{a}\frac{\left(1-e^{-aT}\right)z}{(z-1)\left(z-e^{-aT}\right)}$ |
| 8 | $\frac{1}{a}t-\frac{1-e^{-at}}{a^2}$ | $\frac{1}{s^2(s+a)}$ | $\frac{Tz}{a(z-1)^2}-\frac{\left(1-e^{-aT}\right)z}{a^2(z-1)\left(z-e^{-aT}\right)}$ |
| 9 | $t\,e^{-at}$ | $\frac{1}{(s+a)^2}$ | $\frac{T\,z\,e^{-aT}}{\left(z-e^{-aT}\right)^2}$ |
| 10 | $\frac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$ | $\frac{1}{(s+a)(s+b)}$ | $\frac{1}{b-a}\left(\frac{z}{z-e^{-aT}}-\frac{z}{z-e^{-bT}}\right)$ |

| | $f(t)$ | $F(s)$ | $F(z)$ |
|---|---|---|---|
| 11 | $\sin wt$ | $\dfrac{w}{s^2+w^2}$ | $\dfrac{z\sin wT}{z^2-2z\cos wT+1}$ |
| 12 | $\cos wt$ | $\dfrac{s}{s^2+w^2}$ | $\dfrac{z^2-z\cos wT}{z^2-2z\cos wT+1}$ |
| 13 | $e^{-at}\sin wt$ | $\dfrac{w}{(s+a)^2+w^2}$ | $\dfrac{ze^{-aT}\sin wT}{z^2-2ze^{-aT}\cos wT+e^{-2aT}}$ |
| 14 | $e^{-at}\cos wt$ | $\dfrac{s+a}{(s+a)^2+w^2}$ | $\dfrac{z^2-ze^{-aT}\cos wT}{z^2-2ze^{-aT}\cos wT+e^{-2aT}}$ |
| 15 | $d(t-nT)$ | $e^{-nTs}$ | $z^{-n}$ |

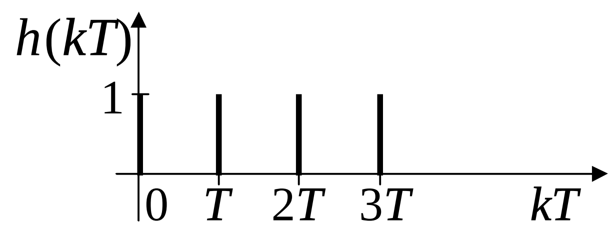
ad 1) $f(kT) = d(kT) = \begin{cases} 1, & \text{pro} \quad k = 0 \\ 0, & \text{pro} \quad k \neq 0 \end{cases}$




$$F(z) = f(0) + f(T)\, z^{-1} + f(2T)\, z^{-2} + f(3T)\, z^{-3} + \mathbf{L} = 1$$

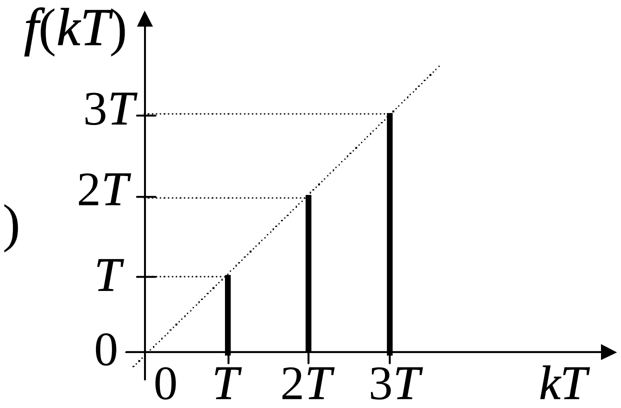
součet nekonečné geometrické řady s kvocientem $q$ a prvním členem $a_0$ $\Big\}$ $s = \dfrac{a_0}{1-q}$

ad 2) $f(kT) = h(kT) = \begin{cases} 1, & \text{pro} \quad k \geq 0 \\ 0, & \text{pro} \quad k < 0 \end{cases}$




$$F(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \mathbf{L} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{\frac{z-1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

ad 3) $f(kT) = kT$




$$F(z) = 0 + T z^{-1} + 2T z^{-2} + 3Tz^{-3} + 4Tz^{-4} + \ldots =$$

$$= T\left(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \ldots\right) = T\,G(z)$$

§ $G(z)$ dělíme $z$ a integrujeme člen po členu

$$\frac{G(z)}{z} = z^{-2} + 2z^{-3} + 3z^{-4} + 4z^{-5} + \ldots$$

$$\int \frac{G(z)}{z} dz = -z^{-1} - z^{-2} - z^{-3} - z^{-4} - \ldots = \frac{-z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{-1}{z-1}$$

po derivaci dostaneme

$$\frac{G(z)}{z} = \frac{d}{dz}\left(\frac{-1}{z-1}\right) = \frac{1}{(z-1)^2} \quad \Rightarrow \quad G(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \quad \Rightarrow \quad F(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

ad 5) $f(kT) = a^{kT}$

$$F(z) = 1 + a^T z^{-1} + a^{2T} z^{-2} + a^{3T} z^{-3} + \ldots = \frac{1}{1 - a^T z^{-1}} = \frac{z}{z - a^T}$$

ad 6) $f(kT) = e^{-akT}$

$$F(z) = 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + e^{-3aT} z^{-3} + \ldots = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

## Vlastnosti Z-transformace

1. Věta o linearitě

$$Z\{a\, f_1(kT) + b\, f_2(kT)\} = a\, F_1(z) + b\, F_2(z)$$

2. Věty o posunutí (pro celočíselné $m > 0$)

| § $T$ obecné | $T = 1$ sec |
|---|---|
| kladné | posunutí |
| $Z\{f[(k+1)T]\} = z\,F(z) - z\,f(0)$ | $Z\{f(k+1)\} = z\,F(z) - z\,f(0)$ |
| $Z\{f[(k+2)T]\} = z^2\,F(z) - z^2\,f(0) - z\,f(T)$ | $Z\{f(k+2)\} = z^2\,F(z) - z^2\,f(0) - z\,f(1)$ |
| $\dots$ | $\dots$ |
| $Z\{f[(k+m)T]\} = z^m\,F(z) - \sum_{i=0}^{m-1} f(iT)\,z^{m-i}$ | $Z\{f(k+m)\} = z^m\,F(z) - \sum_{i=0}^{m-1} f(i)\,z^{m-i}$ |
| záporné | posunutí |
| $Z\{f[(k-1)T]\} = z^{-1}\,F(z) - f(-T)$ | $Z\{f(k-1)\} = z^{-1}\,F(z) - f(-1)$ |
| $Z\{f[(k-2)T]\} = z^{-2}\,F(z) + z^{-1} f(-T) + f(-2T)$ | $Z\{f(k-2)\} = z^{-2}\,F(z) + z^{-1} f(-1) + f(-2)$ |
| $\dots$ | $\dots$ |
| $Z\{f[(k-m)T]\} = z^{-m}\,F(z) + \sum_{i=1}^{m} f(-iT)\,z^{i-m}$ | $Z\{f(k-m)\} = z^{-m}\,F(z) + \sum_{i=1}^{m} f(-i)\,z^{i-m}$ |

3. Věta o počáteční hodnotě

$$f(0) = \lim_{k \to 0} f(kT) = \lim_{z \to \infty} F(z)$$

4. Věta o konečné hodnotě

$$f(\infty) = \lim_{k \to \infty} f(kT) = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} F(z)$$

5. Věta o součtu vzorků

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(kT) = \lim_{z \to 1} F(z)$$

6. Věta o obrazu konvoluce

$$Z\left\{\sum_{i=0}^{k} f\left[(k-i)T\right] \cdot g\left[iT\right]\right\} = F(z) \cdot G(z)$$

*Důkaz.*

§ ad 2)

$$Z\{f[(k+m)T]\}=\sum_{k=0}^{\infty} f[(k+m)T]z^{-k} = f(mT)+f[(1+m)T]z^{-1}+f[(2+m)T]z^{-2}+\ldots = /.z^{m}.z^{-m}$$

$$= z^{m}\left\{f(mT)z^{-m}+f[(1+m)T]z^{-(1+m)}+f[(2+m)T]z^{-(2+m)}+\ldots\right\}=$$

$$= z^{m}\left\{F(z)-f(0)-f(T)z^{-1}-f(2T)z^{-2}-\ldots-f[(m-1)T]z^{-(m-1)}\right\}=$$

$$= z^{m}\left[F(z)-\sum_{i=0}^{m-1} f(iT)z^{-i}\right]= z^{m}F(z)-\sum_{i=0}^{m-1} f(iT)z^{m-i}$$

---

$$Z\{f[(k-m)T]\}=\sum_{k=0}^{\infty} f[(k-m)T]z^{-k} = f(-mT)+f[(1-m)T]z^{-1}+f[(2-m)T]z^{-2}+\ldots =$$

$$= z^{-m}\Big\{f(-mT)z^{m}+f[(1-m)T]z^{m-1}+f[(2-m)T]z^{m-2}+\ldots+\underbrace{f(0)+f(T)z^{-1}+f(2T)z^{-2}+\ldots}_{F(z)}\Big\}=$$

$$= z^{-m}\left[F(z)+\sum_{i=1}^{m} f(-iT)z^{i}\right]= z^{-m}F(z)+\sum_{i=1}^{m} f(-iT)z^{i-m}$$

**Příklad Z1.** Určete $z$-obraz diskrétní funkce vzniklé vzorkováním funkce $f(t)$ se vzorkovací periodou $T$=0,1 sec.
Laplaceův obraz příslušné spojité funkce je $F(s)=\dfrac{5}{s(s+3)}$ .

řešení:

Z operátorového slovníku dostaneme originál spojité funkce $f(t)=\dfrac{5}{3}\left(1-e^{-3t}\right)$
a k němu $z$-obraz diskrétní funkce $f(kT)$ vzniklé vzorkováním $f(t)$ je
$F(z)=\dfrac{5}{3}\dfrac{\left(1-e^{-3T}\right)z}{(z-1)\left(z-e^{-3T}\right)}$ . Po dosazení $T$=0,1 dostaneme $F(z)=\dfrac{0{,}43z}{(z-1)(z-0{,}74)}$

**Příklad Z2.** Určete originál $f(kT)$ k $z$-obrazu $F(z)=\dfrac{2z^2+4z-1}{z^3-z^2+3z-1}$

řešení: [ad (ii) dělením polynomu čitatele polynomem jmenovatele]

$$(2z^2+4z-1):(z^3-z^2+3z-1)=2z^{-1}+6z^{-2}-z^{-3}-17z^{-4}\ldots$$

$$\begin{array}{l}
\underline{2z^2-2z+6-2z^{-1}} \\
\quad 6z-7+2z^{-1} \\
\quad \underline{6z-6+18z^{-1}-6z^{-2}} \\
\qquad -1-16z^{-1}+6z^{-2} \\
\qquad \underline{-1+z^{-1}-3z^{-2}+z^{-3}} \\
\qquad\quad -17z^{-1}+9z^{-2}-z^{-3} \\
\qquad\quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{array}$$

$f(0)=0$, $f(T)=2$, $f(2T)=6$, $f(3T)=-1$, $f(4T)=-17$, …

Příklad Z3. Určete originál $f(kT)$ k $z$-obrazu $F(z)=\dfrac{z-0{,}8}{(z-1)(z-0{,}5)}$

řešení: [ad (i) rozklad na parciální zlomky a ze slovníku Z-transformace]

$$F(z)=\frac{z-0{,}8}{(z-1)(z-0{,}5)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-0{,}5}$$

$$A=\left[(z-1)\frac{z-0{,}8}{(z-1)(z-0{,}5)}\right]_{z=1}=\frac{1-0{,}8}{1-0{,}5}=\frac{0{,}2}{0{,}5}=0{,}4$$

$$B=\left[(z-0{,}5)\frac{z-0{,}8}{(z-1)(z-0{,}5)}\right]_{z=0{,}5}=\frac{0{,}5-0{,}8}{0{,}5-1}=\frac{-0{,}3}{-0{,}5}=0{,}6$$

$$F(z)=\frac{0{,}4}{z-1}+\frac{0{,}6}{z-0{,}5}$$

ze slovníku Z-transformace dostaneme

$$f(kT)=0{,}4+0{,}6.0{,}5^{k-1} \quad \text{pro } k\geq 1,$$

$$f(0)=0$$

Příklad Z4. Určete originál $f(kT)$ k $z$-obrazu $F(z)=\dfrac{2z-1}{(z-1)(z+0{,}5)^2}$

řešení:

$$F(z)=\frac{2z-1}{(z-1)(z+0{,}5)^2}=\frac{A}{z-1}+\frac{B_1}{z+0{,}5}+\frac{B_2}{(z+0{,}5)^2}$$

$$A=\left[(z-1)\frac{2z-1}{(z-1)(z+0{,}5)^2}\right]_{z=1}=\frac{2-1}{(1+0{,}5)^2}=\frac{1}{2{,}25}=\frac{4}{9}$$

$$B_2=\left[(z+0{,}5)^2\frac{2z-1}{(z-1)(z+0{,}5)^2}\right]_{z=-0{,}5}=\frac{2.(-0{,}5)-1}{-0{,}5-1}=\frac{-1-1}{-1{,}5}=\frac{-2}{-1{,}5}=\frac{4}{3}$$

$$B_1=\frac{1}{1!}\left\{\frac{d}{dz}\left[(z+0{,}5)^2\frac{2z-1}{(z-1)(z+0{,}5)^2}\right]\right\}_{z=-0{,}5}=\left\{\frac{d}{dz}\left[\frac{2z-1}{z-1}\right]\right\}_{z=-0{,}5}=$$

$$=\left\{2\frac{1}{z-1}+(2z-1)\frac{-1}{(z-1)^2}\right\}_{z=-0{,}5}=\left\{\frac{2z-2-2z+1}{(z-1)^2}\right\}_{z=-0{,}5}=\frac{-1}{2{,}25}=-\frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow\quad F(z)=\frac{4}{9}\frac{1}{z-1}-\frac{4}{9}\frac{1}{z+0{,}5}+\frac{4}{3}\frac{1}{(z+0{,}5)^2}$$

ze slovníku Z-transformace dostaneme

$$f(kT)=\frac{4}{9}-\frac{4}{9}(-0{,}5)^{k-1}+\frac{4}{3}(k-1)(-0{,}5)^{k-2}\quad \text{pro } k\geq 1,$$

$$f(0)=0$$

Příklad Z4'. Určete originál $f(kT)$ k $z$-obrazu

$$F(z)=\frac{2z-1}{(z-1)(z+0{,}5)^2}$$

jiný způsob řešení:

$$F(z)=\frac{2z-1}{(z-1)(z+0{,}5)^2}=\frac{2z-1}{(z-1)\left(z^2+z+0{,}25\right)}=\frac{2z-1}{z^3+z^2-0{,}75z-0{,}25}$$

$$(2z-1):(z^3+z^2-0{,}75z-0{,}25)=2z^{-2}-3z^{-3}+4{,}5z^{-4}\dots$$

$$\begin{array}{lllll}
2z+2 & -1{,}5z^{-1} & -0{,}5z^{-2} & & \\
\hline
\quad -3 & +1{,}5z^{-1} & +0{,}5z^{-2} & & \\
\quad -3 & -3z^{-1} & +2{,}25z^{-2} & +1{,}33z^{-3} & \\
\hline
 & -4{,}5z^{-1} & -1{,}75z^{-2} & -1{,}33z^{-3} & \\
 & \quad\dots & \quad\dots & \quad\dots &
\end{array}$$

z definice $F(z)=f(0)+f(T)z^{-1}+f(2T)z^{-2}+f(3T)z^{-3}+f(4T)z^{-4}+\dots$ dostáváme

$f(0)=0,\ f(T)=0,\ f(2T)=2,\ f(3T)=-3,\ f(4T)=4{,}5,\ \dots,$

to je ve shodě s výsledkem z předchozího řešení

$$f(kT)=\frac{4}{9}-\frac{4}{9}(-0{,}5)^{k-1}+\frac{4}{3}(k-1)(-0{,}5)^{k-2}\quad \text{pro } k\ge 1,\quad f(0)=0,$$

např. $f(2T)=\frac{4}{9}-\frac{4}{9}(-0{,}5)^{2-1}+\frac{4}{3}(2-1)(-0{,}5)^{2-2}=\frac{4}{9}+\frac{4}{18}+\frac{4}{3}=\frac{8+4+24}{18}=2$

# Diferenční rovnice

první diference (dopředná),

$$\Delta f(kT) = f[(k+1)T] - f(kT)$$

první diference (zpětná)

$$\nabla f(kT) = f(kT) - f[(k-1)T]$$

druhá diference

$$\Delta^2 f(kT) = \Delta f[(k+1)T] - \Delta f(kT) = \{ f[(k+2)T] - f[(k+1)T \} - \{ f[(k+1)T] - f(kT) \} =$$

$$= f[(k+2)T] - 2f[(k+1)T] + f(kT)$$

$$\nabla^2 f(kT) = \nabla f(kT) - \nabla f[(k-1)T] = f(kT) - 2f[(k-1)T] + f[(k-2)T]$$

třetí diference

$$\Delta^3 f(kT) = \Delta^2 f[(k+1)T] - \Delta^2 f(kT) =$$

$$= \{ \Delta f[(k+2)T] - \Delta f[(k+1)T] \} - \{ \Delta f[(k+1)T] - \Delta f(kT) \} =$$

$$= \Delta f[(k+2)T] - 2\Delta f[(k+1)T] + \Delta f(kT) =$$

$$= f[(k+3)T] - f[(k+2)T] - 2\{ f[(k+2)T] - f[(k+1)T] \} + f[(k+1)T] - f(kT) =$$

$$= f[(k+3)T] - 3f[(k+2)T] + 3f[(k+1)T] - f(kT)$$

$$\nabla^3 f(kT) = \nabla^2 f(kT) - \nabla^2 f[(k-1)T] = f(kT) - 3f[(k-1)T] + 3f[(k-2)T] - f[(k-3)T]$$

n-tá diference

$$\Delta^n f(kT) = \Delta^{n-1} f[(k+1)T] - \Delta^{n-1} f(kT) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f[(k+i)T]$$

$$\nabla^n f(kT) = \nabla^{n-1} f(kT) - \nabla^{n-1} f[(k-1)T] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f[(k-i)T]$$

# lineární diferenční rovnice n-tého řádu

a) *diferenční tvar* (z dopředných a zpětných diferencí):

$$a_n \Delta^n y(kT) + \ldots + a_1 \Delta y(kT) + a_0 y(kT) = b_m \Delta^m u(kT) + \ldots + b_1 \Delta u(kT) + b_0 u(kT) \qquad (1)$$

$$a_n \nabla^n y(kT) + \ldots + a_1 \nabla y(kT) + a_0 y(kT) = b_m \nabla^m u(kT) + \ldots + b_1 \nabla u(kT) + b_0 u(kT) \qquad (2)$$

kde $u(k)$ … známá vstupní diskrétní funkce
$y(k)$ … hledaná výstupní diskrétní funkce

Jestliže za diference dosadíme podle předchozích vztahů, dostaneme

b) *rekurentní tvar diferenční rovnice* (dosazením vztahů pro diference do (1) a (2)):

$$a_n y[(k+n)T] + \ldots + a_1 y[(k+1)T] + a_0 y(kT) = b_m u[(k+m)T] + \ldots + b_1 u[(k+1)T] + b_0 u(kT) \qquad (3)$$

$$a_0 y(kT) + a_1 y[(k-1)T] + \ldots + a_n y[(k-n)T] = b_0 u(kT) + b_1 u[(k-1)T] + \ldots + b_m u[(k-m)T] \qquad (4)$$

Poznámka:

K řešení diferenčních rovnic musí být dány počáteční podmínky,
např. u vztahu (1) pro $y(0)$, $\Delta y(0)$, … , $\Delta^{n-1} y(0)$ , $u(0)$, $\Delta u(0)$, … , $\Delta^{m-1} u(0)$,
u vztahu (3) pro $y(0)$, $y(T)$, … , $y[(n-1)T]$, $u(0)$, $u(T)$, … , $u[(m-1)T]$
Zápis (3) je častější v matematické literatuře, diferenční rovnice ve tvaru (4) v technických aplikacích, protože počáteční podmínky $y(-T)$, $y(-2T)$,…, $y(-nT)$, $u(-T)$, $u(-2T)$,…$u(-mT)$ jsou většinou nulové

# Řešení diferenčních rovnic

(i) <u>rekurentním způsobem</u>

řešení je v *otevřeném tvaru*,
hodnotu $y(kT)$ nelze určit bez znalosti předcházejících hodnot

(ii) <u>klasickým způsobem</u>

řešení = řešení homogenní rovnice + řešení partikulární části,

– k homogenní rovnici (pravá strana je rovna nule):

$$a_n\, y[(k+n)T] + a_{n-1}\, y[(k+n-1)T] + \mathbf{L} + a_1\, y[(k+1)T] + a_0\, y(kT) = 0$$

určíme příslušnou charakteristickou rovnici

$$a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \mathbf{L} + a_1\, z + a_0 = 0$$

a) jsou-li $z_1$, $z_2$, … , $z_n$ její navzájem různé kořeny (reálné nebo komplexní), pak řešení homogenní rovnice je

$$y_{\mathrm{hom}}(kT) = C_1\, z_1^{kT} + C_2\, z_2^{kT} + \mathbf{L} + C_n\, z_n^{kT}$$

b) je-li jeden kořen (např. $z_1$) $p$-násobný a ostatní jednoduché, je

$$y_{\mathrm{hom}}(kT) = \left(C_1 + C_2 k + ... + C_p k^{p-1}\right) z_1^{kT} + C_{p+1}\, z_2^{kT} + \mathbf{L} + C_n\, z_{n-p+1}^{kT}$$

c) pro větší počet násobných kořenů získáme tvar $y_{\mathrm{hom}}(kT)$ zobecněním b)
[Konstanty $C_1$, $C_2$, … , $C_n$ určíme z počátečních podmínek]

– partikulární řešení → viz literatura

## (iii) pomocí Z-transformace

Diferenční rovnice

$$a_n\, y[(k+n)T] + \ldots + a_1\, y[(k+1)T] + a_0\, y(kT) = b_m\, u[(k+m)T] + \ldots + b_1\, u[(k+1)T] + b_0\, u(kT)$$

+ počáteční podmínky pro $y(0)$, $y(T)$, …, $y[(n-1)T]$, $u(0)$, $u(T)$, …, $u[(m-1)T]$

$a_n\, y[(k+n)T] + \ldots = b_m\, u[(k+m)T] + \ldots$
$y(0) = \ldots$, $u(0) = \ldots$,
úloha v originálu

$\xrightarrow{Z\{\text{dif.r.}\}}$

$a_n\, z^n Y(z) + \ldots = b_m\, z^m U(z) + \ldots$
úloha v Z-obraze

rekurentní řešení (*není uzavřené*)
nebo klasické řešení (*nesnadné*)

řešení v Z-obraze
(*snadnější*)

$Y(z)$
výsledek v Z-obraze

$\xrightarrow{Z^{-1}\{Y(z)\}}$

$y(kT)$
výsledek v originále

Příklad D1.

Řešte numericky diferenční rovnici ($T$=1)

$$y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=u(k+2)-3u(k+1)+2u(k)$$

pro vstupní funkci $u(k)=h(k)$

a počáteční podmínky $y(0)=0,\ y(1)=2$

řešení (i): Rovnici upravíme tak, aby na levé straně byla výstupní funkce s „největším posunutím“

$$y(k+2)=u(k+2)-3u(k+1)+2u(k)-3y(k+1)-2y(k)$$

$$y(0)=0$$

$$y(1)=2$$

$$\Rightarrow \quad k=0: y(2)=u(2)-3u(1)+2u(0)-3y(1)-2y(0)=1-3+2-6-0=-6$$

$$k=1: y(3)=u(3)-3u(2)+2u(1)-3y(2)-2y(1)=1-3+2+18-4=14$$

$$k=2: y(4)=u(4)-3u(3)+2u(2)-3y(3)-2y(2)=1-3+2-42+12=-30$$

---

Příklad D2. Určete <u>uzavřené řešení</u> diferenční rovnice

$$y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=0$$

pro počáteční podmínky $y(0)=0,\ y(1)=2$

řešení (ii): charakteristická rovnice:

$$z^2+3z+2=0 \ \Rightarrow\ (z+1)(z+2)=0 \Rightarrow\ z_1=-1,\ z_2=-2$$

$$\underline{\underline{y(k)=C_1 z_1{}^k+C_2 z_2{}^k}}=C_1(-1)^k+C_2(-2)^k$$

integrační konstanty $C_1$, $C_2$ dostaneme z počátečních podmínek

$$y(0)=0=C_1+C_2$$

$$y(1)=\underline{2=-C_1-2C_2}$$

$$2=-C_2 \Rightarrow C_2=-2 \Rightarrow C_1=2$$

$\Rightarrow$ řešení homogenní rovnice je

$$\underline{\underline{y(k)=}}\,2(-1)^k-2(-2)^k=\underline{\underline{2\,[(-1)^k-(-2)^k]}}$$

$$y(2)=2\,[1-4]=-6$$

$$y(3)=2\,[-1-(-8)]=14$$

$$y(4)=2\,[1-16]=-30$$

---

Příklad D3. Užitím Z-transformace řešte diferenční rovnici

$$y(k+2) - 2y(k+1) + y(k) = u(k)$$

pro vstupní funkci $u(k) = \begin{cases} 2^k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$

a počáteční podmínky $y(0) = 0, y(1) = 2$

řešení (iii): Z-obraz levé strany se rovná Z-obrazu pravé strany

$$Z\{y(k+2) - 2y(k+1) + y(k)\} = Z\{u(k)\}$$

podle věty o kladném posunutí

$$z^2\, Y(z) - z^2\, y(0) - z\, y(1) - 2\,[zY(z) - z\, y(0)] + Y(z) = U(z)$$

$$Y(z)\,[z^2 - 2z + 1] - 2z = U(z)$$

$$Y(z)(z-1)^2 - 2z = \frac{z}{z-2} \quad \Rightarrow \quad Y(z) = \frac{z(2z-3)}{(z-2)(z-1)^2}$$

originál získáme např. dělením polynomů čitatele a jmenovatele $Y(z)$:

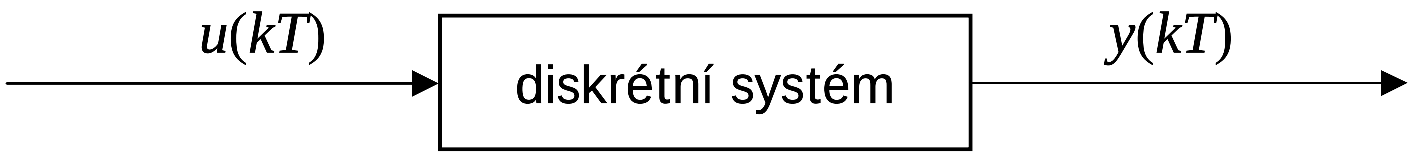
$$\left(2z^2 - 3z\right) : \left(z^3 - 4z^2 + 5z - 2\right) = 2z^{-1} + 5z^{-2} + 10z^{-3} + 19z^{-4} \ldots \quad ,$$

a tedy $y(0) = 0, y(1) = 2, y(2) = 5, y(3) = 10, y(4) = 19, \ldots$

---

Poznámka: Řešení v otevřeném tvaru bylo možné získat ze zadání i jednodušeji postupem použitým v příkladu D1.

# Vnější popis dynamických vlastností diskrétních systémů




## (i) lineární diferenční rovnice

např. v rekurentním tvaru z dopředných diferencí spolu s počátečními podmínkami

$$a_n\, y[(k+n)T] + \ldots + a_1\, y[(k+1)T] + a_0\, y(kT) = b_m\, u[(k+m)T] + \ldots + b_1\, u[(k+1)T] + b_0\, u(kT)$$

$y(0)$, $y(T)$, …, $y[(n-1)T]$, $u(0)$, $u(T)$, …, $y[(m-1)T]$

$$\Rightarrow\; a_n\, y[(k+n)T] = b_m\, u[(k+m)T] + \ldots + b_1\, u[(k+1)T] + b_0\, u(kT) - \\ - a_{n-1}\, y[(k+n-1)T] - \ldots - a_1\, y[(k+1)T] - a_0\, y(kT)$$

každý člen podělíme koeficientem $a_n$, abychom dostali vztah pro $y[(k+n)T]$, postupně dosazujeme $k$=0,1, …

musí přitom platit $m \le n$
(jinak by současná hodnota výstupu $y$ závisela na budoucí hodnotě vstupu $u$)

## (ii) Z-přenos

- poměr Z-obrazu diskrétní výstupní veličiny k Z-obrazu diskrétní vstupní veličiny ***při nulových počátečních podmínkách***

$$\boxed{G(z)=\frac{Z\{y(kT)\}}{Z\{u(kT)\}}=\frac{Y(z)}{U(z)}}$$

Jestliže rekurentní tvar diferenční rovnice z dopředných diferencí transformujeme podle věty o linearitě a věty o kladném posunutí a dosadíme nulové počáteční hodnoty, dostaneme:

$$a_n z^n Y(z)+a_{n-1}z^{n-1}Y(z)+\ldots+a_1 zY(z)+a_0 Y(z)=$$

$$=b_m z^m U(z)+b_{m-1}z^{m-1}U(z)+\ldots+b_1 zU(z)+b_0 U(z)$$

$$\Rightarrow Y(z)\left[a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0\right]=U(z)\left[b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\ldots+b_1 z+b_0\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\ldots+b_1 z+b_0}{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0}}$$

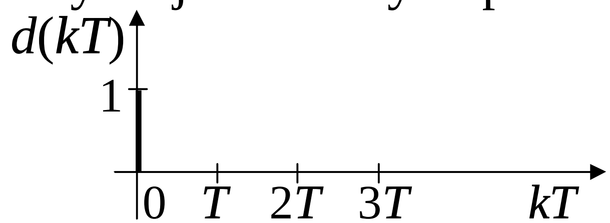
v diferenční rovnici ze zpětných diferencí lze obdobně odvodit

$$\boxed{G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+\ldots+b_m z^{-m}}{a_0+a_1 z^{-1}+\ldots+a_n z^{-n}}}$$

## (iii) **diskrétní impulsní funkce / charakteristika**

- analytické vyjádření/graf odezvy na jednotkový impuls

$$d(kT) = \begin{cases} 1, & \text{pro} \quad k = 0 \\ 0, & \text{pro} \quad k \neq 0 \end{cases}$$



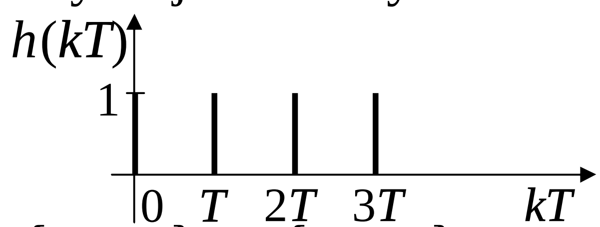

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Z\{y(kT)\}}{Z\{u(kT)\}} = \frac{Z\{y(kT)\}}{Z\{d(kT)\}} = \frac{Z\{y(kT)\}}{1} = Z\{y(kT)\}$$

$$\Rightarrow y(kT) \equiv \boxed{g(kT) = Z^{-1}\{G(z)\}}$$

## (iv) **diskrétní přechodová funkce / charakteristika**

- analytické vyjádření/graf odezvy na jednotkový skok

$$h(kT) = \begin{cases} 1, & \text{pro} \quad k \geq 0 \\ 0, & \text{pro} \quad k < 0 \end{cases}$$




$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Z\{y(kT)\}}{Z\{u(kT)\}} = \frac{Z\{y(kT)\}}{Z\{h(kT)\}} = \frac{Z\{y(kT)\}}{\dfrac{z}{z-1}}$$

$$\Rightarrow y(kT) \equiv \boxed{h(kT) = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-1} G(z)\right\}}$$

# Vztah mezi diskrétní impulsní a diskrétní přechodovou funkcí

$$h(kT) = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}G(z)\right\} \Rightarrow \underline{\underline{H(z) = \frac{z}{z-1}G(z)}} \Rightarrow \underline{\underline{G(z) = \frac{z-1}{z}H(z)}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} h(kT)z^{-k} = \frac{z}{z-1}\sum_{k=0}^{\infty} g(kT)z^{-k} \Rightarrow (z-1)\sum_{k=0}^{\infty} h(kT)z^{-k} = z\sum_{k=0}^{\infty} g(kT)z^{-k} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} h(kT)z^{1-k} - \sum_{k=0}^{\infty} h(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)z^{1-k}$$

$$h(0)z + h(T) + h(2T)z^{-1} + h(3T)z^{-2} + \ldots - \left\{h(0) + h(T)z^{-1} + h(2T)z^{-2} + h(3T)z^{-3} + \ldots\right\} =$$

$$= g(0)z + g(T) + g(2T)z^{-1} + g(3T)z^{-2} + \ldots$$

$$\left.\begin{array}{ll} z^{1}: & g(0) = h(0) \\ z^{0}: & g(T) = h(T) - h(0) \\ z^{-1}: & g(2T) = h(2T) - h(T) \\ z^{-2}: & g(3T) = h(3T) - h(2T) \\ & \quad\Downarrow \\ & \underline{\underline{g(kT) = h(kT) - h[(k-1)T]}} \end{array}\right\}$$

sečtením těchto rovnic dostaneme

$$\underline{\underline{h(kT) = \sum_{i=0}^{k} g(iT)}}$$

## (v) **frekvenční přenos diskrétního systému**

- podíl Fourierova obrazu výstupní funkce ku Fourierovu obrazu vstupní funkce

$$G(jwT) = \frac{Y(jwT)}{U(jwT)}$$

- získáme jej ze Z-přenosu záměnou $\boxed{z = e^{jwT}} = \underbrace{\cos wT + j \sin wT}$, tj.

$$\boxed{G(jwT) = \left[G(z)\right]_{z=e^{jwT}}}$$

pro $wT \in < 0, 2p >$ opíše jednotkovou kružnici v komplexní rovině proti směru otáčení hodinových ručiček (začíná v (1,0))

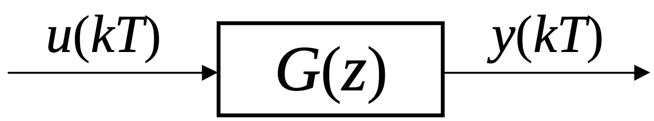
- frekvenční přenos diskrétního systému je komplexní periodická funkce bezrozměrné frekvence $wT$ s periodou $2p$

$$G(jwT) = G[j(wT + 2kp)]$$

## (vi) **frekvenční charakteristika diskrétního systému**

- graf hodnot frekvenčního přenosu diskrétního systému pro frekvence z rozsahu $wT \in < 0, 2p >$

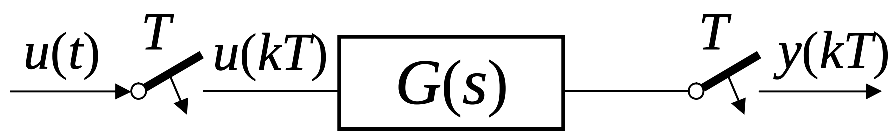
# Bloková algebra diskrétních obvodů




$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}\Rightarrow Y(z)=G(z)U(z)$$

---

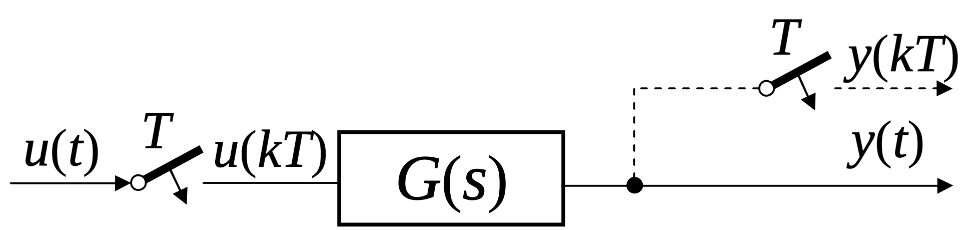
(a)




$$Y(z)=Z\left\{V\left\{L^{-1}\{G(s)\}\right\}\right\}\cdot U(z)=G(z)U(z)$$

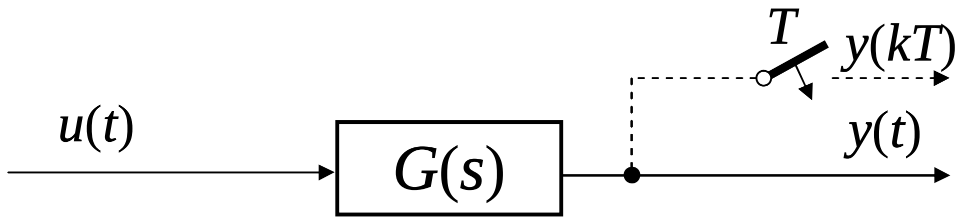
operace vzorkování spojitého signálu s periodou $T$

(b)



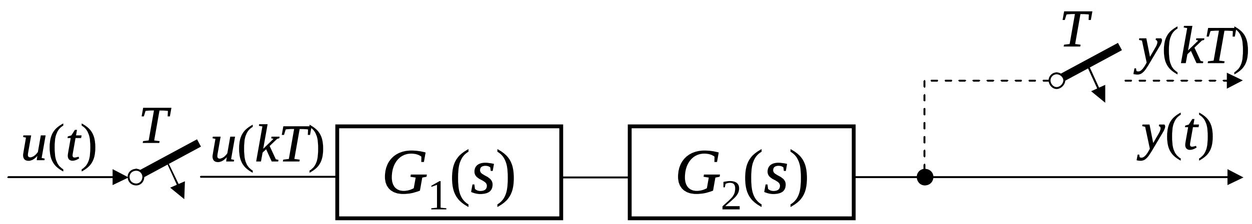

$$Y(z)=Z\left\{V\left\{L^{-1}\{G(s)\}\right\}\right\}\cdot U(z)=G(z)U(z)$$

(c)



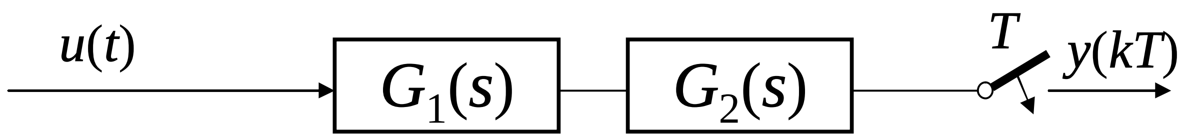

$$Y(z) = Z\left\{V\left\{L^{-1}\{G(s)U(s)\}\right\}\right\} = GU(z)$$

(d)



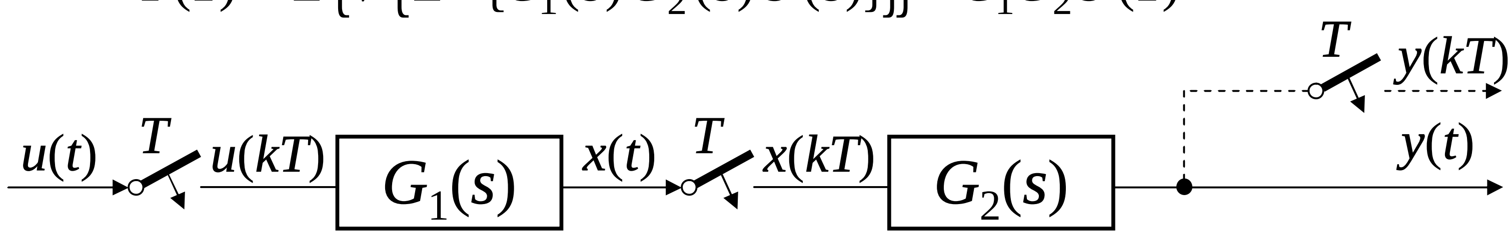

$$Y(z) = Z\left\{V\left\{L^{-1}\{G_1(s)G_2(s)\}\right\}\right\} \cdot U(z) = G_1G_2(z)U(z)$$

(e)




$$Y(z) = Z\left\{V\left\{L^{-1}\{G_1(s)G_2(s)U(s)\}\right\}\right\} = G_1G_2U(z)$$

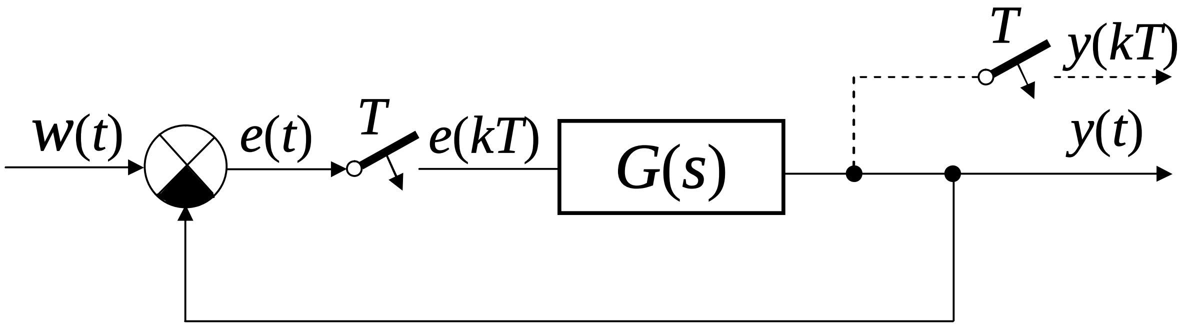
(f)




$$Y(z) = Z\left\{V\left\{L^{-1}\{G_2(s)\}\right\}\right\} \cdot X(z) =$$

$$= Z\left\{V\left\{L^{-1}\{G_2(s)\}\right\}\right\} \cdot Z\left\{V\left\{L^{-1}\{G_1(s)\}\right\}\right\} U(z) = G_2(z)G_1(z)U(z)$$

antiparalelní (zpětnovazební) zapojení

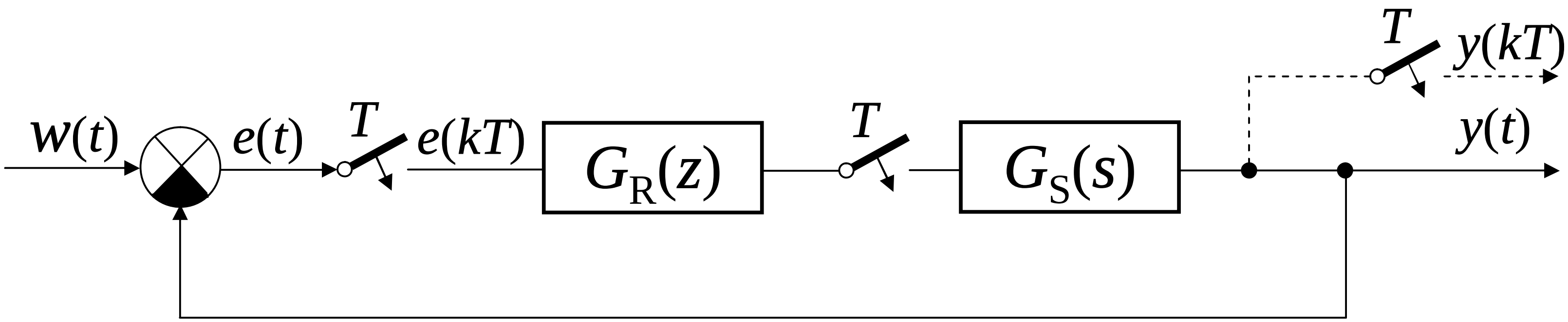



$e(t) = w(t) - y(t) \Rightarrow E(z) = W(z) - Y(z)$ [plyne z věty o linearitě]

$$Y(z) = G(z)E(z) = G(z)[W(z) - Y(z)] = G(z)W(z) - G(z)Y(z)$$

$$\Rightarrow Y(z)[1 + G(z)] = G(z)W(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{G_w(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)}}$$



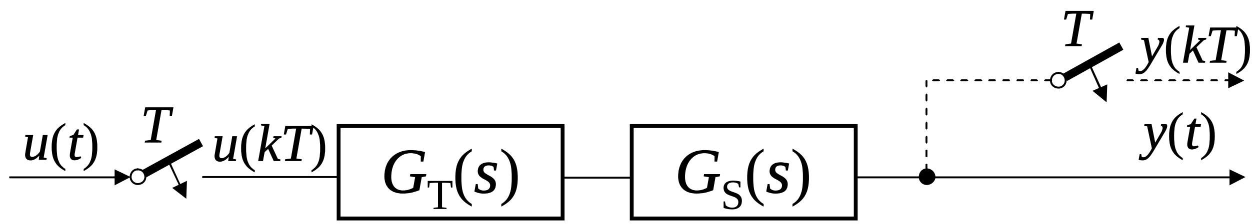

$$Y(z) = G_S(z)G_R(z)E(z) = G_S(z)G_R(z)[W(z) - Y(z)]$$

$$\Rightarrow G_S(z)G_R(z)W(z) - G_S(z)G_R(z)Y(z)$$

$$\Rightarrow Y(z)[1 + G_S(z)G_R(z)] = G_S(z)G_R(z)W(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{G_w(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{G_S(z)G_R(z)}{1 + G_S(z)G_R(z)}}$$

Příklad BA1. Určete přenos zapojení vzorkovač-tvarovač-spojitá soustava.




$$Y(z) = Z\left\{V\left\{L^{-1}\{G_T(s)G_S(s)\}\right\}\right\}\cdot U(z) = G_TG_S(z)U(z)$$

Tvarovač nultého řádu má přenos

$$G_T(s) = L\left\{\quad T \quad\right\} = L\left\{\quad\right\} + L\left\{\quad T \quad\right\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-Ts} = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

V Laplaceově transformaci znamená násobení obrazu výrazem $e^{-Ts}$ posunutí originálu o $-T$.

V Z-transformaci posunutí o $-T$ znamená podle věty o posunutí násobení Z-obrazu výrazem $z^{-1}$.

$$\Rightarrow \quad G_TG_S(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}G_S(z)\right\} = Z\left\{\frac{G_S(z)}{s}\right\} - Z\left\{e^{-Ts}\frac{G_S(z)}{s}\right\} =$$

$$= Z\left\{\frac{G_S(z)}{s}\right\} - z^{-1}Z\left\{\frac{G_S(z)}{s}\right\} = \left(1-z^{-1}\right)Z\left\{\frac{G_S(z)}{s}\right\}$$

# I. Stabilita lineárních diskrétních obvodů

Obecné vyjádření stability:

Regulační obvod je *stabilní*, jestliže po jeho vychýlení z rovnovážného stavu poruchou se regulovaná veličina *y* ustálí na původní hodnotě nebo na nové hodnotě při vychýlení řídící veličinou *w* (tj. při změně žádané hodnoty regulované veličiny). **n**

<u>spojité regulační obvody</u>: $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = y_0$

popis diferenciální rovnicí $a_n y^{(n)}(t) + \mathbf{L} + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = \ldots$

$\Rightarrow$ řešení $y(t) = \underbrace{y_{\text{hom}}(t)}_{\text{přechodná část}} + \underbrace{y_{\text{part}}(t)}_{\text{ustálená část}}$

kořeny charakteristické rovnice $\overbrace{a_n s^n + \mathbf{L} + a_1 s + a_0 = 0}^{1+G_0(s)=0}$ jsou:

1. reálné, navzájem různé: $y_{\text{hom}}(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + \mathbf{L} + c_n e^{s_n t} = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i e^{s_i t}$
2. reálný *m*-násobný kořen $s_k$: $y_{\text{hom}}(t) = \left(c_{k_1} + c_{k_2} t + c_{k_3} t^2 + \mathbf{L} + c_{k_m} t^{m-1}\right) e^{s_k t}$
3. komplexně sdružené $a \pm jb$: $y_{\text{hom}}(t) = e^{at}\left(c_k \sin bt + c_{k+1} \cos bt\right)$
4. kombinace 1,2,3

$\lim\limits_{t\to\infty} y_{\text{hom}}(t) = 0 \Rightarrow$ obvod je stabilní, jsou-li reálné části všech kořenů charakteristické rovnice záporné

$\lim\limits_{t\to\infty} y_{\text{part}}(t) = \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = y_0$

nutná a postačující podmínka stability

## diskrétní regulační obvody:

popis diferenční rovnicí $a_n\, y[(k+n)T] + \mathbf{L} + a_1\, y[(k+1)T] + a_0\, y(kT) = \ldots$

$\Rightarrow$ řešení $\quad y(kT) = \underbrace{y_{\text{hom}}(kT)}_{\text{přechodná část}} + \underbrace{y_{\text{part}}(kT)}_{\text{ustálená část}}$

kořeny charakteristické rovnice $a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \mathbf{L} + a_1\, z + a_0 = 0$ jsou:

1. $z_1, z_2, \ldots, z_n$ navzájem různé (reálné nebo komplexní), pak

$$y_{\text{hom}}(kT) = C_1\, z_1^{kT} + C_2\, z_2^{kT} + \mathbf{L} + C_n\, z_n^{kT}$$

2. je-li jeden kořen (např. $z_1$) $p$-násobný a ostatní jednoduché, je

$$y_{\text{hom}}(kT) = \left(C_1 + C_2 k + \ldots + C_p k^{p-1}\right) z_1^{kT} + C_{p+1}\, z_2^{kT} + \mathbf{L} + C_n\, z_{n-p+1}^{kT}$$

3. kombinace 1,2

[Konstanty $C_1$, $C_2$, … určíme z počátečních podmínek]

$\lim\limits_{k\to\infty} y_{\text{hom}}(kT) = 0 \quad \Rightarrow$ $\boxed{\text{obvod je stabilní, je-li splněno } |z_i| < 1,\ i = 1, 2, \ldots, n}$

$\lim\limits_{k\to\infty} y_{\text{part}}(kT) = \lim\limits_{k\to\infty} y(kT) = y_0$

nutná a postačující podmínka stability diskrétního systému

[Diskrétní systém je *stabilní*, jestliže kořeny charakteristické rovnice leží uvnitř jednotkové kružnice v komplexní rovině $z$.]

Laplaceův obraz spojité funkce $f(t)$: $$L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$\Rightarrow$ Laplaceův obraz diskrétní funkce $f(kT)$: $$L\{f(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\, e^{-skT}$$

Z-obraz diskrétní funkce $f(kT)$: $$Z\{f(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\, z^{-k}$$

Z-transformace je Laplaceova transformace diskrétní funkce pro novou proměnnou

$$\boxed{z = e^{sT}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{s = \frac{1}{T} \ln z}$$

$\Rightarrow$ pro kořeny charakteristické rovnice spojitého a diskrétního systému platí vztah

$$\boxed{z_i = e^{s_i T}}$$

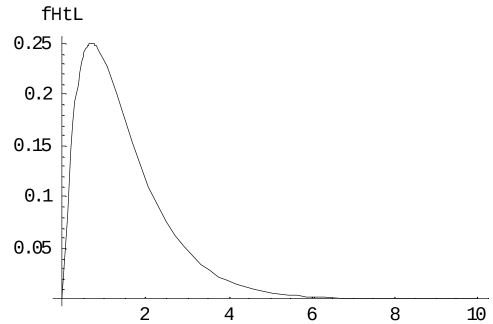
Vztah podmínky stability pro lineární spojité systémy a lineární diskrétní systémy:

| | poloha kořenů charakter. rovnice v rovině „*s*“ u spojitého systému | poloha kořenů charakter. rovnice v rovině „*z*“ u diskrétního systému | regulační pochod v časové oblasti |
|---|---|---|---|
| 1 | v levé polorovině | v levé polorovině | stabilní |
| 2 | v pravé polorovině | vně jednotkové kružnice | nestabilní |
| 3 | komplexně sdružené v levé polorovině | komplexně sdružené uvnitř jednotkové kružnice | kmitavý tlumený |
| 4 | komplexně sdružené na imaginární ose | na jednotkové kružnici | na mezi stability |
| 5 | komplexně sdružené v pravé polorovině | komplexně sdružené a na záporné reálné ose vně jednotkové kružnice | kmitavý netlumený |

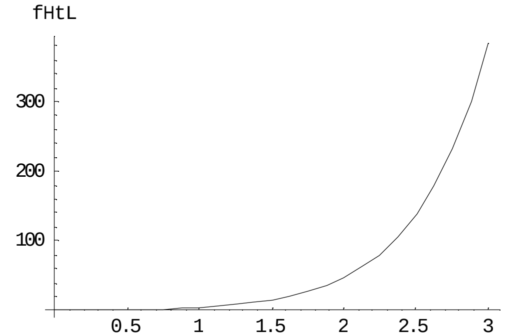
Charakteristická rovnice $1+G_0(s)=0$ , přenos řízení $G_w(s)=\dfrac{G_0(s)}{1+G_0(s)}$

Příklady:

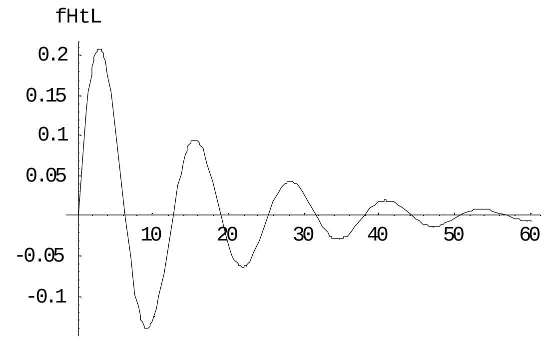
$$G_{1w}(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\Rightarrow s_1=-1,\ s_2=-2$$



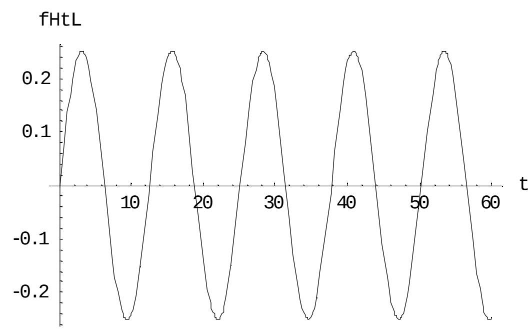

$$G_{2w}(s)=\frac{1}{(s-1)(s-2)}\Rightarrow s_1=1,\ s_2=2$$




$$G_{3w}(s)=\frac{1}{8s^2+s+2}\Rightarrow s_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4.8.2}}{2.8}=\frac{-1}{16}\pm\frac{j\sqrt{63}}{16}$$

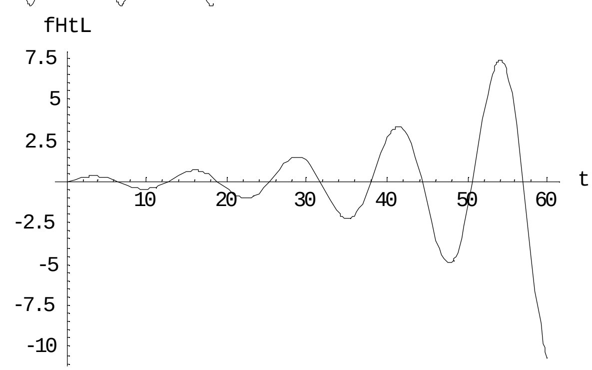



$$G_{4w}(s)=\frac{1}{8s^2+2}\Rightarrow s_{1,2}=\pm\frac{j}{2}$$




$$G_{5w}(s)=\frac{1}{8s^2-s+2}$$

$$\Rightarrow s_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4.8.2}}{2.8}=\frac{1}{16}\pm\frac{j\sqrt{63}}{16}$$



# Kritéria stability

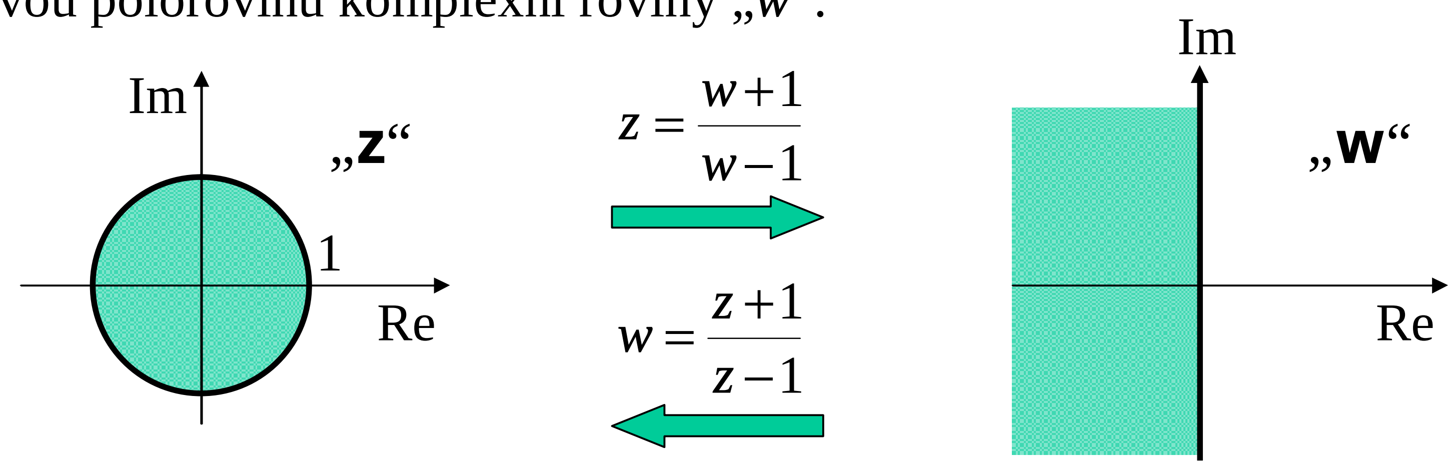
(i) K určení stability lze použít (obdobně jako u spojitých systémů) algebraická a frekvenční <u>kritéria stability v</u> jejich <u>diskrétní verzi</u>.

(ii) Jinou možností je nějakou transformací převést komplexní rovinu „*z*“ na komplexní rovinu „*s*“ a využít kritéria stability pro spojité systémy.

Transformace $z = e^{sT}, \quad s = \frac{1}{T}\ln z$ nejsou příliš vhodné pro praktické použití.

Proto se častěji využívá tzv. *bilineární transformace* definovaná vztahem

$z = \frac{w+1}{w-1}$, resp. inverzním vztahem $w = \frac{z+1}{z-1}$, která podobně jako předchozí transformace zobrazí jednotkovou kružnici v komplexní rovině „*z*“ na imaginární osu v komplexní rovině „*w*“ a vnitřek jednotkové kružnice v komplexní rovině „*z*“ na levou polorovinu komplexní roviny „*w*“.



Příklad: Rozhodněte o stabilitě obvodu s přenosem řízení

$$G_w(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{G_0(z)}{1+G_0(z)} = \frac{z^2 - z + 2}{3z^3 - z^2 + 2z - 1}$$

řešení: Charakteristická rovnice je $3z^3 - z^2 + 2z - 1 = 0$ , (∗)

použijeme bilineární transformaci

$$3\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^3 - \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 + 2\left(\frac{w+1}{w-1}\right) - 1 = 0 \quad /.(w-1)^3$$

$$3(w+1)^3 - (w+1)^2(w-1) + 2(w+1)(w-1)^2 - (w-1)^3 = 0$$

$$3(w^3 + 3w^2 + 3w + 1) - (w^2 + 2w + 1)(w-1) + 2(w+1)(w^2 - 2w + 1) - (w-1)^3 = 0$$

$$3w^3 + 9w^2 + 9w + 3 - (w^3 + w^2 - w - 1) + 2(w^3 - w^2 - w + 1) - (w^3 - 3w^2 + 3w - 1) = 0$$

$$3w^3 + 9w^2 + 5w + 7 = 0 \qquad (**)$$

podle Hurwitzova kritéria

$$H_2 = \begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 9.5 - 7.3 = 45 - 21 = 24 > 0$$

⇒ kořeny rovnice (∗∗) leží v levé polorovině komplexní roviny „$w$“

⇒ kořeny charakteristické rovnice (∗) leží uvnitř jednotkové kružnice v komplexní rovině „$z$“, a tedy obvod je stabilní

# II. Číslicové PSD regulátory

diskrétní verze spojitého PID regulátoru
(PSD = proporcionálně-sumačně-diferenční)

Ideální <u>spojitý</u> PID regulátor lze popsat přenosem

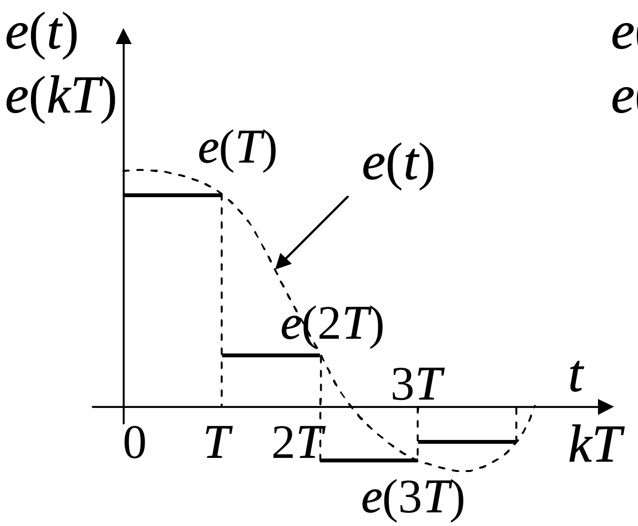
$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s = r_0\left(1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_{-1}}s} + \frac{r_1}{r_0}s\right) = r_0\left(1 + \frac{1}{T_\mathrm{I} s} + T_\mathrm{D} s\right),$$

v časové oblasti rovnicí

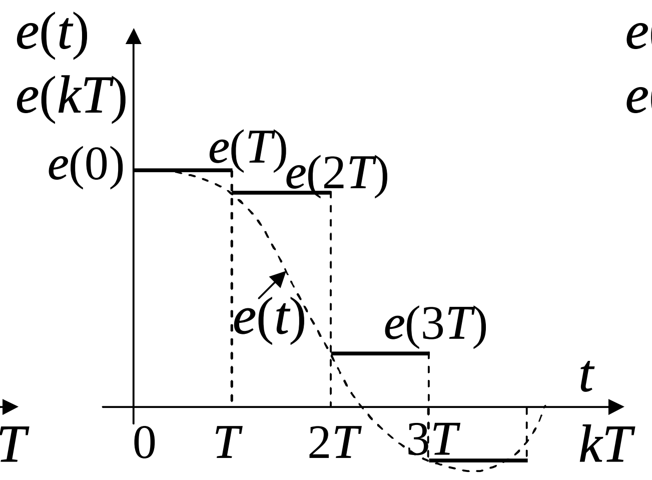
$$u(t) = r_0\left[e(t) + \frac{1}{T_\mathrm{I}}\int_0^t e(t)\,dt + T_\mathrm{D}\frac{de(t)}{dt}\right] \tag{1}$$

Číslicovou verzi PID regulátoru získáme z rovnice (1) diskretizací integrace a derivace.

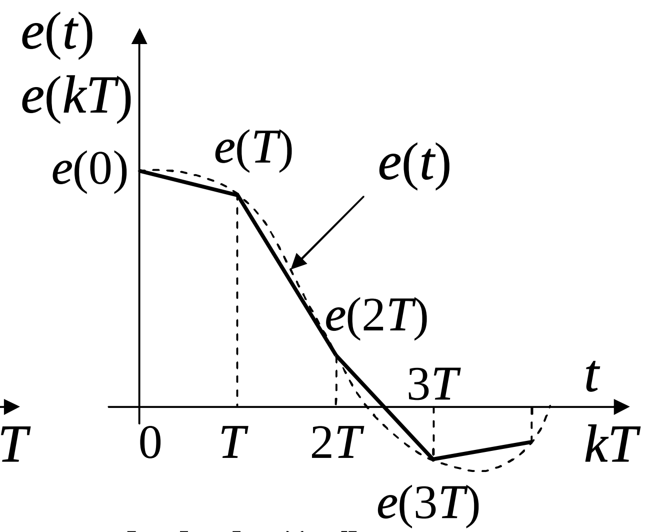
Hodnota *integrálu* se přibližně určí jako součet ploch obdélníků nebo lichoběžníků nahrazujících plochu pod původní křivkou odchylky $e(t)$.




zpětné obdélníky




dopředné obdélníky

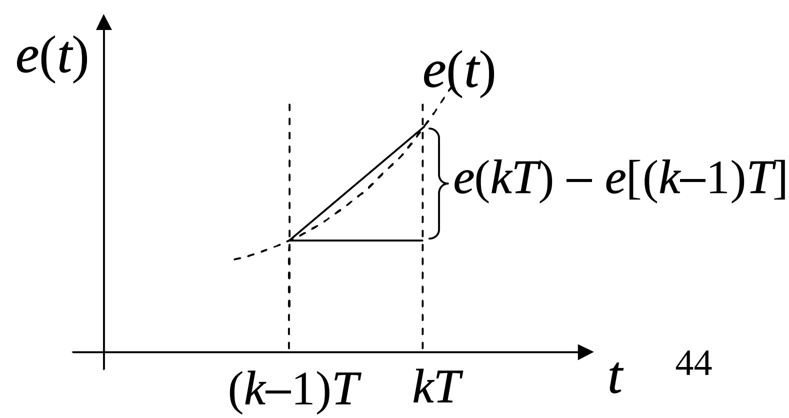



lichoběžníky

$$I(kT) = \int_0^{kT} e(t)\,dt \approx T\sum_{i=1}^{k} e(iT) \qquad I(kT) \approx T\sum_{i=0}^{k-1} e(iT) \qquad I(kT) \approx T\sum_{i=1}^{k} \frac{e(iT) + e[(i-1)T]}{2}$$

*Derivace* se nahradí pomocí zpětné diference.

$$D(kT) = \frac{de(t)}{dt} \approx \frac{e(kT) - e[(k-1)T]}{T}$$



## **Polohový PSD regulátor** (polohový PSD algoritmus řízení)

= diskrétní PID regulátor, který dostaneme ze spojitého PID regulátoru náhradou integrálu sumací (např. zpětných obdélníků) a náhradou derivace pomocí zpětné diference v rovnici (1)

⇒ rovnice polohového PSD (proporcionálně-sumačně-diferenčního) regulátoru

$$u(kT) = r_0 \left[ e(kT) + \frac{T}{T_\mathrm{I}} \sum_{i=1}^{k} e(iT) + \frac{T_\mathrm{D}}{T} \{ e(kT) - e[(k-1)T] \} \right] \qquad (2)$$

Z rovnice PSD regulátoru lze analogicky ke spojitému vytvořit diskrétní regulátory P, S, PS, PD.

Poznámka 1:

Nevýhodou polohového regulátoru je výskyt sumace v jeho rovnici, to znamená, že k výpočtu akčního zásahu $u(kT)$ je nutné uchovávat v paměti všechny hodnoty $e(iT)$, $i$=1,2, … , $k$. Proto se častěji používá tzv. *přírůstkový* PSD regulátor (popsaný dále).

## **Přírůstkový PSD regulátor** (přírůstkový PSD algoritmus řízení)

neurčuje celou hodnotu $u(kT)$, ale pouze její změnu proti hodnotě $u[(k-1)T]$ v předchozím kroku.

$$\underline{\nabla u(kT) = u(kT) - u[(k-1)T] =}$$

$$= r_0\left[e(kT) + \frac{T}{T_\mathrm{I}}\sum_{i=1}^{k} e(iT) + \frac{T_\mathrm{D}}{T}\{e(kT) - e[(k-1)T]\}\right] -$$

$$- r_0\left[e[(k-1)T] + \frac{T}{T_\mathrm{I}}\sum_{i=1}^{k-1} e(iT) + \frac{T_\mathrm{D}}{T}\{e[(k-1)T] - e[(k-2)T]\}\right] =$$

$$= r_0\left\{\{e(kT) - e[(k-1)T]\} + \frac{T}{T_\mathrm{I}}\left\{\sum_{i=1}^{k} e(iT) - \sum_{i=1}^{k-1} e(iT)\right\} + \frac{T_\mathrm{D}}{T}\{e(kT) - 2e[(k-1)T] + e[(k-2)T]\}\right\} =$$

$$= r_0\left\{\{e(kT) - e[(k-1)T]\} + \frac{T}{T_\mathrm{I}} e(kT) + \frac{T_\mathrm{D}}{T}\{e(kT) - 2e[(k-1)T] + e[(k-2)T]\}\right\} =$$

$$= r_0\left(1 + \frac{T}{T_\mathrm{I}} + \frac{T_\mathrm{D}}{T}\right)e(kT) + r_0\left(-1 - 2\frac{T_\mathrm{D}}{T}\right)e[(k-1)T] + r_0\frac{T_\mathrm{D}}{T}e[(k-2)T] =$$

$$= \underline{q_0\, e(kT) + q_1\, e[(k-1)T] + q_2\, e[(k-2)T]}\,, \tag{3}$$

kde $$\underline{q_0 = r_0\left(1 + \frac{T}{T_\mathrm{I}} + \frac{T_\mathrm{D}}{T}\right), \quad q_1 = -r_0\left(1 + 2\frac{T_\mathrm{D}}{T}\right), \quad q_2 = r_0\frac{T_\mathrm{D}}{T}} \tag{4}$$

Z diferenční rovnice přírůstkového PSD regulátoru

$$\nabla u(kT) = u(kT) - u[(k-1)T] = q_0\, e(kT) + q_1\, e[(k-1)T] + q_2\, e[(k-2)T]$$

lze určit jeho Z-přenos. Jestliže v předchozí rovnici s využitím vět o posunutí přejdeme k Z-obrazům a dosadíme nulové počáteční podmínky, dostaneme

$$U(z) - z^{-1}U(z) = q_0\, E(z) + q_1\, z^{-1}E(z) + q_2\, z^{-2}E(z)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{G_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{q_0 + q_1\, z^{-1} + q_2\, z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{r_0\left(1 + \frac{T}{T_{\mathrm{I}}} + \frac{T_{\mathrm{D}}}{T}\right) - r_0\left(1 + 2\frac{T_{\mathrm{D}}}{T}\right)z^{-1} + r_0\frac{T_{\mathrm{D}}}{T}\, z^{-2}}{1 - z^{-1}}} \qquad (5)$$

Poznámka 2:

U spojitého PID regulátoru jsou složky P, I, D jednoznačně odděleny, u diskrétního PSD regulátoru jsou však patrné jen u jeho polohové verze.

Ze vztahů (4), (5) je vidět, že parametry $q_0$, $q_1$, $q_2$ přírůstkového regulátoru nejsou přímými ekvivalenty parametrů $r_0$, $T_{\mathrm{I}}$, $T_{\mathrm{D}}$ spojitého regulátoru.

Přenosy diskrétních regulátorů P, S, PS, PD odpovídajících spojitým regulátorům P, I, PI, PD stanovíme ze znalosti přenosů regulátorů PID a PSD :

PID: $$G_R(s)=\frac{U(s)}{E(s)}=r_0+\frac{r_{-1}}{s}+r_1 s=r_0\left(1+\frac{1}{\frac{r_0}{r_{-1}}s}+\frac{r_1}{r_0}s\right)=r_0\left(1+\frac{1}{T_\mathrm{I}s}+T_\mathrm{D}s\right)$$

PSD: $$G_R(z)=\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{q_0+q_1 z^{-1}+q_2 z^{-2}}{1-z^{-1}}=\frac{r_0\left(1+\frac{T}{T_\mathrm{I}}+\frac{T_\mathrm{D}}{T}\right)-r_0\left(1+2\frac{T_\mathrm{D}}{T}\right)z^{-1}+r_0\frac{T_\mathrm{D}}{T}z^{-2}}{1-z^{-1}}$$

---

P ≡ [PID]/$T_\mathrm{I}$=∞, $T_\mathrm{D}$=0 ⇒ $\underline{q_0=r_0,\ q_1=-r_0,\ q_2=0}$ ⇒ P: $G_R(z)=\dfrac{q_0+q_1 z^{-1}}{1-z^{-1}}=r_0$

I ≡ [PID]/$r_0$=0, $T_\mathrm{D}$=0 ⇒ $\underline{q_0=\cancel{r_0\frac{T}{T_\mathrm{I}}}=r_{-1}T,\ q_1=0,\ q_2=0}$ ⇒ S: $G_R(z)=\dfrac{q_0}{1-z^{-1}}$

PI ≡ [PID]/$T_\mathrm{D}$=0 ⇒ $\underline{q_0=r_0\left(1+\frac{T}{T_\mathrm{I}}\right),\ q_1=-r_0,\ q_2=0}$ ⇒ PS: $G_R(z)=\dfrac{q_0+q_1 z^{-1}}{1-z^{-1}}$

PD ≡ [PID]/$T_\mathrm{I}$=∞ ⇒ $\underline{q_0=r_0\left(1+\frac{T_\mathrm{D}}{T}\right),\ q_1=-r_0\left(1+2\frac{T_\mathrm{D}}{T}\right),\ q_2=r_0\frac{T_\mathrm{D}}{T}}$

⇒ PD: $G_R(z)=\dfrac{q_0+q_1 z^{-1}+q_2 z^{-2}}{1-z^{-1}}$

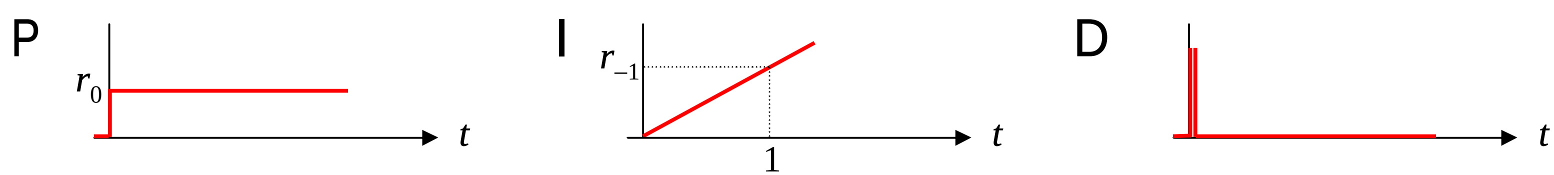
Poznámka 3:

Z předchozích vztahů je vidět, že některé diskrétní regulátory mají formálně stejný přenos:

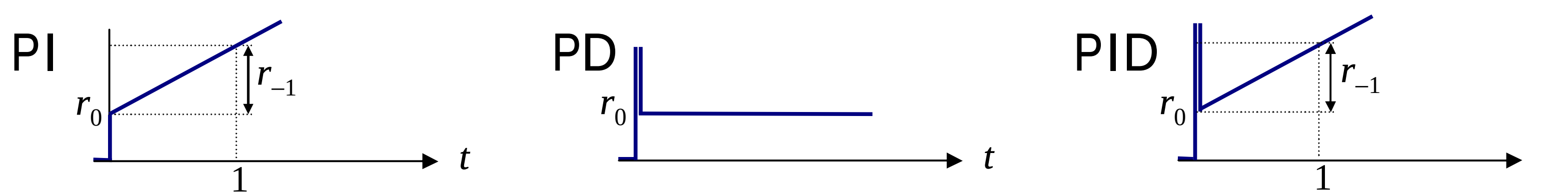
- přenos diskrétních regulátorů P a PS je $$G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$
- přenos diskrétních regulátorů PD a PSD je $$G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

Protože požadujeme, aby *přechodová charakteristika* diskrétního regulátoru odpovídala jeho spojité verzi, můžeme stanovit podmínky, které musí parametry $q_0$, $q_1$, $q_2$ splňovat, aby se jednalo o požadovaný typ regulátoru.

Přechodové charakteristiky $h(t)$ základních spojitých regulátorů jsou




a z nich vyplývají přechodové charakteristiky jejich kombinací



Přírůstkový PSD regulátor je určen vztahem (3):

$$u(kT)-u[(k-1)T]=r_0\left(1+\frac{T}{T_\mathrm{I}}+\frac{T_\mathrm{D}}{T}\right)e(kT)+r_0\left(-1-2\frac{T_\mathrm{D}}{T}\right)e[(k-1)T]+r_0\frac{T_\mathrm{D}}{T}e[(k-2)T]=$$
$$=q_0\,e(kT)+q_1\,e[(k-1)T]+q_2\,e[(k-2)T],$$

odtud plyne

$$u(kT)=u[(k-1)T]+r_0\left(1+\frac{T}{T_\mathrm{I}}+\frac{T_\mathrm{D}}{T}\right)e(kT)+r_0\left(-1-2\frac{T_\mathrm{D}}{T}\right)e[(k-1)T]+r_0\frac{T_\mathrm{D}}{T}e[(k-2)T]=$$
$$=u[(k-1)T]+q_0\,e(kT)+q_1\,e[(k-1)T]+q_2\,e[(k-2)T], \tag{6}$$

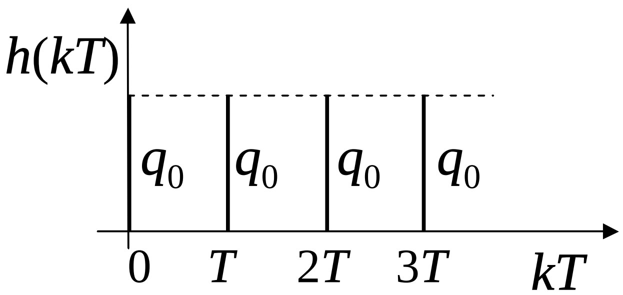
diskrétní přechodová charakteristika $h(kT)$ je odezvou na diskrétní jednotkový skok $h(kT)$, do rovnice (6) dosadíme $e(kT)=h(kT)$ a určíme $h(kT)=u(kT)$, $k=0,1,2,\ldots$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} h(0)&=q_0\\ h(T)&=2q_0+q_1\\ h(2T)&=3q_0+2q_1+q_2\\ h(3T)&=4q_0+3q_1+2q_2\\ h(4T)&=5q_0+4q_1+3q_2\\ h(5T)&=6q_0+5q_1+4q_2\\ &\ldots \end{aligned}} \tag{7}$$

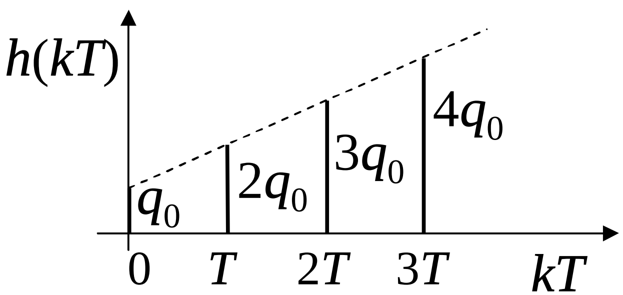
Obecnou podmínkou všech diskrétních regulátorů je, že první akční zásah musí být kladný, tj. $h(0) = \underline{\underline{q_0 > 0}}$.

P:



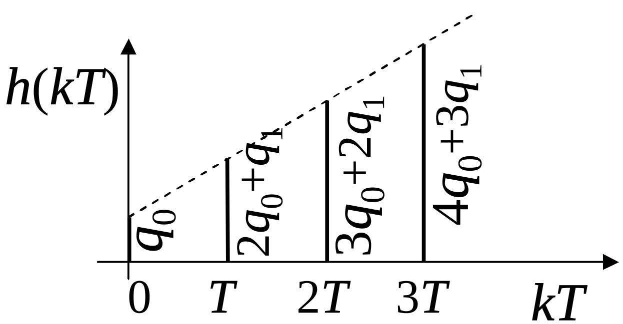

$$\Delta h = 0$$
$$\Delta h = h(T) - h(0) = (2q_0 + q_1) - q_0 = q_0 + q_1$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{q_0 + q_1 = 0}}$$

S:



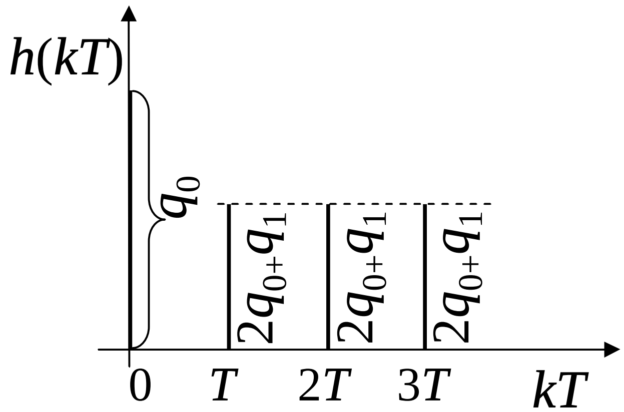

$$q_1 = 0,\ q_2 = 0$$
$$\Delta h = \text{konst} > 0$$
$$\Delta h = h(T) - h(0) = (2q_0 + 0) - q_0 = q_0$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{q_0 > 0}}$$

PS:




$$q_2 = 0$$
$$\Delta h = \text{konst} > 0$$
$$\Delta h = h(T) - h(0) = (2q_0 + q_1) - q_0 = q_0 + q_1$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{q_0 + q_1 > 0}}$$

PD:

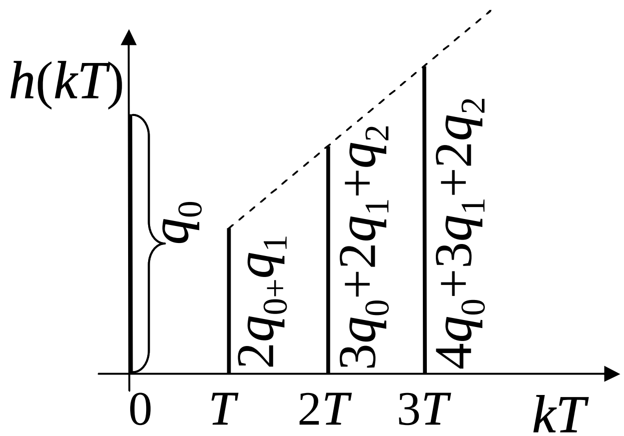



$$h(0) > h(T) = h(2T) = h(3T) = \ldots > 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$q_0 > 2q_0 + q_1 \Rightarrow \underline{\underline{q_0 + q_1 < 0}}\ , \quad \underline{\underline{2q_0 + q_1 > 0}}$$

PSD:




$$h(0) > h(T) \Rightarrow q_0 > 2q_0 + q_1 \Rightarrow \underline{\underline{q_0 + q_1 < 0}}$$

$$h(2T) - h(T) = h(3T) - h(2T) = \ldots = \text{konst} > 0$$

$$\Rightarrow 3q_0 + 2q_1 + q_2 - (2q_0 + q_1) = \underline{\underline{q_0 + q_1 + q_2 > 0}}$$

přímka lineárního nárůstu musí protínat svislou osu v kladné hodnotě

$$\Rightarrow (2q_0 + q_1) - (q_0 + q_1 + q_2) = \underline{\underline{q_0 - q_2 > 0}}$$

# III. Nastavení parametrů PSD regulátoru

## (i) Ziegler-Nicholsova metoda

– postup je stejný jako u seřizování spojitého regulátoru

1. Ke známé soustavě a P regulátoru určíme Z-přenos řízení $G_W(z)$.
   Z jeho jmenovatele určíme charakteristickou rovnici.
2. Bilineární transformací ji převedeme z komplexní roviny „$z$“ do roviny „$w$“ a určíme kritické zesílení $r_{0\text{krit}}$ a periodu kmitů $T_{\text{krit}}$ na hranici stability.
3. Z hodnot $r_{0\text{krit}}$ a $T_{\text{krit}}$ spočítáme podle následující tabulky parametry $r_0$, $T/T_I$ a $T_D/T$ a z nich pak hodnoty $q_0$, $q_1$, $q_2$ zvoleného typu regulátoru.

| typ | $k_R \circ r_0$ | $\frac{T}{T_I}$ | $\frac{T_D}{T}$ |
|---|---|---|---|
| **P** | $0{,}5\, r_{0\text{krit}}$ | – | – |
| **PS** | $(0{,}27 - 0{,}45)\, r_{0\text{krit}} \frac{T}{T_{\text{krit}}}$ | $0{,}54 \frac{r_{0\text{krit}}}{r_0} \frac{T}{T_{\text{krit}}}$ | – |
| **PSD** | $(0{,}36 - 0{,}6)\, r_{0\text{krit}} \frac{T}{T_{\text{krit}}}$ | $1{,}2 \frac{r_{0\text{krit}}}{r_0} \frac{T}{T_{\text{krit}}}$ | $\frac{3}{40} \frac{r_{0\text{krit}}}{r_0} \frac{T}{T_{\text{krit}}}$ |