

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií



Úvod do parametrické identifikace

Učební text
Přednášky 1-3

Osvald Modrlák
Lukáš Hubka

Liberec

2010

Materiál vznikl v rámci projektu ESF (CZ.1.07/2.2.00/07.0247)

Reflexe požadavků průmyslu na výuku v oblasti automatického řízení a měření,
KTERÝ JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ
REPUBLIKY

Obsah

1	Úvod.....	4
2	Základní principy experimentální identifikace	5
2.1	Matematické modely dynamických systémů.....	5
2.2	Model uzavřeného obvodu	5
2.2.1	Struktura, členy a veličiny uzavřeného obvodu.....	5
2.2.2	Model uzavřeného regulačního obvodu	7
2.3	Model regulované soustavy	7
2.3.1	Model rozšířené soustavy	7
2.3.2	Model rozšířené soustavy s poruchami	8
3	Odhad parametrů obrazového přenosu při dané struktuře obrazového přenosu.....	9
3.1	Identifikační proces	9
3.2	Identifikovaný systém	9
3.3	Výstupní signál.....	10
3.4	Vstupní signál.....	11
3.5	Struktura identifikace – ideové schéma.....	14
3.5.1	Parametrická ON-line identifikace s LTI modelem.....	15
3.5.2	Parametrická OFF-line identifikace s LTI modelem	16
3.6	Struktura modelu	16
3.6.1	Obrazový přenos.....	16
3.6.2	Speciální struktury obrazových přenosů.....	17
3.6.3	Kriterium shody modelu a reálné soustavy	18
3.6.4	Optimalizační metoda.....	18
3.6.5	SW podpora MATLABu – funkce fminsearch.....	18
3.6.6	Posun výstupu modelu do pracovního bodu.....	19
3.7	Proces identifikace pomocí Matlabu	20
3.7.1	Vývojové diagramy	20
3.7.2	Výpis programu v MATLABu	21
4	Základní nástroje verifikace modelu.....	23
4.1	Druhy testů vlastností modelu	23
4.2	Póly, nuly, módy systému, časová odezva	23
4.3	Vnitřní popis regulovaného systému s poruchami	26
4.3.1	Stavová reprezentace – lineární stavový popis.....	26
4.3.2	Určení obrazového přenosu ze stavového popisu.....	27
4.3.3	Stavová dosažitelnost (řiditelnost), pozorovatelnost	28
4.3.4	SW podpora MATLABu – funkce ctrb	28
4.3.5	SW podpora MATLABu – funkce obsv.....	28
4.4	Dekompozice a technika SVD rozkladu.....	29
4.4.1	Kalmanova stavová dekompozice	29
4.4.2	SW podpora MATLABu – funkce ctrbf.....	30
4.4.3	Minimální realizace	31
4.4.4	SVD faktorizace	33
4.5	Redukce řádu modelu	34

4.5.1	Redukce řádu obrazového přenosu.....	34
4.5.2	Časová dekompozice.....	35
4.5.3	Nalezení a eliminaci módů, které jsou špatně říditelné nebo dosažitelné	36
4.5.4	SW podpora MATLABu – funkce balreal	37
4.5.5	SW podpora MATLABu – funkce modred	37
4.6	Normování vstupních a výstupních signálů	41
	Literatura.....	42

1 Úvod

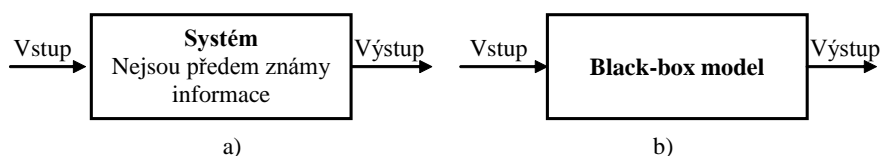
Existuje mnoho typů modelů dynamických systémů. Tak například známe verbální, fyzikální, matematické modely a jiné. Z hlediska našeho předmětu „Automatické řízení“ jsou významné matematické modely. Proto si zopakujeme definici matematického modelu.

Matematický model je matematické vyjádření podstatných vlastností existujícího nebo konstruovaného systému, který popisuje znalosti o systému v použitelné formě.

Matematický model představuje proto vždy zjednodušení a abstrakci studované reality. Dělíme je na parametrické a neparametrické modely.

- 1) **Modely s koncentrovanými a rozloženými parametry.** Je-li systém popsán obyčejnými diferenciálními rovnicemi, hovoříme o systému s **koncentrovanými parametry**. Je-li systém popsán parciálními diferenciálními rovnicemi, hovoříme o systémech s **rozloženými parametry**.
- 2) **Lineární nebo nelineární modely** jsou popsány lineárními nebo nelineárními rovnicemi.
- 3) **Deterministické nebo stochastické modely.** Deterministický model je takový model, kde každý vektor stavu je jednoznačně definován parametry modelu a vstupní posloupností. Stochastický model je takový model, který obsahuje náhodné vstupní signály a složky. Proto prvky stavového vektoru nejsou jednoznačně definovány pro dané parametry modelu a vstupní signály, ale jsou dány pouze jejich hustotou pravděpodobností.
- 4) **Lineární časově invariantní model** je popsán **lineárními diferenciálními rovnicemi s konstantními koeficienty**.

Uvažujme systém s jedním vstupem a výstupem dle obr. 1-1a. Matematické modelování vždy závisí na apriorních informacích o modelovaném systému!



Obr. 1-1: Modelovaný systém (a) a matematický popis (b)

Co je možno pokládat za apriorní informace? Obecně apriorní informace obsahují znalosti o systému a jeho dynamických vlastnostech. Mohou mít formu funkční závislosti mezi veličinami, strukturu modelu, typu nelinearity nebo o řádu soustavy. Zkušenosti z provozu poskytují apriorní informace o provozních podmínkách a omezeních na akční veličině, úrovni šumu atd. Zpravidla se doporučuje využít maximálně možných apriorních informací, aby bylo dosaženo maximální přesnosti modelu a generování vhodných vstupních signálů pro identifikační měření. Modely je možno klasifikovat jako **black-box** nebo **white-box model** (obr. 1-1b).

- Black-box model předpokládá, že nejsou k dispozici žádné apriorní informace.
- White-box model předpokládá, že všechny informace jsou k dispozici.

Prakticky modelované systémy jsou modely na pomezí mezi black-box a white-box modely.

2 Základní principy experimentální identifikace

2.1 Matematické modely dynamických systémů

Matematický model lze najít na základě **matematicko-fyzikální analýzy** nebo na základě **experimentální identifikace**.

Při aplikaci matematicko-fyzikální analýzy je výsledkem model s danou strukturou a parametry. Experimentální identifikace je založena na identifikačních měřeních a následném zpracování těchto dat. Tento proces vyžaduje jako apriorní informaci **strukturu modelu**. Experimentální identifikace využívá **parametrické nebo neparametrické modely**.

Parametrické modely mají danou strukturu. Strukturou rozumíme řád a zvolený typ diferenciální či diferenční rovnice (lineární, nelineární diferenciální rovnice, typ nelinearity atd.), nebo soustavu těchto rovnic, obrazový nebo diskrétní přenos se zvolenými stupni polynomů v čitateli a jmenovateli, nebo přenosovými maticemi zvoleného rozměru atd.

Parametrické modely představují z matematického hlediska rovnice nebo soustavy rovnic a algebraické vztahy, které explicitně obsahují koeficienty těchto rovnic a vztahů. Obecně pak označujeme tyto koeficienty jako parametry matematických modelů.

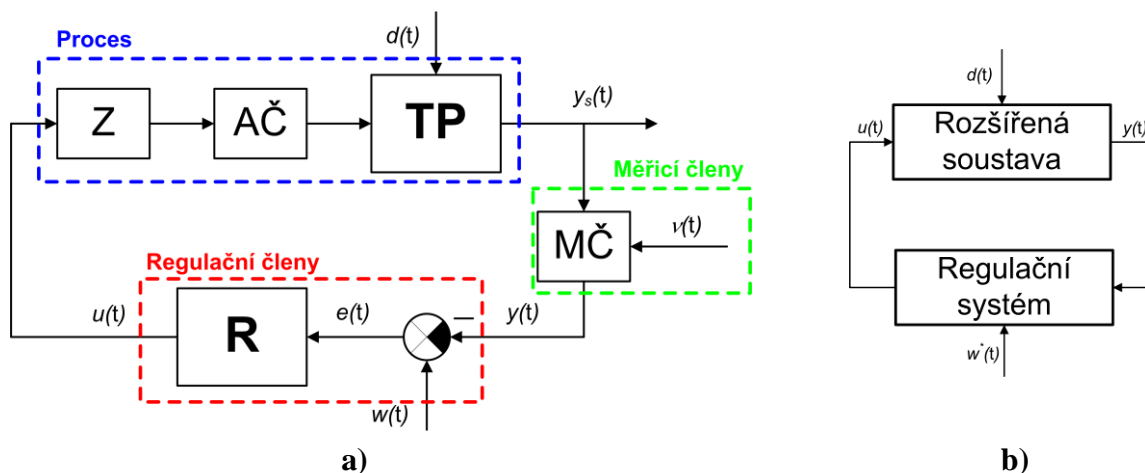
Neparametrické modely představují zpravidla funkční závislost mezi zvoleným vstupním a odpovídajícím výstupním signálem (např. y/u , y/d atd.). Tato závislost se vyjadřuje buď graficky pomocí záznamu z měření odezev systému (zapisovače signálů), nebo pomocí tabulky hodnot, popisující číselně danou závislost.

Neparametrické modely vyjadřují zpravidla přechodovou, váhovou nebo frekvenční charakteristiku v grafické nebo v tabulkové formě. Parametry modelu jsou pak obsaženy implicitně v těchto funkčních závislostech. Lze je získat až jejich následným vyhodnocením pro zvolenou strukturu modelu.

2.2 Model uzavřeného obvodu

2.2.1 Struktura, členy a veličiny uzavřeného obvodu

Uvažujme spojitý technologický proces s jednou akční veličinou $u(t)$ a jednou regulovanou veličinou $y(t)$, s regulátorem či řídicím systémem ve zpětné vazbě. Bloková struktura obvodu je na obr. 2-1.



Obr. 2-1: Bloková struktura regulačního obvodu (a) a zjednodušený model regulačního obvodu (b)

Regulační obvod tvoří zpravidla:

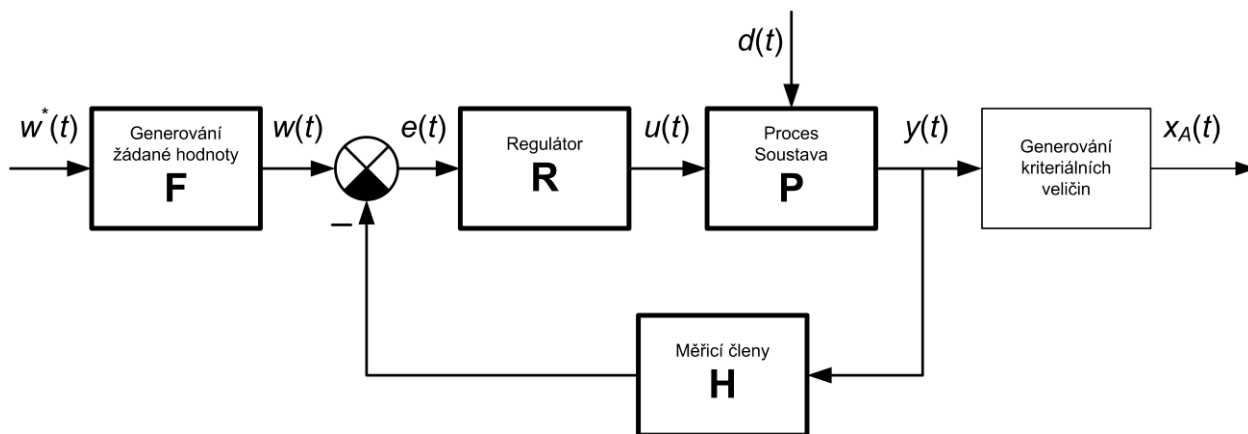
- zesilovače a převodníky **Z**,
- akční člen **AČ**,
- vlastní technologie **TP**,
- měřící člen **MČ**. Měřící členy obsahují senzory nebo čidla a převodníky.
- **R** je regulátor (ústřední člen regulátoru), jehož funkce je $u = f(e, PID)$.

Jednotlivé signály jsou definovány takto.

- **Akční veličina** $u(t)$ je vstupem do soustavy a v uzavřeném obvodu je výstupem z regulátoru – řídicího systému. Pomocí akční veličiny můžeme **cíleně** měnit výstup soustavy. Je-li obvod otevřen (měření statických charakteristik, měření odezev otevřeného obvodu), nastavuje se akční veličina ručně nebo pomocí PC.
- **Poruchová veličina** $d(t)$ je další vstupní veličina, která mění dynamiku výstupu, a kterou však **nemůžeme aktivně ovlivňovat**. Poruchové veličiny mohou být neměřené $d(t)$ nebo měřené $d_m(t)$.
- **Výstupní veličina** $y_s(t)$ je (fyzikální) výstup z regulované soustavy (teplota, otáčky, atd.)
- **Regulovaná (měřená) veličina** $y(t)$ je měřená výstupní veličina $y_s(t)$, která se měří pomocí měřicích členů **MČ** a **zpětnovazebně se zavádí do regulátoru**. Během měření může vznikat ve měřicích členech **parazitní šumový signál** $v(t)$, který se přičítá k měřenému výstupu.
- **Žádaná hodnota** $w(t)$ definuje požadovanou hodnotu výstupního signálu $y(t)$ v každém okamžiku (pro všechna $t \in \langle 0; \infty \rangle$).
- **Regulační odchylka** $e(t)$ je definována: $e(t) = w(t) - y(t)$, kde $w(t)$ je žádaná hodnota a $y(t)$ je regulovaná veličina.
- **Řídicí veličina** $w^*(t)$ vstupuje zpravidla přes filtr nebo blok, kde se např. mohou přepočítat fyzikální hodnoty žádaného výstupu $y_s(t)$ na signály regulačního členu (např. V, mA, atd.).

2.2.2 Model uzavřeného regulačního obvodu

Model regulačního obvodu (obr. 2-2) podle normy DIN 19221 tvoří bloky: regulátor **R**, proces **P**, měřící člen **H**, blok pro žádané hodnoty **F** a blok pro generování kriteriálních veličin. Proces **P** zahrnuje členy: **Z**, **AČ** a **TP** (obr. 2-1a). Podle této normy se zvláště modeluje dynamika regulačního členu **R**, procesu **P**, měřících členů **H**, generování žádané hodnoty a kriteriálních veličin.

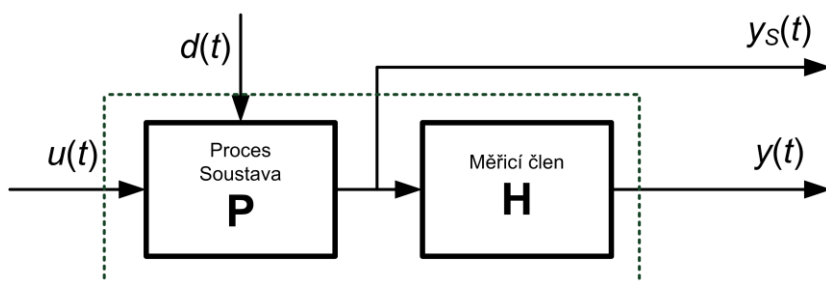


Obr. 2-2: Model uzavřeného regulačního obvodu

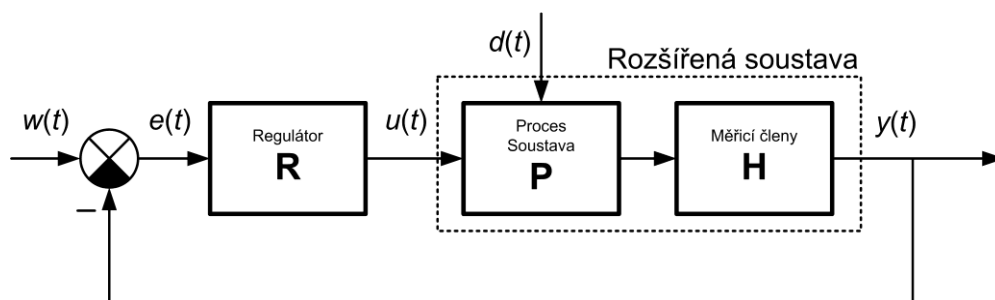
2.3 Model regulované soustavy

2.3.1 Model rozšířené soustavy

Pro modelování je možno použít zjednodušeného modelu regulačního obvodu, který je na obr. 2-4. Zjednodušení spočívá v tom, že model neobsahuje členy pro generování žádané hodnoty $w(t)$ a kriteriálních veličin x_A a pracuje s **rozšířenou soustavou** (obr. 2-3). Rozšířená soustava pak zahrnuje soustavu (proces) **P** i měřící členy **H**. Vstupem je akční veličina $u(t)$ a výstupem měřená výstupní veličina (**regulovaná veličina**) $y(t)$.



Obr. 2-3: Rozšířená soustava



Obr. 2-4: Model zjednodušeného uzavřeného regulačního obvodu

2.3.2 Model rozšířené soustavy s poruchami

Klasickým postupem tvorby modelu je, že rozšířená soustava se aproximuje jedním obrazovým přenosem (obr. 2-5a) ve tvaru

$$F_U(s) = \frac{Y_U(s)}{U(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (2.1)$$

kde $Y_U(s) = L\{y_U(t)\}$, $U(s) = L\{u(t)\}$, $A(s), B(s)$ jsou polynomy, $y_U(t)$ je výstup vzhledem ke vstupu $u(t)$.

Obecně je možno přenos systému aproximovat dvěma obrazovými přenosy $P(s), H(s)$ viz obr. 2-5c. Přenosová funkce $P(s)$ aproximuje dynamické vlastnosti vlastního procesu (obsahuje dynamiku zesilovače, akčního členu a technologie). Obrazový přenos $H(s)$ aproximuje dynamické vlastnosti měřících členů.

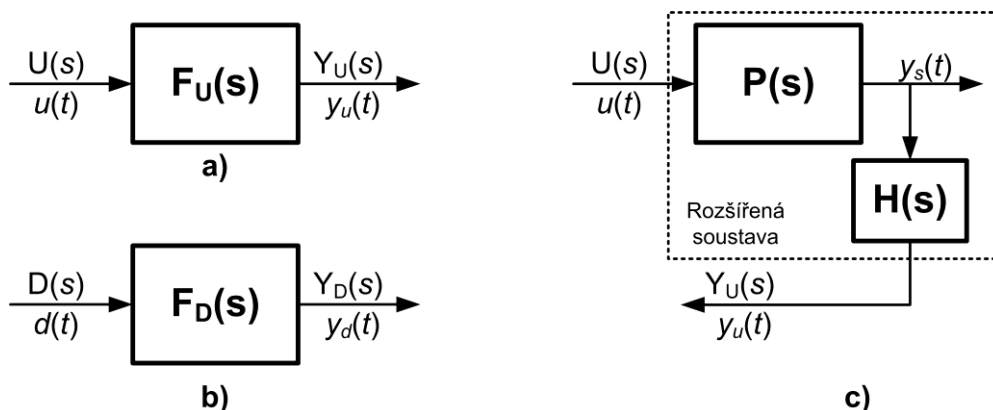
Dynamické vlastnosti účinků poruchy $d(t)$ na výstup soustavy za předpokladu $n(t), u(t) = 0$ (obr. 2-5b) se aproximují obrazovým přenosem ($C(s)$ je polynom)

$$F_D(s) = \frac{Y_D(s)}{D(s)} = \frac{C(s)}{A(s)} \quad (2.2)$$

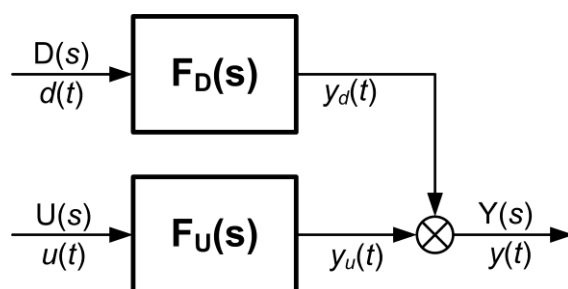
Model regulované soustavy s účinkem poruchové veličiny $d(t)$ a akční veličiny $y(t)$ je na obr. 2-6.

$$y(t) = y_u(t) + y_d(t) \quad (2.3)$$

$$Y(s) = F_U(s) \cdot U(s) + F_D(s) \cdot D(s) \quad (2.4)$$



Obr. 2-5: Dynamický model rozšířené soustavy (a), dynamické účinky poruchové veličiny (b) a struktura modelu soustavy aproximované přenosy $P(s), H(s)$ (c)



Obr. 2-6: Struktura soustavy s akční a poruchovou veličinou

3 Odhad parametrů obrazového přenosu při dané struktuře obrazového přenosu

3.1 Identifikační proces

- 1) Návrh a realizace identifikačního měření na identifikované soustavě, volba pracovního bodu.
- 2) Verifikace dat a výběr úseků měření, na kterém bude provedena parametrická identifikace včetně transformace dat do pracovního bodu.

$$\nabla u_{ID}(i) = u_i - u_0 \quad \& \quad \nabla y_{ID}(i) = y_i - y_0 \quad (3.1)$$

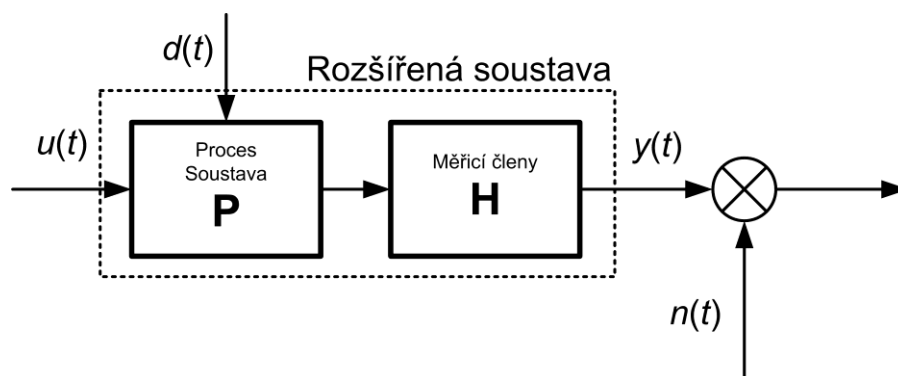
- 3) Výběr struktury matematického modelu ve tvaru přenosové funkce tak, aby odpovídal fyzikální podstatě děje.
- 4) Výpočet odhadů parametrů obrazového přenosu zvolené struktury na základě měření vstupu a výstupu a zvoleném kritériu.
- 5) Verifikace modelu, porovnání dynamiky soustavy a modelu pro změřenou akční veličinu.
- 6) Je-li odezva modelu a soustavy srovnatelná jak v náběhové části, tak v ustálení, pak model můžeme pokládat za vyhovující. Další možností je porovnávat frekvenční vlastnosti modelu a soustavy. Pokud výsledky nejsou vyhovující, doporučuje se:
 - a) změnit strukturu modelu (bod 3). Pokud nedosáhneme zlepšení, následuje
 - b) provedení nové verifikace měření (bod 2). Pokud se nedosáhne vyhovujících výsledků, následuje
 - c) provedení nového identifikačního měření v jiném pracovním bodě (bod 1 a 2).

3.2 Identifikovaný systém

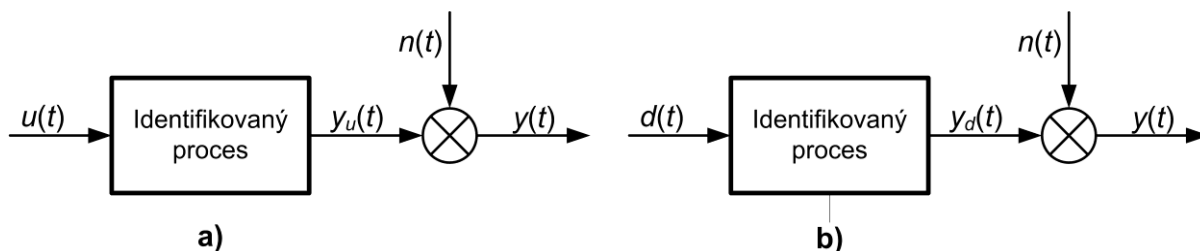
Identifikovaná soustava je na obr. 3-1. Má obecně tři vstupy:

- akční veličinu $u(t)$,
- poruchovou veličinu $d(t)$,
- šumový aditivní (stochastický) signál vznikající na měřicích členech $v(t)$.

Účinek akční veličiny $u(t)$ a poruchové veličiny $d(t)$ je možno oddělit viz obr. 3-2.

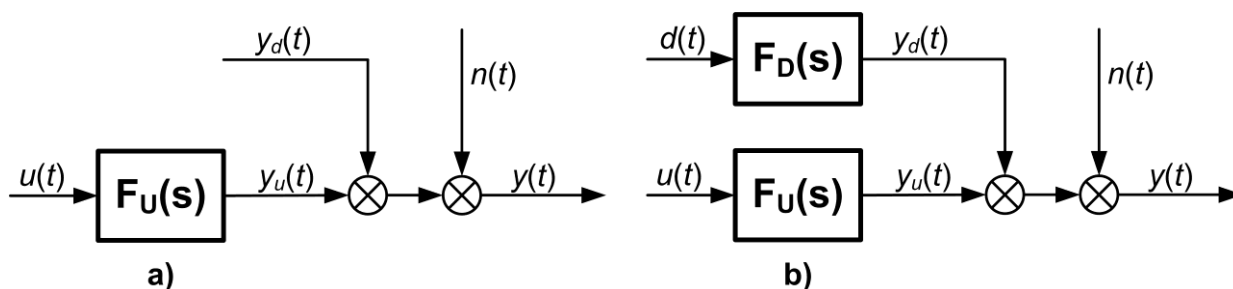


Obr. 3-1: Identifikovaný proces



Obr. 3-2: Zobrazení účinku akční (a) a poruchové (b) veličiny

Měřený výstup – regulovaná veličina $y(t)$ obsahuje účinek akční veličiny $u(t)$, poruchové veličiny $d(t)$ jako signál $y_d(t)$ a účinek šumového signálu (obr. 3-3a). Účinek všech tří složek s využitím obrazových přenosů $F_U(s)$, $F_D(s)$ je ukázán ve schématu na obr. 3-3b. Parametry přenosů $F_U(s)$, $F_D(s)$ je třeba určit identifikací.



Obr. 3-3: Identifikovaný model soustavy s neidentifikovanou (a) a identifikovanou (b) poruchou

3.3 Výstupní signál

Výstupní signál dle obrázku obr. 3-3 je možno vyjádřit součtem

$$y(t) = y_U(t) + y_D(t) + n(t) = y_U(t) + y_n(t). \quad (3.2)$$

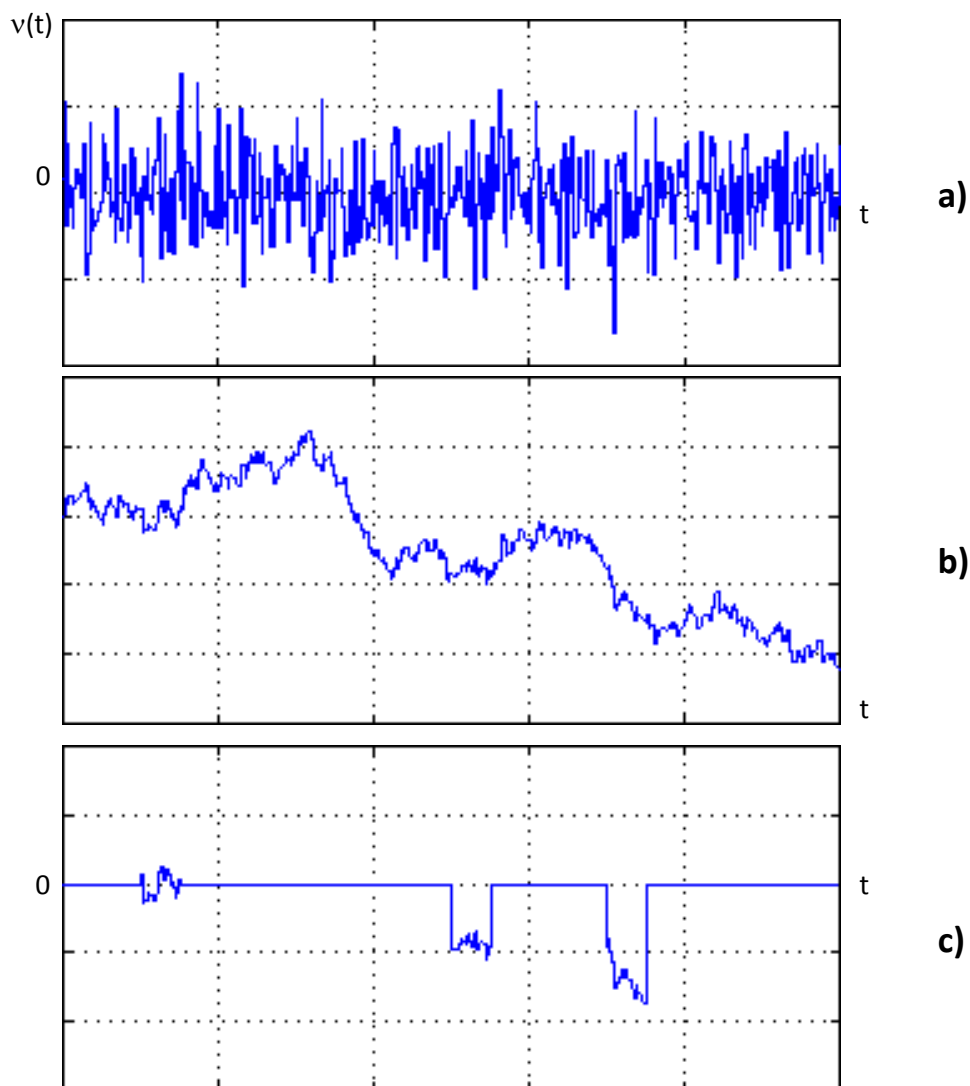
Měřený šumový signál $n(t)$ může obsahovat: tři komponenty: v, χ, λ .

$$n(t) = v(t) + \chi(t) + \lambda(t), \quad (3.3)$$

kde $n(t)$ je parazitní šumový signál (stochastický signál, náhodný proces), který se skládá z více složek (tab. 3-1, obr. 3-4).

Tab. 3-1: Složky náhodného signálu

Druh poruchového signálu	Typický tvar
Vysokofrekvenční kvazistacionární stochastická složka $v(t)$	obr. 3-4a)
Nízkofrekvenční nestacionární stochastický signál $\chi(t)$	obr. 3-4b)
Složka poruchového signálu neznámého charakteru $\lambda(t)$	obr. 3-4c)



Obr. 3-4: Složky náhodného signálu $n(t)$

Běžné identifikační metody mohou eliminovat pouze šumový signál $v(t)$. Odstranění složky $\chi(t)$ je složitější, vyžaduje použití nelineárních filtrů nebo regresních postupů. Odstranění složky $\lambda(t)$ nelze provést podle obecného postupu.

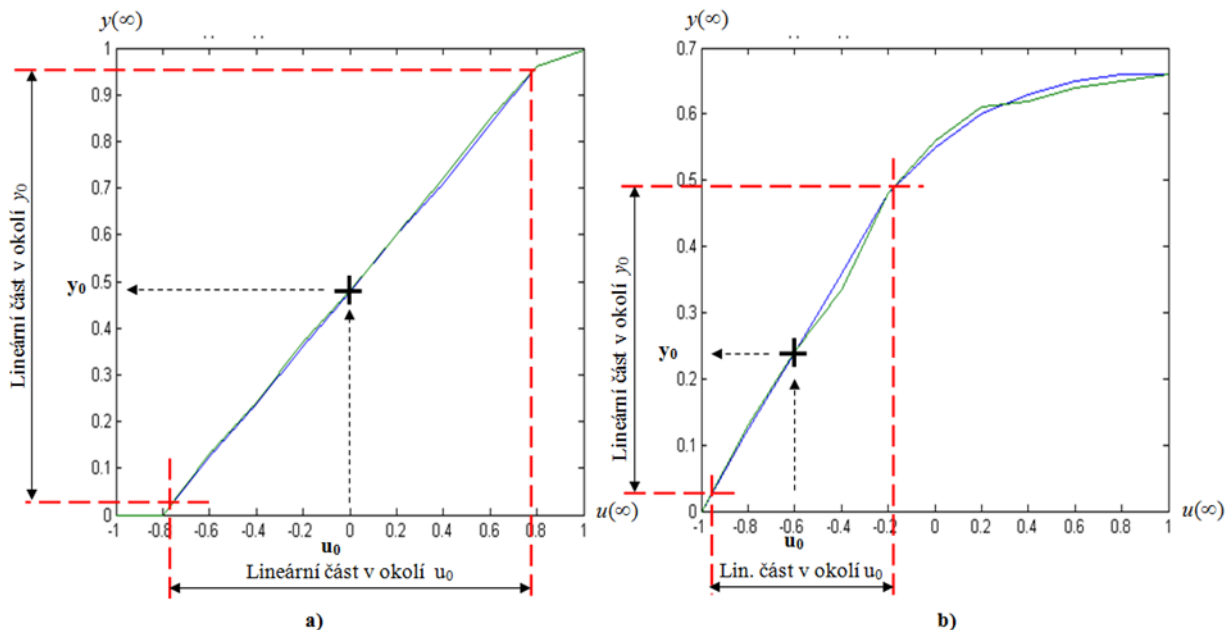
Identifikace systému pomocí měření odezev systému na determinované vstupní testovací signály s následovaným vyhodnocením měření za působení šumových signálů je možná pouze tehdy, jestliže úroveň šumových signálů je malá vzhledem k úrovním testovacích – vstupních signálů.

3.4 Vstupní signál

Velmi často používané testovací signály jsou skokové budící signály, které realizují změny akční veličiny v okolí pracovního bodu. Na základě měření statické charakteristiky se volí **pracovní bod**. Pracovnímu bodu odpovídá ustálená hodnota akční veličina

$$u_0 = u(\infty), \quad (3.4)$$

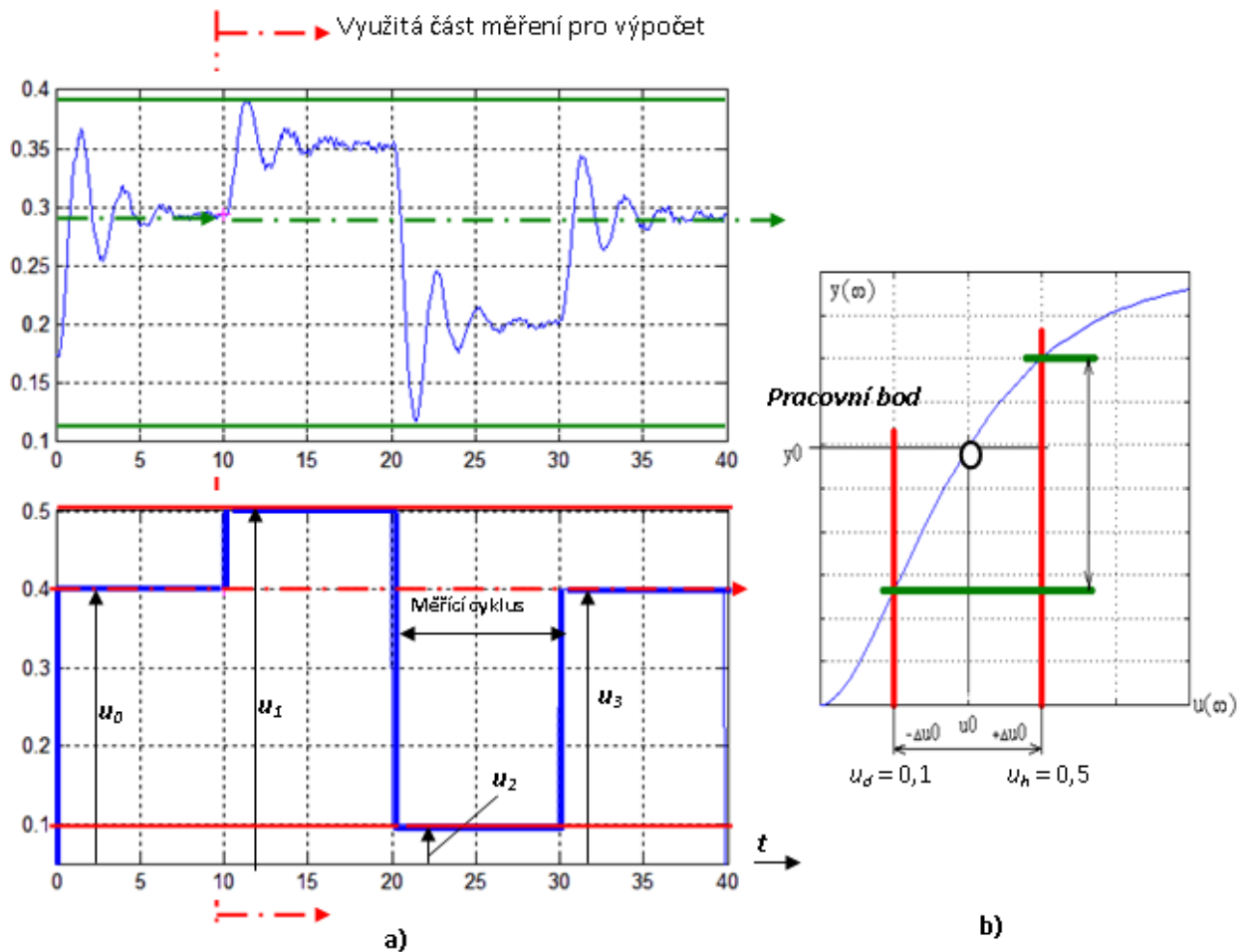
která se má nacházet pokud možno v lineární části statické charakteristiky a této akční veličině pak odpovídá ustálená hodnota výstupní veličiny $y_0(\infty)$. Změny akční veličiny se realizují kolem pracovního bodu u_0 (obr. 3-6, obr. 3-8). Aby odezvy dynamického systému splňovaly podmínky linearity, nesmí akční veličina překročit vyznačené (červeně) meze, které ohraničují předpokládanou linearitu systému.



Obr. 3-5: Volba pracovního bodu a pracovní oblasti na statické charakteristice systému s velmi lineární (a) a značně nelineární (b) statickou odezvou

Uvažujme dva příklady statických charakteristik (obr. 3-5). První má pracovní bod $u_0 = 0$ a $y_0 = 0,5$; druhá $u_0 = -0,6$ a $y_0 = 0,245$. Při praktické identifikaci se pracovní bod na statické charakteristice musí zvolit. Zvolený pracovní bod musí ležet v lineární části. Změny akční veličiny musí ležet v okolí lineární části statické charakteristiky (obr. 3-5).

Skokové testovací signály (obr. 3-6a) mají mít takovou délku měření, aby výstupní veličina dosáhla ustálení. Délka skoku s konstantní hodnotou akční veličiny se označuje jako **měřicí cyklus**. Doporučujeme volit měřicí cyklus konstantní délky. Délka měřicího cyklu má M vzorků. Aby byly minimalizovány účinky aditivního parazitního šumu, je třeba opakovat měřicí cykly (obr. 3-6a). Počet opakování se volí podle velikosti aditivního parazitního šumu a označíme jej N . Pokud by pro obr. 3-6a byla vzorkovací perioda $T_{vz} = 0,05$ s, pak je zřejmé, že délka měřicího cyklu je 10 s, $M = 10/T_{vz} = 200$. Počet opakování je $N = 3$, první skok akční veličiny je přesun měření do pracovního bodu, odezva je dále nevyužitelná a do počtu opakování se nezapočítá.



Obr. 3-6: Volba pracovního bodu na statické charakteristice (b), skokový budící signál a odezva systému (a)

Pro odhad parametrů vstupují do výpočtu pouze změny kolem pracovního bodu, takže platí

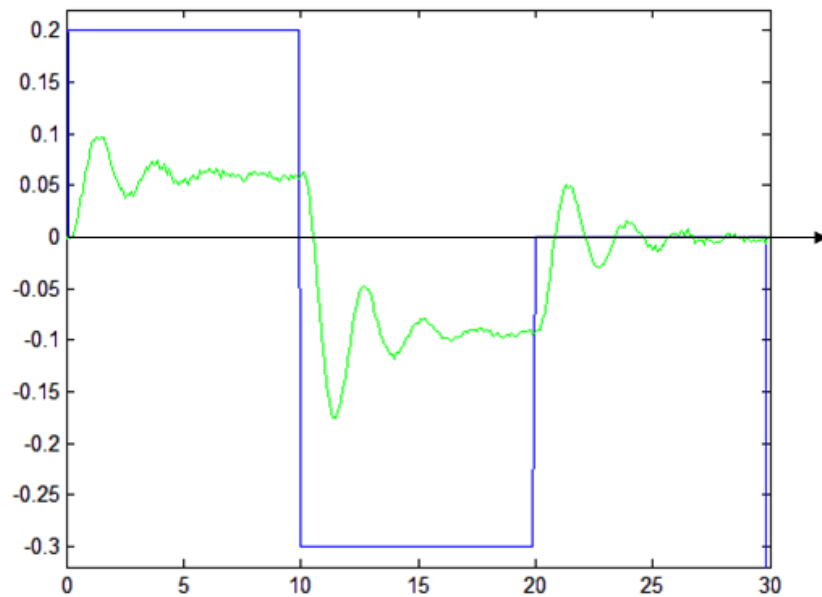
$$u_i = u_0 \pm \nabla u_i \rightarrow \nabla u_{ID}(i) = u_i - u_0 \quad (3.5)$$

Změny regulované veličiny jsou rozloženy kolem pracovního bodu y_0 . Takže pro pořadnice (přírůstky) ∇y_i , které jsou použity pro odhad parametrů obrazového přenosu, platí:

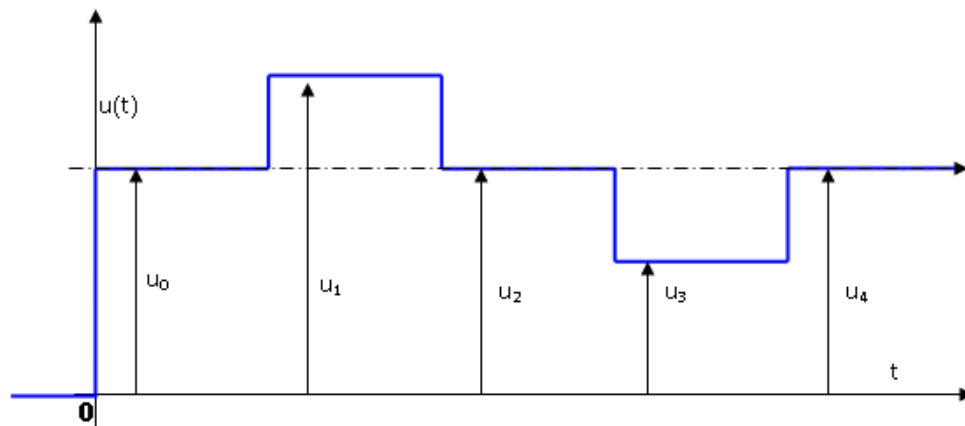
$$\nabla y_i = \nabla y_{ID}(i) = y_i - y_0 \quad (3.6)$$

kde $\Delta u_{ID}(t)$, $\Delta y_{ID}(t)$ jsou přírůstky vstupující do identifikace, $u(t)$, $y(t)$ jsou měřené vstupy a výstupy, u_0 , y_0 jsou souřadnice pracovního bodu.

Na obr. 3-7 jsou zobrazeny veličiny transformované do pracovního bodu. Je možno doporučit provádět změny akční veličiny kolem pracovního bodu stejné absolutní hodnoty (obr. 3-8).



Obr. 3-7: Průběh veličin ∇u_{id} , ∇y_{id} vstupující do výpočtu parametrů obrazového přenosu



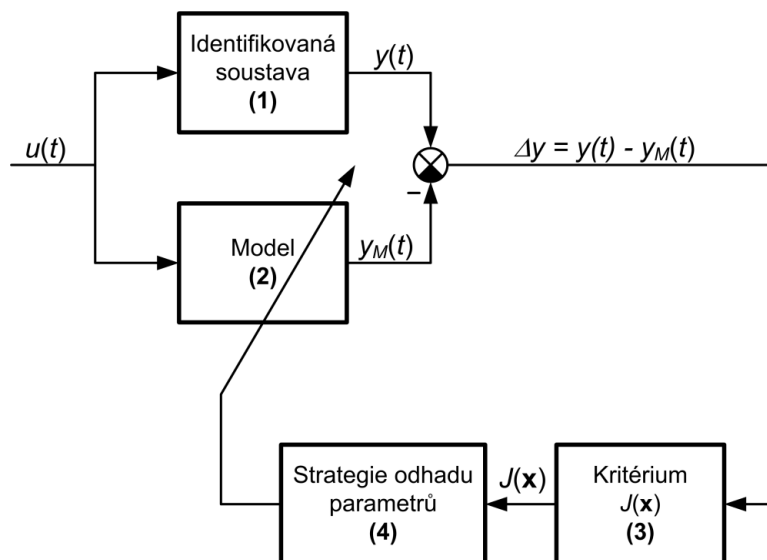
Obr. 3-8: Typický průběh změn akční veličiny, které jsou symetrické kolem u_0

3.5 Struktura identifikace – ideové schéma

Ve struktuře identifikace dle obr. 3-9 je (1) identifikovaná soustava. Identifikace se provádí ON-LINE nebo OFF-LINE. Identifikací. ON-LINE se označuje identifikace, která se provádí v reálném čase přímo na reálné soustavě. OFF-LINE identifikací pak označujeme identifikaci, při které nejdříve provedeme identifikační měření, které se ukládá na vhodné médium, a pak následuje zpracování měření, které se již zpravidla provádí mimo zkoumaný objekt.

- Pokud je identifikace ON-LINE, pak blok (1) je přímo identifikovaná soustava.
- Uvažujeme-li OFF-LINE, máme k dispozici soubor měření, vektor vstupu u a vektor výstupu y .

Parametrická identifikace vychází z předpokladu, že je apriorně známa struktura modelu (obrazového přenosu), nebo je možno strukturu zvolit.



Obr. 3-9: Obecná ideová struktura identifikace

3.5.1 Parametrická ON-line identifikace s LTI modelem

V našem kurzu bude uvažována **struktura LTI modelu (lineárně časově invariantní model, lineární model s konstantními koeficienty)**.

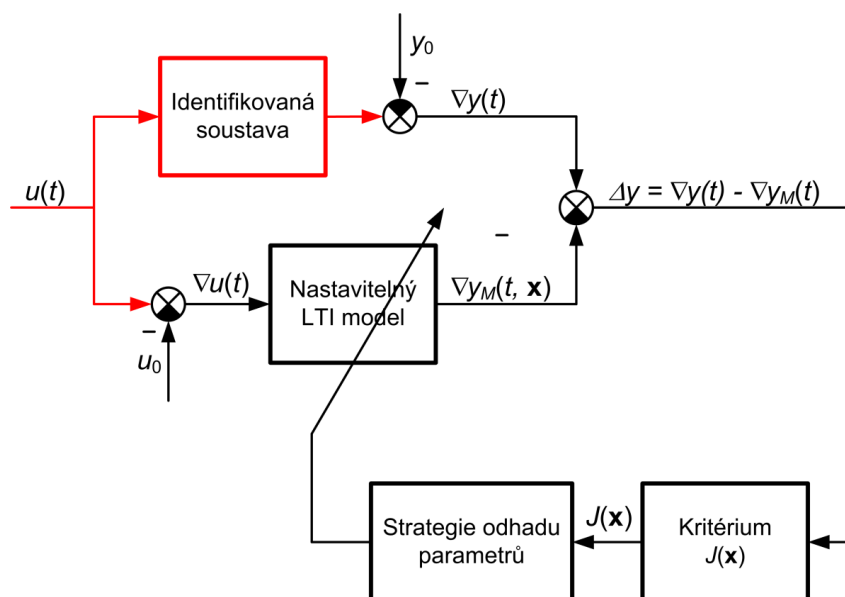
Identifikační měření se musí volit tak, aby bylo v lineární části statické charakteristiky a leželo v okolí pracovního bodu. Pracovní bod je definován dvojicí $[u_0, y_0]$. Vlastní odhad parametrů pak pracuje s veličinami

$$\nabla u(t) = u(t) - u_0 \quad (3.7)$$

$$\nabla y(t) = y(t) - y_0 \quad (3.8)$$

Struktura ON-line parametrické identifikace je na obr. 3-10. Vstupem nastavitelného LTI modelu je ∇u a výstupem je $\nabla y_M(t, X)$. Chyba odhadu modelu je definována

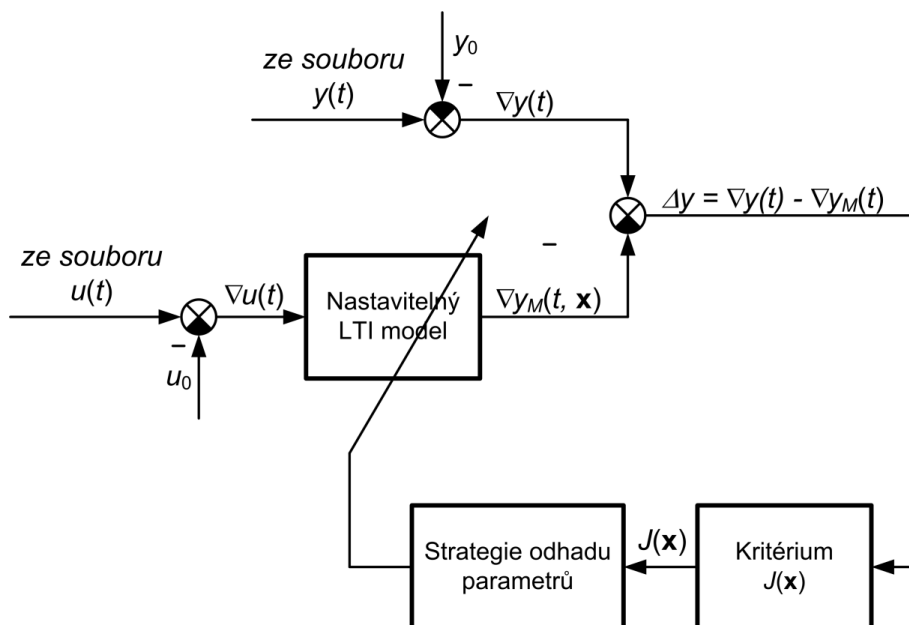
$$\Delta y = \nabla y - \nabla y_M = \nabla y(t) - \nabla y_M(t, X) = \Delta y(t, X) \quad (3.9)$$



Obr. 3-10: Struktura ON-line parametrické identifikace s LTI modelem

3.5.2 Parametrická OFF-line identifikace s LTI modelem

Při realizaci OFF-line parametrické identifikace jsou vstupy a výstupy uloženy do souborů. Struktura je obr. 3-11. Vstupem do LTI modelu je ∇u , výstupem $\nabla y_M(t, \mathbf{x})$. Chyba odhadu je dle rovnice (3.9).



Obr. 3-11: Struktura OFF-line parametrické identifikace s LTI modelem

3.6 Struktura modelu

3.6.1 Obrazový přenos

Uvažujme, že dynamické vlastnosti soustavy jsou aproximovány obrazovým přenosem

$$F_U(s) = \frac{Y_U(s)}{U(s)} = \frac{\nabla Y(s)}{\nabla U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad (3.10)$$

kde $B(s)$ a $A(s)$ jsou polynomy v čitateli a jmenovateli, $n > m$, pak je systém fyzikálně realizovatelný a je řádu n .

Obrazový přenos soustavy s dopravním zpožděním má tvar

$$F_U(s) = \frac{Y_U(s)}{U(s)} = \frac{\nabla Y(s)}{\nabla U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} e^{-s T_D} \quad (3.11)$$

Obrazový přenos je možné definovat například jako poměr Laplaceova obrazu výstupu ku Laplaceově obrazu vstupu (dle (3.10)).

Obecně definujeme strukturu obrazového přenosu stupni polynomu jmenovatele (n) a čitatele (m) polynomů $A(s)$, $B(s)$ a dopravním zpožděním T_D .

Obrazový přenos je možno zapsat ve tvaru

$$F_U(s) = \frac{Y_U(s)}{U(s)} = \frac{\nabla Y}{\nabla U} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \cdot e^{-s T_D} =$$

$$= K \frac{(1 + T_{B1} s) \dots (1 + T_{Bm} s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots (1 + T_n s)} \cdot e^{-s T_D} \quad (3.12)$$

3.6.2 Speciální struktury obrazových přenosů

Je možné uvažovat některé speciální struktury obrazových přenosů. Příklad vybraných speciálních struktur jsou v tab. 3-2.

Tab. 3-2: Speciální struktury obrazových přenosů

$F_1(s) = \frac{K}{\tau \cdot s + 1} \cdot e^{-s T_D}$	soustava 1. řádu s dopravním zpožděním T_D
$F_2(s) = \frac{K}{(\tau_1 \cdot s + 1)(\tau_2 \cdot s + 1)}$	soustava 2. řádu, přetlumená
$F_3(s) = \frac{K}{(\tau \cdot s + 1)^n}$	n -tý řád, kritické tlumení
$F_4(s) = \frac{K}{(\tau_1 \cdot s + 1) \cdot [(\tau \cdot s)^2 + 2\xi \cdot \tau \cdot s + 1]}$	3. řád, kmitavá (tlumená) odezva
$F_5(s) = \frac{K}{(\tau_1 \cdot s + 1)(\tau_2 \cdot s + 1)(\tau_3 \cdot s + 1)}$	3. řád, přetlumená odezva
$F_6(s) = \frac{b_0}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1}$	$\mathbf{X} = [b_0, a_0, a_1, a_2, a_3]$ vektor parametrů
$F_7(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1}$	$\mathbf{X} = [b_0, b_1, a_0, a_1, a_2, a_3]$, vektor parametrů

Jako příklad struktury obrazového přenosu při identifikaci jeho parametrů můžeme třeba uvažovat obrazový přenos druhého řádu s časovými konstantami T_1, T_2 .

$$F_1(s) = F_1(s, [K, T_1, T_2]) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \quad (3.13)$$

Tvar přenosu, který vstupuje do identifikace, je pak popsán rovnicí (3.14)

$$F_1(s) = F_1(s, [x(1), x(2), x(3)]) = F_1(s, X) = \frac{x(1)}{(x(2)s + 1)(x(3)s + 1)} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (3.14)$$

kde $x(1), x(2), x(3)$ jsou hledané parametry obrazového přenosu. Podobně pro obecnější struktury (reálné i komplexně sdružené póly, nuly) je možné uvažovat přenosy $F_6(s)$ a $F_7(s)$ z tab. 3-2.

3.6.3 Kriterium shody modelu a reálné soustavy

Jako míru shody mezi identifikovaným dynamickým systémem a jeho aproximací lineárním časově invariantním modelem, použijeme kvadratické kritérium ve tvaru

$$J_2 = J_2(\mathbf{x}) = \int_0^{TM} \Delta y(t, X)^2 dt = \int_0^{TM} [y(t) - y_M(t, X)]^2 dt \quad (3.15)$$

kde $y(t)$, $y_M(t, X)$ označují výstupy ze soustavy a modelu, X je vektor hledaných parametrů, TM je doba měření a $\Delta y(t, X)$ je chyba mezi výstupem ze soustavy a z modelu.

Integrál je možno aproximovat součtem $\Delta y(i, X)$

$$J_2(X) \doteq \sum_{i=1}^N \Delta y(i, X)^2 = \sum_{i=1}^N [y(i) - y_M(i, X)]^2 \quad (3.16)$$

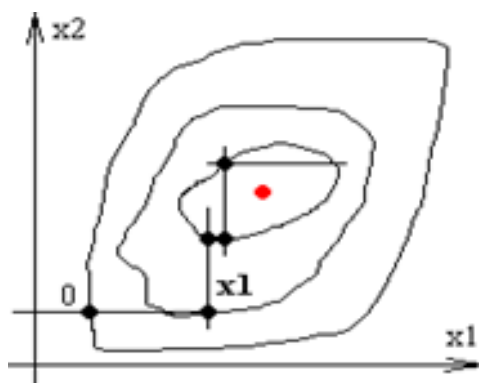
kde $y(i)$, $y_M(i, X)$ jsou veličiny označující výstup ze soustavy a modelu, N počet měřených vzorků.

Úkolem je nalézt minimum volného extrému funkce více proměnných

$$\min_{\mathbf{X}} J_2(\mathbf{X}) = \int_0^{TM} \Delta y(t, X)^2 dt = \int_0^{TM} [y(t) - y_M(t, X)]^2 dt \quad (3.17)$$

3.6.4 Optimalizační metoda

Metoda Gaussova: cyklicky se vybírá jedna složka vektoru \mathbf{x} a v jejím směru se provádí přímé hledání (např. půlením intervalu) postupného minima. Postup se opakuje, dokud není dosaženo s potřebnou přesností lokálního minima na zkoumaném intervalu (obr. 3-12).



Obr. 3-12: Zjednodušené schéma principu Gaussovy metody

Metoda polyedrického hledání: princip spočívá v určení směru hledání v n -rozměrném prostoru. Tyto body se volí ve vrcholu pravidelného $n+1$ - rozměrného polyedru [5]. Na začátku výpočtu se provede výpočet kritéria v uzlech polygonu (1, 2, 3), hodnoty kritéria jsou $J_1(x)$, $J_2(x)$, $J_3(x)$. Melder-Mead metoda provede kontrolu těchto hodnot a následně vygeneruje nový bod simplexu. Následně provede výpočet hodnoty kritéria v novém bodě simplexu a vygeneruje další bod simplexu. Pro tuto optimalizaci se používá funkce „fminsearch” z optimalizačního toolboxu.

3.6.5 SW podpora MATLABu – funkce fminsearch

Funkce MATLABu, která najde lokální minimum vícerozměrové funkce bez použití gradientu.

Tab. 3-3: Syntaxe funkce `fminsearch`

<code>x = fminsearch ('fun', x0)</code>
<code>x = fminsearch ('fun', x0, options)</code>

Tab. 3-4: Parametry funkce `fminsearch`

<code>'fun'</code>	Funkce, která má být minimalizována. Tato funkce pracuje s vektorem x a vrací skalární hodnotu f . Tato funkce může být m-file funkce.
<code>x0</code>	Vektor počátečních odhadů parametrů.
<code>x</code>	Výsledný vektor.
<code>options</code>	Struktura, která zajistí řízení procesu optimalizace pomocí podmínek, které jsou definovány příkazem „ <code>optimset</code> “. Tento příkaz obsahuje string-řetězce, které definují řídicí parametr, který následuje číselná hodnota tohoto parametru.

Tab. 3-5 Vybrané možnosti string-řetězce `optimset`.

<code>'MaxFunEvals'</code>	Maximálně povolený počet výpočtu funkční hodnoty <code>fun</code>
<code>'MaxIter'</code>	Maximální počet povolených iteračních kroků
<code>'TolFun'</code>	Zadání tolerance vzhledem k funkční hodnotě $\Delta = fun(i) - fun(i-1)$
<code>'TolX'</code>	Zadání tolerance vzhledem k vektoru parametrů $\Delta x = x(i) - x(i-1) $

Příklad zadání parametrů „`optimset`“:

```
|| OPTIONS = optimset('MaxIter', 1000, 'TolX', 1e-3)
```

3.6.6 Posun výstupu modelu do pracovního bodu

Chceme-li při verifikaci posuzovat shodu mezi výstupem z modelu $y_M(t)$ a výstupem ze sledovaného procesu $y(t)$ je vhodné provést posun výstupu modelu do pracovního bodu y_0, u_0 . Do identifikace podle vstupuje $\nabla u_i = u_i - u_0$ a $\nabla y_i = y_i - y_0$. Výsledkem je obrazový přenos

$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$, z něhož je možno určit zesílení modelu K_M . Výstupem modelu pak je

$y_M(t) = \Delta y(t)$ obr. 3-13a.

Varianty posuvu do pracovního bodu:

- Do lineárního modelu, který nerespektuje posun do pracovního bodu je vstupem ∇u_i a výstupem je $\nabla y(t)$, viz obr. 3-13a.
- Chceme-li realizovat posun výstupu z modelu do pracovního bodu y_0 , pro který pak platí:

$$y(t) = y_0 + \nabla y(t) = y_0 + \frac{B(s)}{A(s)} \nabla u = y_0 + \frac{B(s)}{A(s)} (u(t) - u_0) \quad (3.18)$$

Vstup modelu musí být $\nabla u_i = u_i - u_0$ a k výstupu modelu $\nabla y(t)$ přičteme y_0 obr. 3-13b.

- Další možnost jak realizovat posun výstupu modelu $\Delta y(t)$ je na obr. 3-13c. Na vstupu se odečte u_0 a přičte se korekční akční zásah $\nabla u(\infty)_{ZES} = y_0/K_M$, který reprezentuje na výstupu v ustálení hodnotu pracovního bodu y_0 , kde K_M je zesílení modelu. Platí

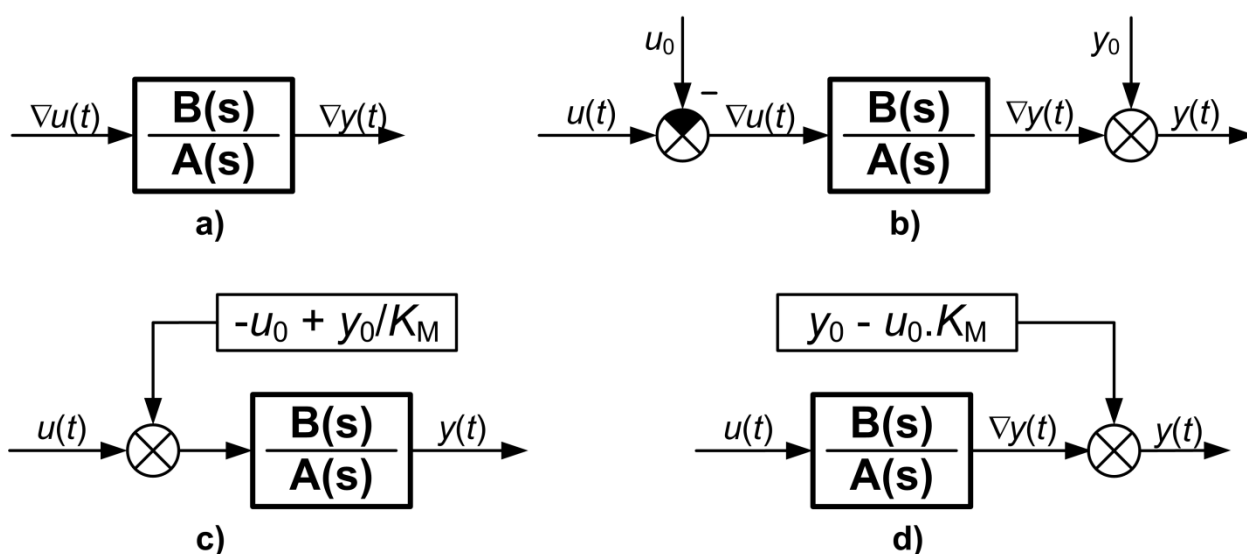
$$\nabla y(\infty) = K_M \nabla u(\infty) \rightarrow K_M = \frac{\nabla y(\infty)}{\nabla u(\infty)} \quad \& \quad u_{KOR} = -u_0 + \nabla u_{YES}(\infty) = -u_0 + y_0 / K_M \quad (3.19)$$

d) Na obr. 3-13d je varianta, kdy vstup modelu je $u(t) = u_0 + \nabla u(t)$. Znamená to, že na výstup z modelu se superponuje hodnota pracovního bodu y_0 . Z výstupu modelu, od kterého odečteme účinek akční veličiny u_0 na výstup modelu ∇y_0 , tedy odečítá se součin $u_0 \cdot K_M$, kde K_M je zesílení modelu.

$$\nabla y_M = \frac{B}{A} u(t) = \frac{B}{A} [u_0 + \nabla u(t)] = \nabla y(t) + u_0 \cdot K_M \quad (3.20)$$

$$y = \nabla y(t) + y_0 = \nabla y_M + y_0 - u_0 \cdot K_M \quad (3.21)$$

$$y_{KOR} = -y_0 + \nabla y_0 = -y_0 + u_0 \cdot K_M \quad (3.22)$$

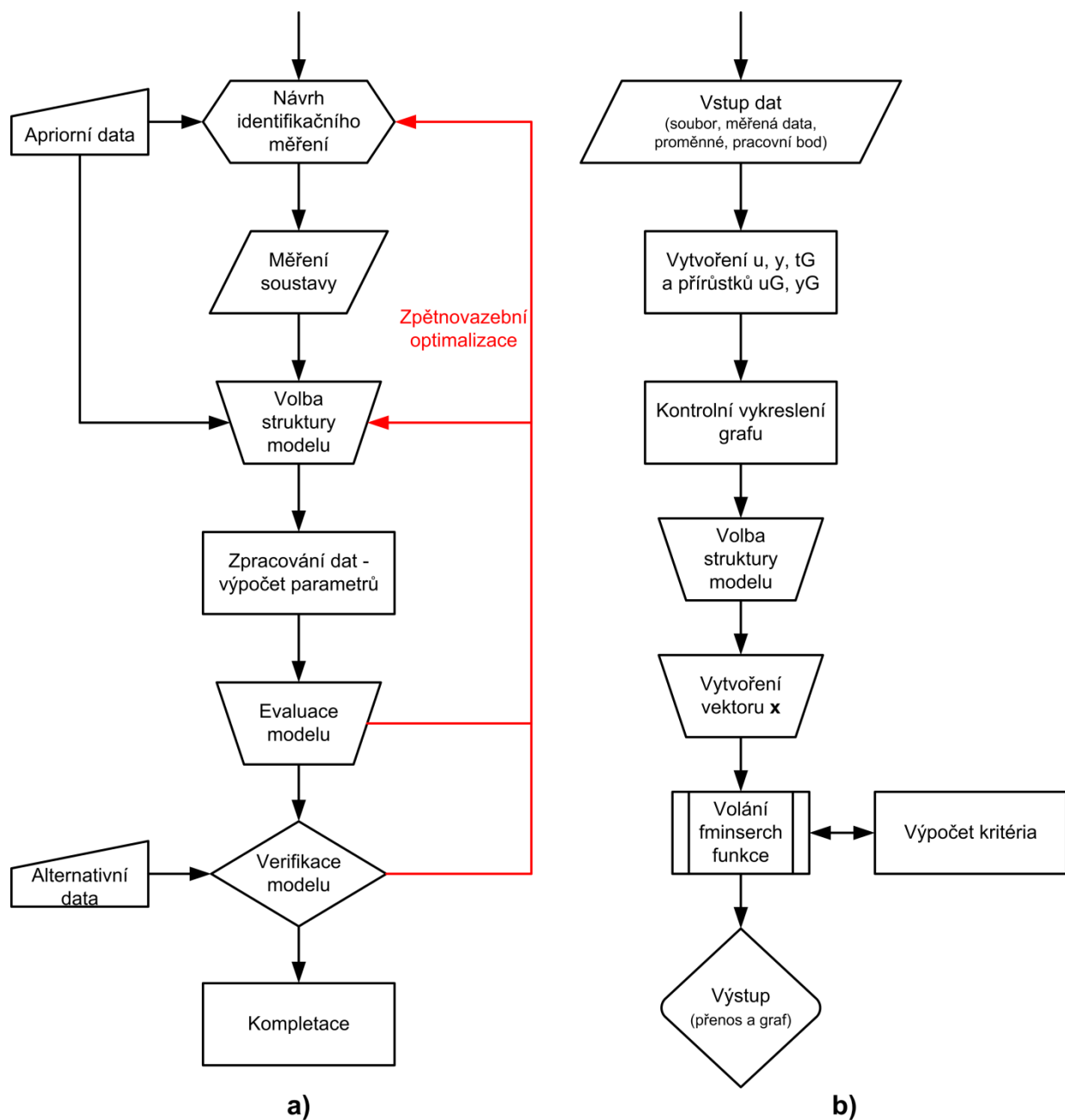


Obr. 3-13: Varianty posunu výstupu z modelu do pracovního bodu

3.7 Proces identifikace pomocí Matlabu

3.7.1 Vývojové diagramy

Na následujících obrázcích jsou vývojové diagramy obecné parametrické identifikace (obr. 3-14a) a koncepce řešení problému identifikace Matlabovským programem (obr. 3-14b).



Obr. 3-14: Vývojový diagram experimentální identifikace (a) a pro identifikaci parametrů obrazového přenosu (b)

3.7.2 Výpis programu v MATLABu

```
% Parametrická identifikace
% F = K/(Ts+1)^n, n=3, mereno s periodou vzorkovani 0,1 s
close all; clear all; clc;
global tG uG yG N

%% vstup dat, vytvoreni vektoru u, y, tG
load ('SU02'); %nacteni dat
u = W(:, 1); y = W(:, 2); %vytvoreni vektoru avstup a vystupu u, y
tG = 0:0.1:(length(u) - 1)*0.1; %vytvoreni casoveho vektoru tG
figure; plot(tG, y, tG, u); %vykresleni vstupnich dat - overeni
title('Graf mereni'); xlabel('Cas [s]'); xlabel('y, u [V]');

%% pracovni bod
```

```

y0 = 2.5; u0 = 2; %pracovni bod
yG = y - y0; %prirustky yG
uG = u - u0; %prirustky uG
figure; plot(tG, yG, tG, uG); %vykresleni prirustkovych dat
title('Vstup do identifikace'); xlabel('Cas [s]'); xlabel('yG, uG [1]');

%% struktura obrazoveho prenosu
disp('Struktura obrazoveho prenosu')
disp(' x(1) K ')
disp('F(s)=----- = -----')
disp(' (x(2).s + 1)^3 (Ts + 1)^3')
N = 3; %rad prenosu
T = 0.5; %pocatecni odhad casove konstanty
K = 1; %pocatecni odhad zesileni
A = []; %polynom A = jmenovatel
for i = 1:N; %vypocet A pro N. rad
    A = conv(A, [T 1]);
end;
F = tf(K, A) %LTI objekt prenosove funkce
x = [K T]; %vektor hledanych parametru x

%% hledani optimalnich parametru - minimalizace J
OPTIONS = optimset('MaxIter', 100, 'TolX', 1e-4); %nastaveni parametru
minimalizace pro funkci fminsearch
disp('running...')
x = fminsearch('critT', x, OPTIONS);

%% vystupy
disp('Optimalizovany vektor x:')
x
disp('Konecna hodnota kriteria J:')
critT(x)
Kid = x(1); %vypoctene zesileni
Aid = [];
for i = 1:N; %vypocet A pro N. rad pomoci nalezeného T
    Aid = conv(Aid, [x(2) 1]);
end;
disp('Nalezeny obrazovy prenos:')
Fid = tf(Kid, Aid)
disp('Zesileni systemu:')
Kid
disp('Koreny charakteristicke rovnice:')
roots(Aid)
disp('Casove konstanty ve jmenovateli:')
1./roots(Aid)
[yi,ti] = lsim(Fid, uG, tG); %reakce nalezeného systemu na puvodni
prirustkovy vstup
figure; plot(tG, yG, tG, uG, ti, yi) %porovnani odezvy mereného systemu a
nalezeného obrazoveho prenosu

% Kriterialni funkce critT(x)
function J = critT(x)
global tG yG uG N
A = [];
for i=1:N; %vypocet jmenovatele - polynom A
    A = conv(A, [x(2) 1]);
end
sys = tf(x(1), A); %obrazovy prenos
[yi,ti] = lsim(sys, uG, tG); %vypocet odezvy systemu na buzeni
J = sum((yG - yi).*(yG - yi)); %minimalizovana funkce J

```

4 Základní nástroje verifikace modelu

4.1 Druhy testů vlastností modelu

Vlastnosti odhadnutého parametrického modelu je možno ověřovat z několika pohledů. Přirozeně se nabízí testovat:

a) Míru shody mezi výstupem soustavy a modelem.

Tato kontrola je nejběžnější, protože je k dispozici měření na soustavě. Nemůže však v žádném případě dávat informace o říditelnosti a pozorovatelnosti modelu, ani o správné volbě struktury modelu.

b) Míru shody mezi frekvenční charakteristikou soustavy a modelem.

Frekvenční vlastnosti modelu jsou významné pro modelování soustav, ve kterých vstupní signál leží v určitém frekvenčním spektru.

c) Dosažitelnost a říditelnost, minimální realizaci a možnosti redukce řádu modelu.

Posouzení správnosti volby struktury modelu a redukce řádu modelu se opírá o definici dosažitelnosti a říditelnosti, SVD rozklad, kanonickou dekompozici a redukci řádu modelu. Redukce řádu modelu je založena na časové dekompozici a nalezení a eliminaci módů, které jsou špatně říditelné nebo dosažitelné.

4.2 Póly, nuly, módy systému, časová odezva

Analyzujeme základní vlastnosti pólů a nul přenosové funkce. Je známo, že každou racionálně lomenou funkci je možno zapsat ve tvaru

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0)}{(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - s_{Bi})}{\prod_{k=1}^n (s - s_k)} \quad (4.1)$$

Speciální třídu přenosových funkcí tvoří přenosy, které mají nuly a póly v pravé části Gausovy roviny. Obrazové přenosy, které mají vesměs nuly a póly v levé části Gausovy roviny se nazývají fázově minimální. Přenosy, které mají nuly a póly v pravé polorovině se nazývají fázově neminimální.

Hovoříme-li, že obrazový přenos je stabilní, pak tato funkce má póly v levé části Gausovy roviny. Říkáme, že obrazový přenos je nestabilní, jestliže alespoň jeden pól leží v pravé části Gausovy roviny.

Je známo, že každou racionálně lomenou funkci (L-obraz odezvy) je možno rozložit do parciálních zlomků, přičemž každý člen obsahuje buď jednoduchý nebo komplexně sdružený pól, nebo kombinaci násobků násobného pólu. Parciální zlomky rozkladu obrazu výstupu obsahují jak **póly systému**, tak **póly buzení**. Neobsahuje-li obraz výstupu **nuly systému**, pak koeficienty parciálních zlomků určují buď póly systému, nebo póly buzení.

Nuly systému ovlivňují všechny koeficienty rozkladu na parciální zlomky.

Parciálním zlomkům, které obsahují póly soustavy, odpovídají příslušné **módy**-předměty standardního typu, které v součtu tvoří **přirozenou odezvu** systému. Připomínáme, že koeficienty módů ovlivňují jak póly, tak nuly systému.

Na následujícím příkladě budou ukázány vlastnosti nul systému a jejich vliv na dynamiku soustavy.

Příklad 4-2 (systém se dvěma póly a jednou nulou)

Analyticky nalezněte odezvu systému $F(s) = 2 \frac{-s+1}{(s+1)(s+2)}$ na jednotkový skok (vliv pólů a nul!).

Opět nalezneme odezvu systému v Laplacově obraze a provedeme rozklad systému na parciální zlomky.

$$F(s) = 2 \frac{-s+1}{(s+1)(s+2)}, U(s) = \frac{1}{s}, Y(s) = F(s) \cdot U(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

Jednotlivé koeficienty parciálních zlomů můžeme nalézt například pomocí limitních vět.

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{-s+1}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{1}{s} \cdot s = 1, B = \lim_{s \rightarrow -1} 2 \cdot \frac{-s+1}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{1}{s} \cdot (s+1) = -4,$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -2} 2 \cdot \frac{-s+1}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{1}{s} \cdot (s+2) = 3$$

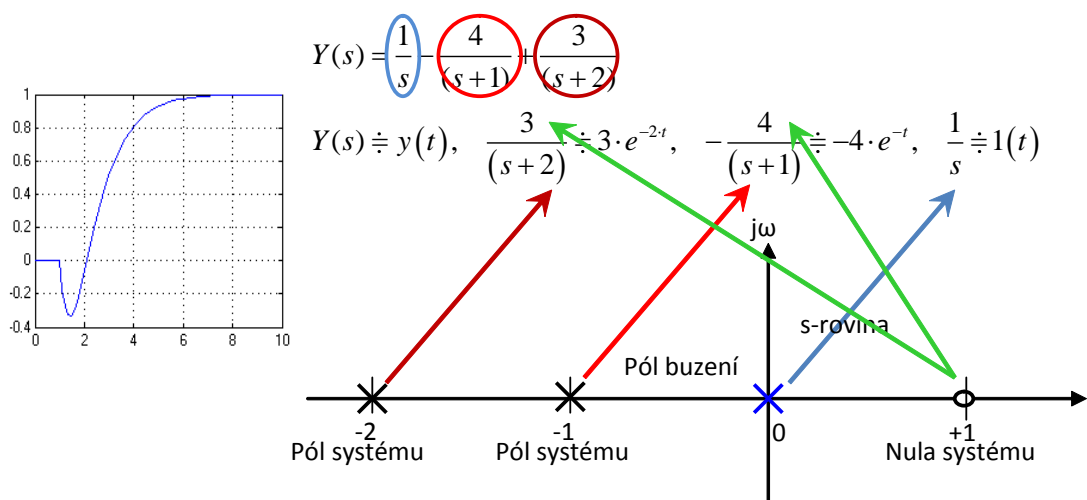
$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{3}{s+2}$$

$$Y(s) \doteq y(t), \quad \frac{1}{s} \doteq 1(t), \quad -\frac{4}{s+1} \doteq -4 \cdot e^{-t}, \quad \frac{3}{s+2} \doteq 3 \cdot e^{-2t}$$

Odezva systému v časové oblasti má pak rovnici

$$y(t) = 1 - 4e^{-t} + 3e^{-2t}$$

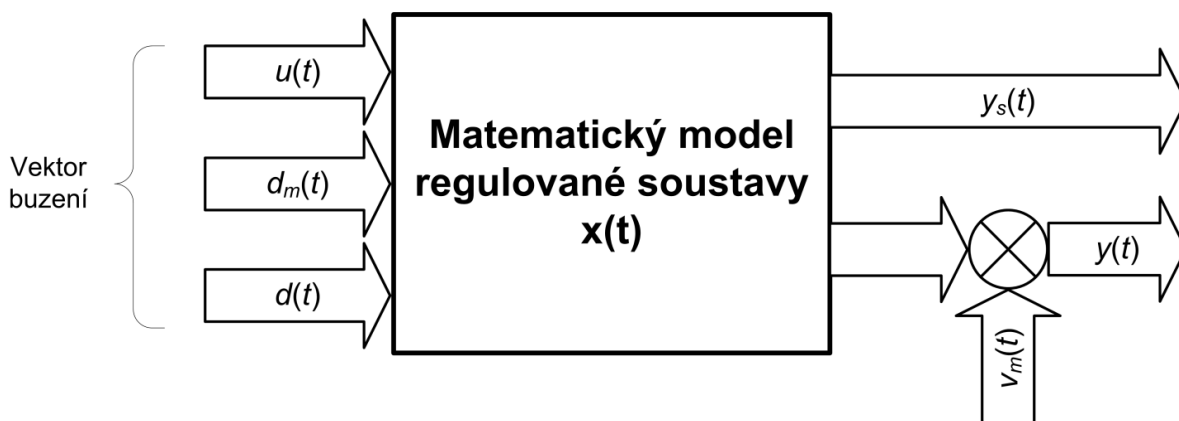
kde je část odezvy vynucená buzením ($y_{\text{vynucená}} = 1$) a část přirozené odezvy ($y_{\text{přirozená}} = -4e^{-t} + 3e^{-2t}$). Část vynucená buzením odpovídá buzení jednotkovým skok a část přirozená pak samotným vlastnostem sledovaného systému $F(s)$.



Obr. 4-2: Rozložení pólů a nul v s-rovině a vliv nuly na koeficienty parciálních zlomků, přechodová charakteristika tohoto systému

4.3 Vnitřní popis regulovaného systému s poruchami

Uvažujme vícerozměrový dynamický systém, jehož struktura je na obr. 4-3.



Obr. 4-3: Struktura MIMO systému

Tab. 4-1: Popis signálů z obr. 4-3

$\mathbf{u}(t)$	vektor akčních veličin
$\mathbf{d}_m(t)$	vektor měřených poruchových veličin
$\mathbf{d}(t)$	vektor neměřených poruchových veličin
$\mathbf{y}_s(t)$	vektor neměřených výstupních veličin
$\mathbf{y}_m(t)$	vektor měřených výstupních veličin
$\mathbf{v}_m(t)$	vektor šumu měření
$\mathbf{x}(t)$	stavový vektor

Předpokládejme, že je možno tento systém linearizovat a popsat lineárním časově invariantním modelem (LTI- model). Tento systém je pak možno aproximovat stavovým popisem ve spojitě nebo diskrétní formě nebo vnějším popisem pomocí přenosů.

4.3.1 Stavová reprezentace – lineární stavový popis

Pro lineární časově invariantní MIMO soustavu má stavová rovnice pro spojitý popis tvar

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (4.2)$$

a rovnice výstupu

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (4.3)$$

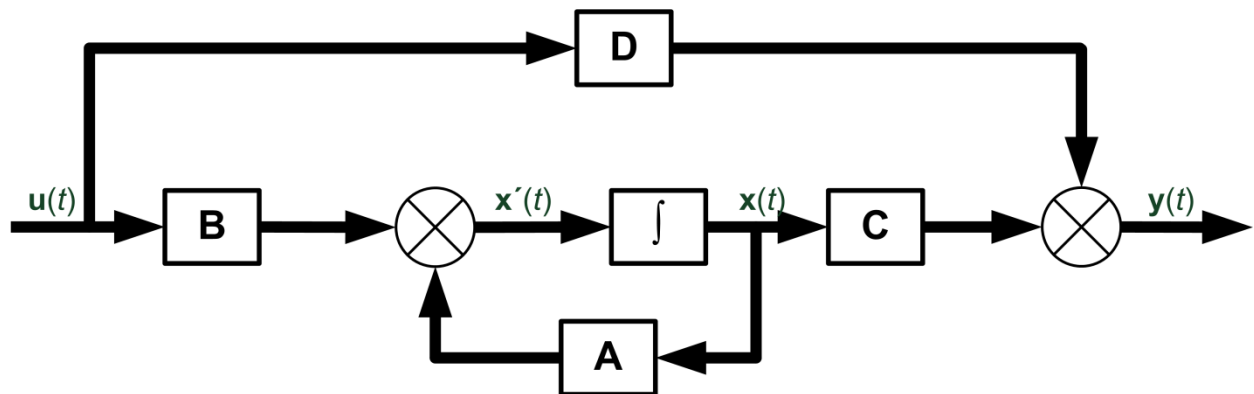
kde je

- A** matice soustavy [$n \times n$]
- B** matice buzení [$n \times p$]
- C** matice výstupu [$r \times n$]
- D** matice převodu [$r \times p$]

$\mathbf{x}(t)$ vektor stavových veličin $[n \times 1]$

$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{IN}(t) \\ \mathbf{d}_m(t) \\ \mathbf{d}(t) \end{bmatrix}$ vektor vstupních signálů

Pro stavové rovnice se kreslí blokové schéma pomocí integračních nebo diskrétních zpožďovacích bloků (obr. 4-4).



Obr. 4-4: Bloková struktura stavového popisu spojitého systému

4.3.2 Určení obrazového přenosu ze stavového popisu

Předpokládejme stavovou reprezentaci dle (4.2) a (4.3), $\mathbf{D} = 0$, pro soustavu s jedním vstupem a jedním výstupem. Počáteční podmínky nulové. Necht' matice \mathbf{A} je rozměru $[n \times n]$. Aplikací Laplaceovy transformace na rovnici (4.2) dostaneme rovnost

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(s) + \mathbf{B} \cdot U(s) \quad (4.4)$$

L-obraz vektoru stavu určíme řešením algebraické rovnice a je roven

$$[s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}] \cdot \mathbf{X}(s) = \mathbf{B} \cdot U(s) \rightarrow \mathbf{X}(s) = [s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot U(s) \quad (4.5)$$

Inverzní matice je definována

$$[s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{\text{adj}[s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}]}{\det[s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}]} \quad (4.6)$$

kde adjungovaná matice $\text{adj}[s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}]$ je rozměru $[n \times n]$ a determinant $\det[s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}]$ je polynom, pro který platí

$$\det[s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}] = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0 = A(s) \quad (4.7)$$

L-obraz výstupu dle (4.3) je roven

$$Y(s) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}(s) = \mathbf{C} \cdot [s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot U(s) = \mathbf{C} \cdot \frac{\text{adj}[s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}]}{\det[s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}]} \cdot \mathbf{B} \cdot U(s) = \frac{B(s)}{A(s)} U(s) \quad (4.8)$$

Vzhledem k tomu, že \mathbf{C} je „ležatý“ vektor $[1 \times n]$, adjungovaná matice je čtvercová matice rozměru $[n \times n]$ a \mathbf{B} je vektor rozměru $[n \times 1]$. Součin $\mathbf{C} \cdot \text{adj}[s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}] \cdot \mathbf{B}$ je skalární funkce proměnné „s“, kterou označíme jako $B(s)$. Obrazový přenos je roven podílu

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} U(s) = F(s) \cdot U(s) \quad (4.9)$$

Determinant $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ (4.7) je charakteristickým polynomem stavové rovnice a kořeny těchto polynomů jsou vlastní čísla matice \mathbf{A} . Vlastní čísla/póly soustavy určují dynamické vlastnosti soustavy. Rovnice (4.10) je označována jako charakteristická rovnice.

Každému vlastnímu číslu s_i matice \mathbf{A} , resp. \mathbf{M} , odpovídá i -tá stavová veličina/ i -mód.

$$\det[s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}] = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0 = 0 \quad (4.10)$$

4.3.3 Stavová dosažitelnost (řiditelnost), pozorovatelnost

Dosažitelnost:

Stav $x(t_1)$ je dosažitelný, jestliže existuje takový vstup $u(t)$ na konečném časovém intervalu $t_1 - t_0, (t_1 > t_0)$, kterým se převede soustava z počátečního stavu $x(t_0) = 0$ do žádaného stavu $x(t_1)$.

Podmínky dosažitelnosti (řiditelnosti):

Libovolný stav lineární stacionární soustavy je dosažitelný tehdy a jen tehdy, jestliže hodnota matice dosažitelnosti \mathbf{C}_0 (4.11) je rovna rozměru stavového prostoru.

$$h(\mathbf{C}_0) = \text{rank}(\mathbf{C}_0) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} & \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1} \cdot \mathbf{B} \end{bmatrix}\right) = n \quad (4.11)$$

Pozorovatelnost:

Stav $x(t_0)$ systému v čase t_0 je pozorovatelný, jestliže ho lze určit z průběhu vstupní veličiny $u(t)$ a výstupní veličiny $y(t)$ v konečném časovém intervalu $t_1 - t_0, (t_1 > t_0)$.

Podmínky pozorovatelnosti:

Lineární stacionární soustava je pozorovatelná tehdy a jen tehdy, jestliže hodnota matice pozorovatelnosti \mathbf{O}_b (4.12) je rovna řádu systému.

$$h(\mathbf{O}_b) = \text{rank}(\mathbf{O}_b) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{C}^T & (\mathbf{A}^T)^2 \cdot \mathbf{C}^T & \dots & (\mathbf{A}^T)^{n-1} \cdot \mathbf{C}^T \end{bmatrix}\right) = n \quad (4.12)$$

4.3.4 SW podpora MATLABu – funkce ctrb

Funkce **ctrb** vytvoří matici řiditelnosti (dosažitelnosti) buď ze stavových matic \mathbf{A} , \mathbf{B} , nebo přímo z proměnné, v níž je uložen systém (tf, ss, zpk, ...).

Tab. 4-2: Syntaxe funkce ctrb

$\mathbf{C}_0 = \text{ctrb}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$
$\mathbf{C}_0 = \text{ctrb}(\text{sys})$

4.3.5 SW podpora MATLABu – funkce obsv

Funkce **obsv** vytvoří matici pozorovatelnosti buď ze stavových matic \mathbf{A} , \mathbf{C} , nebo přímo z proměnné, v níž je uložen systém (tf, ss, zpk, ...).

Tab. 4-3: Syntaxe funkce obsv

$\text{Ob} = \text{obsv}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$
$\text{Ob} = \text{obsv}(\text{sys})$

Příklad 4-3

Uvažujme stavový popis soustavy $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$, $y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$, kde matice \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} jsou zadány takto:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,000 & 0,5740 & -0,5744 \\ 2,000 & -0,5000 & -0,8660 \\ 2,000 & 0,8660 & -0,5000 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 \\ -0,0366 & 1,0000 \\ 0,1366 & 1,0000 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matice dosažitelnosti/řiditelnosti

$$\mathbf{C}_o = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 & 0,0999 & -0,0034 & 0,0003 & -0,9954 \\ -0,0366 & 1,0000 & -0,1000 & -1,3660 & -0,0632 & 0,3592 \\ 0,1366 & 1,0000 & -0,1000 & 0,3660 & -0,2364 & -1,3728 \end{bmatrix}$$

Hodnost matice dosažitelnosti $h(\mathbf{C}_o) = \text{rank}(\mathbf{C}_o) = 3$. Soustava je řiditelná/dosažitelná. ■

4.4 Dekompozice a technika SVD rozkladu

4.4.1 Kalmanova stavová dekompozice

Jestliže hodnost matice dosažitelnosti/řiditelnosti je $n_D < n$, pak pouze část stavového podprostoru je dosažitelná a řiditelná. Potom existuje transformační matice \mathbf{T} taková, že platí

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^T, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}^T \quad (4.13)$$

kde \mathbf{T} je unitary matice a transformovaný systém má blokovou matici systému, která je spodní trojúhelníkovou maticí (staircase). Pokud má regulovaná soustava neřiditelné módy, pak tyto jsou v horním levém rohu.

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{UC} & 0 \\ \mathbf{A}_{UC} & \mathbf{A}_C \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_C \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = [\mathbf{C}_{NC} \quad \mathbf{C}_C] \quad (4.14)$$

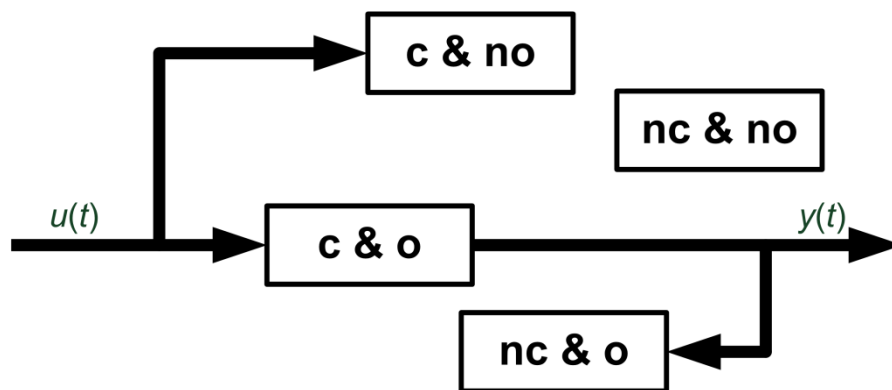
přičemž pouze subsystém $(\mathbf{A}_C, \mathbf{B}_C)$ je řiditelný, všechny módy vlastních čísel subsystému \mathbf{A}_{UC} jsou neřiditelné. Pro přenosovou matici tohoto systému platí

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{C}_C \cdot (s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_C)^{-1} \cdot \mathbf{B}_C = \mathbf{C} \cdot (s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad (4.15)$$

Charakteristický polynom soustavy je

$$\det[s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_C] = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \quad (4.16)$$

Kanonická dekompozice je zobrazena na obr. 4-5.



Obr. 4-5: Bloková struktura pro kanonickou dekompozici

4.4.2 SW podpora MATLABu – funkce ctrbf

Funkce **ctrbf** vytvoří kanonickou dekompozici ze stavových matic **A**, **B**, **C** a vrací matice **Abar**, **Bbar**, **Cbar** říditelného systému, transformační matici **T** a vektor **k**. Každý řádek vektoru **k** reprezentuje počet říditelných a pozorovatelných módů, které byly zjištěny při procesu dekompozice. Celkový počet říditelných módů je dán součtem řádků vektoru **k**.

Tab. 4-4: Syntaxe funkce ctrbf

$[Abar, Bbar, Cbar, T, k] = ctrbf(A, B, C)$
$[Abar, Bbar, Cbar, T, k] = ctrbf(A, B, C, tol)$

Příklad 4-4

Uvažujme soustavu s dvěma vstupy a dvěma výstupy, která je popsána maticemi **A**, **B**, **C**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,25 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2,25 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0,5 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0,5 \\ 0,25 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vytvořte kanonickou dekompozici a zjistěte říditelnost a pozorovatelnost systému a proveďte příslušné závěry!

Řešení:

Využijeme funkci v MATLABu, **ctrbf**

$$\parallel [Ad, Bd, Cd, T, k] = ctrbf(A, B, C)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_d &= \begin{bmatrix} -0,6101 & -0,0155 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,7811 & -0,3899 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,5060 & -0,3951 & -1,7955 & -0,0037 & 0,0722 & 0,1581 \\ -0,4326 & 1,8970 & 2,3624 & -0,9138 & 0,6105 & -0,2786 \\ 0,3689 & 0,5548 & -0,5387 & -0,2178 & -0,4242 & 0,1043 \\ 0,0918 & -0,8308 & 1,3055 & -0,0410 & 2,0873 & -0,8665 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{B}_d &= \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 \\ 0,5117 & -1,3116 \\ -3,1703 & -1,2368 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{C}_d &= \begin{bmatrix} 0,2573 & -0,5245 & -0,0193 & 0,3034 & 0,5163 & -0,5475 \\ -0,1536 & 0,2223 & 0,8063 & -0,3677 & 0,2582 & -0,2738 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} 0,2573 & -0,4338 & 0,7062 & -0,1536 & 0,2533 & -0,3990 \\ -0,5245 & 0,4760 & 0,1937 & 0,2223 & -0,0627 & -0,6383 \\ -0,0193 & -0,2802 & 0,2691 & 0,8063 & -0,3940 & 0,2081 \\ 0,3034 & 0,2396 & 0,2198 & -0,3677 & -0,8151 & -0,0518 \\ 0,5163 & -0,1454 & -0,5326 & 0,2582 & -0,0727 & -0,5972 \\ -0,5475 & -0,6543 & -0,2437 & -0,2738 & -0,3272 & -0,1752 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = [2 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]
 \end{aligned}$$

Z vektoru \mathbf{k} je zřejmé, že stavová reprezentace \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} má říditelné pouze 4 módy. Říditelný a pozorovatelný subsystém, který je popsán maticemi \mathbf{A}_C , \mathbf{B}_C , \mathbf{C}_C je označen modře. Výchozí systém není v minimální realizaci a obsahuje neříditelné a nepozorovatelné módy! ■

4.4.3 Minimální realizace

Při přechodu na popis systému pomocí přenosové matice reprezentaci je ze stavové reprezentace **využit pouze říditelný a pozorovatelný podsystém**. Platí tedy rovnice (4.15).

Stavová reprezentace bez neříditelných a nepozorovatelných módů se označuje jako **minimální realizace. Minimální realizaci zahrnující vazbu vstup/výstup je vyjádřena obrazovým přenosem dle (4.15).**

Při praktických aplikacích však zpravidla kořenové činitele nejsou ideálně si sobě rovny. Je třeba provádět krácení kořenových činitelů, které jsou si rovny jen s určitou přesností. Podobně je třeba rozhodovat o říditelnosti a pozorovatelnosti.

Příklad 4-5 (MinReal_1a_RVS)

Uvažujme soustavu s dvěma vstupy a jedním výstupem, která je popsána maticemi \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0,0450 & -0,4590 & -0,1223 & 0,3892 \\ 0,4659 & -2,2628 & 0,3591 & 0,7119 \\ 1,1125 & 0,4726 & 1,3667 & 0,0886 \\ -0,8736 & -0,2277 & 1,1511 & -0,4256 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,4513 & 0,1423 \\ 0,3791 & 0,5195 \\ 0,5774 & 0,0000 \\ 0,5650 & 1,3076 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = [0,4513 \quad 0,3791 \quad 0,5774 \quad 0,5650].$$

Vytvořte kanonickou dekompozici a zjistěte říditelnost a pozorovatelnost systému, minimální realizaci!

Řešení:

Využijeme funkci v MATLABu, **ctrbf**

$$\| [\mathbf{A}_d, \mathbf{B}_d, \mathbf{C}_d, \mathbf{T}, \mathbf{k}] = \text{ctrbf}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$$

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} -2,1822 & 0,6860 & 0,0001 & 0,0000 \\ -0,3140 & -0,8177 & 0,0001 & 0,0001 \\ -0,3992 & -1,7354 & -0,7515 & -0,4025 \\ -1,2635 & -0,4824 & -0,4025 & -0,3487 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 \\ 0,5257 & -0,3249 \\ -0,8506 & -1,3764 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_d = [0,0000 \quad 0,0000 \quad 0,5257 \quad -0,8506], \mathbf{T} = \begin{bmatrix} -0,0788 & -0,8835 & 0,2898 & 0,3596 \\ -0,8335 & 0,2367 & 0,4993 & -0,0033 \\ 0,5001 & 0,0799 & 0,7947 & -0,3346 \\ -0,2215 & -0,3963 & -0,1876 & -0,8710 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k} = [2 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Soustava **Ad, Bd, Cd** je říditelná a pozorovatelná, tedy i systém **A, B, C** je říditelný a pozorovatelný, je v minimální realizaci! Můžeme provést kontrolu obrazových přenosů!

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} F_{11}(s) & F_{12}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}{s^4 + 4s^3 + 20s^2 + 10s + 0,199} & \frac{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}{s^4 + 4s^3 + 20s^2 + 10s + 0,199} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(s+2)(s+1,009)(s+0,991)}{(s+2)(s+1,009)(s+0,991)(s+0,09996)} & \frac{(s+2)(s+1,009)(s+0,991)}{(s+2)(s+1,009)(s+0,991)(s+0,09996)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+0,09996} & \frac{1}{s+0,09996} \end{bmatrix} \blacksquare$$

Příklad 4-6

Uvažujme soustavu s dvěma vstupy a dvěma výstupy z příklad 4-4, která je popsána maticemi **A, B, C**. Nalezněte minimální realizaci a jí odpovídající přenosovou matici!

Řešení:

Dekompozice je samozřejmě stejná jako v původním příkladě (příklad 4-4). Vybereme subsystém, který je říditelný a pozorovatelný (**Ac, Bc, Cc**). Minimální realizaci získáme tak, že z matic **Ad, Bd, Cd** vybereme příslušné matice, které reprezentují **minimální realizaci Ac, Bc, Cc**. Toto je možno realizovat posloupností příkazů

$$\| \mathbf{A}_c = \mathbf{A}_d(3:6, [3:6]); \mathbf{B}_c = \mathbf{B}_d(3:6, [1 \ 2]); \mathbf{C}_c = \mathbf{C}_d(:, [3:6]);$$

Přenosovou matici získáme nejlépe příkazem „zpk“ ve tvaru nul a pólů.

$$\| \mathbf{S}_c = \text{ss}(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c, \mathbf{D}); \mathbf{G}_c = \text{tf}(\mathbf{S}_c); \mathbf{G}_c_zpk = \text{zpk}(\mathbf{G}_c);$$

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} F_{11}(s) & F_{12}(s) \\ F_{21}(s) & F_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2(s+2)(s+0,5)^2}{(s+2)(s+1)(s+0,5)^2} & \frac{(s+1)(s+0,5)^2}{(s+2)(s+1)(s+0,5)^2} \\ \frac{(s+2)(s+1)}{(s+2)(s+1)(s+0,5)^2} & \frac{0,5(s+2)(s+1)}{(s+2)(s+1)(s+0,5)^2} \end{bmatrix}$$

Je zřejmé, že je možné ještě krácení. To je možné provést i přímo v Matlabu

$$\| Gc_zpk = \text{minreal}(zpk(Gc));$$

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} F_{11}(s) & F_{12}(s) \\ F_{21}(s) & F_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{(s+1)} & \frac{1}{(s+2)} \\ \frac{1}{(s+0,5)^2} & \frac{0,5}{(s+0,5)^2} \end{bmatrix} \blacksquare$$

Z těchto přenosů je vidět, že i po Kalmanově dekompozici jsou některé kořenové činitele čitatele a jmenovatele hodně blízké. Jak tedy přistoupit k rozhodování o krácení kořenových činitelů, které souvisí s říditelností a s hodnotami matice říditelnosti a pozorovatelnosti? Řešení se opírá o speciální rozklad matice říditelnosti, která je v literatuře označována jako SVD faktorizace. Tento rozklad bude níže popsán.

4.4.4 SVD faktorizace

SVD faktorizace je pouze definována. Vysvětlení matic komplexní, sdružená, Hermitovská unitární následuje v dalším textu.

Každou komplexní matici \mathbf{A} rozměru $[l \times m]$ je možno rozložit na součin matic

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^H \quad (4.17)$$

kde jsou \mathbf{U} , \mathbf{V} unitární matice rozměru $[l \times l]$, $[m \times m]$ a matice $\mathbf{\Sigma}$ je diagonální matice rozměru $[l \times m]$, která obsahuje diagonální matici $\mathbf{\Sigma}_1$ kladných reálných singulárních čísel σ_i , které jsou seřazeny sestupně. Platí

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ pro } l \geq m, \text{ nebo } \mathbf{\Sigma} = [\mathbf{\Sigma}_1 \ 0] \text{ pro } l \leq m \quad (4.18)$$

kde $\mathbf{\Sigma}_1 = \text{diag} \{ \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \}$; $n = \min(l, m)$ a $\bar{\sigma} \equiv \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \equiv \underline{\sigma}$

Singulární čísla jsou kladné odmocniny z n vlastních čísel matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^H$ a $\mathbf{A}^H \cdot \mathbf{A}$. Počet vlastních čísel je roven $n = \min(l, m)$. Vztah mezi singulárními čísly a vlastními čísly matice \mathbf{A} je možno zapsat následovně

$$\sigma_i(\mathbf{A}) = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{A}^H \cdot \mathbf{A})} = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^H)} \quad (4.19)$$

Poznámka:

- Komplexní čtvercová matice, sdružená komplexní matice, transponovaná matice k matici \mathbf{A} s komplexními čísly.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3+4i & -5i \\ -7 & 6-2i \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 3-4i & 5i \\ -7 & 6+2i \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{A}}^T = \begin{bmatrix} 3-4i & -7 \\ 5i & 6+2i \end{bmatrix}$$

- Hermitovská matice splňuje rovnici

$$\mathbf{A}^H = \bar{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -5i \\ 5i & 6 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 5i \\ -5i & 6 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{A}}^T = \begin{bmatrix} 3 & -5i \\ 5i & 6 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^H$$

- Unitární matice splňuje rovnici

$$\mathbf{U}^H = \bar{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}^{-1} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2i & 1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} & 1/2i \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -1/2i & 1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} & -1/2i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{A}}^T = \begin{bmatrix} 1/2i & 1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} & 1/2i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/2i & 1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} & -1/2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Výsledkem rozkladu je kromě jiného diagonální matice, která obsahuje na diagonále singulární čísla. Je možno ukázat, že hodnota matice je dána počtem nenulových čísel singulárních čísel matice řiditelnosti. Tato skutečnost umožňuje definovat toleranční pole nulových singulárních čísel, které umožní s předem danou přesností určit, která singulární čísla můžeme v dané toleranci pokládat za nulová.

Příklad 4-7

Aplikujte techniku SVD rozkladu na matice řiditelnosti, pozorovatelnosti a součinu **Ob.Co** z příklad 4-5.

Řešení:

Využijme možností MATLABu a následující sekvence příkazů

```
Co = ctrb(A, B);
SCo = svd(ctrb(A, B))
Ob = obsv(A, C);
SOB = svd(obsv(A, C))
SOBCo = svd(obsv(A, C) * ctrb(A, B))
```

Výsledkem jsou matice

$$\mathbf{SCo} = [2,1210 \quad 1,2338 \quad 0,0007 \quad 0,0001]$$

$$\mathbf{SOB} = [4,8097 \quad 1,0047 \quad 0,0000 \quad 0,0000]$$

$$\mathbf{SOBCo} = [1,4285 \quad 0,0028 \quad 0,0000 \quad 0,0000]$$

Z výsledků je zřejmé (prvek v matici **SOBCo**, který je větší než ostatní), že **pouze jeden mód** je řiditelný a pozorovatelný zároveň. ■

4.5 Redukce řádu modelu

4.5.1 Redukce řádu obrazového přenosu

Při identifikaci SISO soustavy na základě měření, odhadujeme strukturu a stupně polynomů čitatele a jmenovatele, tedy řád soustavy. Lehce může nastat situace, že výsledkem je řád soustavy, který je vyšší než řád minimální realizace. Přejdeme-li pak ke stavovému popisu, zjistíme, že systém má neřiditelné a nepozorovatelné módy a tyto je třeba z popisu odstranit.

Modely jsou sestaveny vždy s určitou přesností. V principu můžeme do neřiditelných/nepozorovatelných módů zahrnout módy s malým vlivem, neboť jejich časová měřítka jsou mimo námi sledované časové úseky.

Pro mnohé aplikace je možno pracovat se zjednodušenými/redukovanými modely, které se mohou lišit vůči původnímu modelu, protože některé nevýznamné vlastnosti jsou potlačeny nebo zcela zanedbány.

Základní kroky a postup bude ukázán na následujícím příkladě. Ukážeme redukci řádu „ručně“ a s použitím softwarových prostředků MATLABu.

Příklad 4-8

Uvažujme přenos systému s jedním vstupem a jedním výstupem (SISO)

$$F(s) = \frac{1}{(s+0,01)(s+0,2)(s+5)}. \text{ Proved'te součinnový a součtový rozklad a redukci řádu.}$$

Řešení:

a) součinnový rozklad

$$F(s) = \frac{1}{(s+0,01)(s+0,2)(s+5)} = \frac{1}{(s+0,01)} \cdot \frac{1}{(s+0,2)} \cdot \frac{1}{(s+5)} = \frac{100}{(100s+1)} \cdot \frac{5}{(5s+1)} \cdot \frac{0,2}{(0,2s+1)}$$

Ze součinnového rozkladu je vidět, že faktor $\frac{0,2}{0,2s+1}$ představuje mód, který ve srovnání se zbývajících módů je velmi rychlý, takže jeho dynamiku je možno zanedbat a uvažovat pouze ustálený stav, pro který platí $\frac{0,2}{0,2s+1} \approx 0,2$. Redukovaný model pak tvoří zbytek

(rezidualizace)

$$F(s) = \frac{1}{(s+0,01)} \cdot \frac{1}{(s+0,2)} = \frac{100}{(100s+1)} \cdot \frac{5}{(5s+1)} \cdot 0,2 = \frac{100}{(100s+1)(5s+1)}$$

b) součtový rozklad

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{(s+0,01)(s+0,2)(s+5)} = \frac{1,0547}{(s+0,01)} - \frac{1,0965}{(s+0,2)} + \frac{0,0418}{(s+5)} = \\ &= \frac{105,4741}{(100s+1)} - \frac{5,4825}{(5s+1)} + \frac{0,0084}{(0,2s+1)} \end{aligned}$$

Ze součtového rozkladu je vidět, že zesílení třetího členu je ve srovnání s ostatními členy malé, takže platí $\frac{0,0418}{s+5} = \frac{0,0084}{0,2s+1} \approx 0$. Redukovaný přenos je pak roven

$$F(s) = \frac{1,0547}{(s+0,01)} - \frac{1,0965}{(s+0,2)} = \frac{105,4741}{(100s+1)} - \frac{5,4825}{(5s+1)} = \frac{-0,0417s+0,2}{(s+0,01)(s+0,2)} = \frac{-20,88s+100}{(100s+1)(5s+1)} \blacksquare$$

Vysvětlíme si redukci modelu založenou na

- časové dekompozici, která ze stavového vektoru umožňuje eliminovat pomalé módy a
- nalezení a eliminaci módů, které jsou špatně říditelné nebo dosažitelné.

4.5.2 Časová dekompozice

Předpokládejme, že módy systému lze rozdělit na rychlé a pomalé, které již jsou mimo sledovaný časový horizont. Základní myšlenka se opírá o dekompozici stavového vektoru systému do dvou částí. Část stavového vektoru označena jako \mathbf{x}_2 bude reprezentovat pomalé módy. Takže platí

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} &\rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} &\rightarrow \mathbf{y} = [\mathbf{C}_1 \ \mathbf{C}_2] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Jestliže položíme-li $\dot{\mathbf{x}}_2 \rightarrow \mathbf{0}$, pak platí

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{0} &\rightarrow \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{u} = \mathbf{0} \\ &\mathbf{x}_2 = -\mathbf{A}_{22}^{-1}(\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Využitím vypočteného vektoru \mathbf{x}_2 dostaneme

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = [\mathbf{A}_{11} \ \mathbf{A}_{12}] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1}(\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{u}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} \quad (4.24)$$

Úpravou dostaneme již stavovou rovnici pro redukovaný řád soustavy

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}(\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{u}) + \mathbf{B}_1\mathbf{u} = \\ &= (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}) \cdot \mathbf{x}_1 + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Tento postup se v literatuře označuje jako „**truncation**“ – **zanedbání**.

4.5.3 Nalezení a eliminaci módů, které jsou špatně říditelné nebo dosažitelné

Další způsob vyhledání a eliminaci módů umožňuje metoda „vyvážené redukce“ (Balanced reduction). Tento postup pracuje s jinou formou matice říditelnosti a pozorovatelnosti. Využívá Gramianovu formu říditelnosti (*controllability Gramian*), která má lepší numerické vlastnosti. Gramianovy matice říditelnosti \mathbf{W}_C a pozorovatelnosti \mathbf{W}_O jsou definovány následujícím způsobem.

$$\mathbf{W}_C = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}\tau} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T \cdot e^{\mathbf{A}^T \cdot \tau} d\tau \quad (4.26)$$

$$\mathbf{W}_O = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}\tau} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T \cdot e^{\mathbf{A}^T \cdot \tau} d\tau \quad (4.27)$$

Podmínku říditelnosti je pak možno zformulovat do následujícího tvaru.

LTI systém, který je určen maticemi (A, B, C) je říditelný tehdy a jen tehdy, má-li matice \mathbf{W}_C hodnotu n . Pak Gramianova matice říditelnosti je pozitivně definitní, a může se určit z Ljapunovi rovnosti (4.28).

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{W}_C + \mathbf{W}_C \cdot \mathbf{A}^T = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T \quad (4.28)$$

Princip vyvážené redukce řádu (*balanced reduction*) spočívá v nalezení Gramianovy matice říditelnosti a pozorovatelnosti a následně transformací Gramianových maticí na diagonální Gramianovy matice. Pro LTI systém, který je určen maticemi (A, B, C), je možno určit Gramianovy matice říditelnosti \mathbf{W}_C a pozorovatelnosti \mathbf{W}_O . Za předpokladu, že existuje matice \mathbf{T} , se provede transformace souřadnic $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ a získáme transformovaný model ve tvaru

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}; \quad \mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} \quad (4.29)$$

Gramianovi matice říditelnosti a pozorovatelnosti jsou transformovány do tvarů

$$\bar{\mathbf{W}}_c = \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}_c \cdot \mathbf{T}^T, \quad \bar{\mathbf{W}}_o = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{W}_o \cdot \mathbf{T}^{-1} \rightarrow \bar{\mathbf{W}}_c = \bar{\mathbf{W}}_o = \text{diag}(g) \quad (4.30)$$

Výsledkem těchto transformací jsou diagonální matice jednotlivých módů. Následuje eliminaci těch módů, které jsou špatně říditelné a pozorovatelné. Pro praktické redukce modelů bude využívána softwarová podpora MATLABu funkcemi `balreal` a `modred`.

4.5.4 SW podpora MATLABu – funkce `balreal`

Funkce `balreal` vypočítá z LTI modelu vyváženou stavovou realizaci (balanced realization). Tato funkce vypočítá ze stabilní části LTI modelu vyváženou stabilní realizaci `sysb`. Výsledkem jsou na vektoru `g` prvky diagonální matice Gramianu říditelnosti a pozorovatelnosti. Malá čísla indikují stavy, které je možno vyloučit a redukovat řád systému.

Tab. 4-5: Syntaxe funkce `balreal`

```
[sysb, g] = balreal(sys)
```

4.5.5 SW podpora MATLABu – funkce `modred`

Funkce `modred` provede redukci řádu modelu `sysb` (z funkce `balreal`). Tato funkce redukuje řád spojitého nebo diskrétního systému `sys`. Navazuje na funkci `balreal` dle vzoru. Stavový vektor `x` je rozdělen na `x1` a `x2` viz (4.22). Vektor `x2` je třeba vyloučit, a redukováný vektor položit roven `xr = x1 + T · x2`. Matice `T` se volí tak, aby ustálené stavy redukováného modelu odpovídaly ustáleným stavům modelu před redukcí. Redukovaný model je uložen do výstupní proměnné `rsys`. Vektor `elim` obsahuje informace, které módy je třeba eliminovat. Tato funkce volí pomocí parametru `'method'` metodu eliminace. Je možno zadat dva řetězce: `'MatchDC'` metoda srovnávající statická zesílení modelu a modelu redukováného řádu.

`'Truncate'` jednoduchý výmaz `x2` a dosazení `xr = x1`

Tab. 4-6: Syntaxe funkce `modred`

```
[sysb, g] = balreal(sys)
elim = (g < 1e-6)
rsys = modred(sysb, elim)
```

Příklad 4-9

Pro systém $F(s) = \frac{s+1,1}{(s+0,981)(s+0,5)(s+1,5)}$ (*sl*) proveďte redukci řádu (*rs*).

Porovnejte s případem, kdy provedete vykrácení přibližně stejných pólů a nul (*sh*)!

Řešení:

```
A1 = [1 0.981]; A2 = [1 0.5]; A3 = [1 1.5]; B1 = [1 1.1];
a = conv(A3, A2);
a = conv(a, A1);
s1 = tf(B1, a)
zsl = zpk(s1)

[sysb, g] = balreal(s1)
elim = (g < 0.001)
rs = modred(sysb, elim)
trs = tf(rs)
zrs = zpk(rs)
sh = tf(1.125, a)
step(sh, sl, sysb, trs)
```

Výstup:

```

Transfer function:
      s + 1.1
-----
s^3 + 2.981 s^2 + 2.712 s + 0.7358

Zero/pole/gain:
      (s+1.1)
-----
(s+1.5) (s+0.981) (s+0.5)

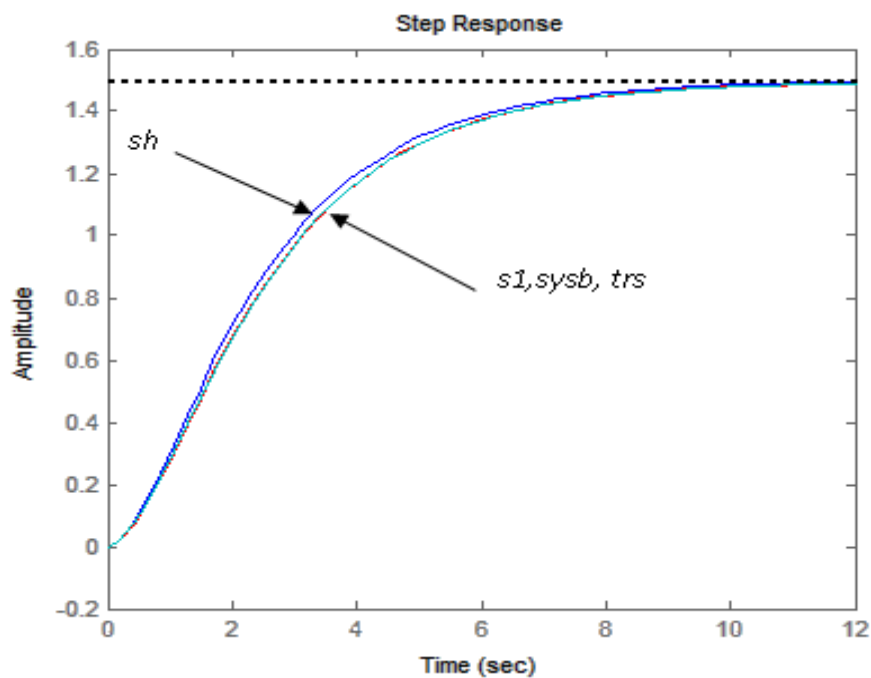
Continuous-time model.

Transfer function:
-0.001653 s^2 + 0.01094 s + 0.9642
-----
      s^2 + 1.799 s + 0.6449

Zero/pole/gain:
-0.0016526 (s-27.69) (s+21.07)
-----
      (s+0.4944) (s+1.305)

Transfer function:
      1.125
-----
s^2 + 2 s + 0.75

```



Obr. 4-6: Porovnání reakcí na jednotkový skok pro jednotlivé přenosy

■

Příklad 4-10

Uvažujme soustavu s dvěma vstupy a výstupy jako v příklad 4-4, která je popsána maticemi **A**, **B**, **C**. Proveďte redukci řádu modelu a určete odpovídající přenosovou matici!

Řešení:

Redukci řádu provedeme v prostředí MATLABu. Použijeme příkazu „**balreal**“, zvolíme přesnost $g < 0,01$ a následně použijeme příkaz „**modred**“.

```
FS1 = ss(A, B, C, D);
[sysb, g] = balreal(FS1);
```

Výstup:

$$\text{sysb.A} = \begin{bmatrix} -0,2113 & -0,5393 & -0,0289 & -0,0914 & -0,0279 & 0,1585 \\ 0,1271 & -1,0320 & -0,3022 & -0,2684 & -0,1698 & 0,6606 \\ -0,1133 & 0,4378 & -0,4532 & 1,0290 & -0,7604 & 0,4433 \\ -0,1463 & -0,5411 & -0,5068 & -2,3030 & 2,2470 & 1,0110 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,8392 & -0,2253 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5107 & -0,1608 \end{bmatrix},$$

$$\text{sysb.B} = \begin{bmatrix} -0,6852 & -0,8457 \\ -1,0590 & 0,7562 \\ 0,0119 & -0,3909 \\ -0,4964 & -0,0886 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{sysb.C} = \begin{bmatrix} -0,9884 & -1,2350 & -0,2428 & -0,0355 & -0,1993 & 0,4116 \\ -0,4557 & -0,4101 & 0,3066 & -0,5030 & 0,2606 & 0,0820 \end{bmatrix}, \text{sysb.D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 2,8032 \\ 0,8204 \\ 0,1687 \\ 0,0552 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \end{bmatrix}$$

Transformace pomocí funkce „**balreal**“ nevykazuje zatím přímé snížení řádu. Vektor \mathbf{g} však jasně indikuje, že minimálně dva poslední módy jsou nevýznamné a bude možno provést redukci řádu. Implementujme funkci „**modred**“.

```
elim = (g < 0.01)
rs = modred(sysb, elim)
```

$$\text{rs.A} = \begin{bmatrix} -0,2113 & -0,5393 & -0,0289 & -0,0914 \\ 0,1271 & -1,0320 & -0,3022 & -0,2684 \\ -0,1133 & 0,4378 & -0,4532 & 1,0290 \\ -0,1463 & -0,5411 & -0,5068 & -2,3030 \end{bmatrix}, \text{rs.B} = \begin{bmatrix} -0,6852 & -0,8457 \\ -1,0590 & 0,7562 \\ 0,0119 & -0,3909 \\ -0,4964 & -0,0886 \end{bmatrix},$$

$$\text{rs.C} = \begin{bmatrix} -0,9884 & -1,2350 & -0,2428 & -0,0355 \\ -0,4557 & -0,4101 & 0,3066 & -0,5030 \end{bmatrix}, \text{rs.D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Výsledkem funkce „**modred**“ je redukce řádu ze 6 na 4. Přenosovou matici redukováného řádu je možné zjistit příkazem **zpk**. Pro nalezení minimální realizace je vhodné využít příkazů **minreal**.

```
rs_min = minreal(zpk(rs))
```

Výsledek:

```
Zero/pole/gain from input 1 to output...
```

```
      2  
#1:  -----  
      (s+1)
```

```
      1  
#2:  -----  
      (s+2)
```

```
Zero/pole/gain from input 2 to output...
```

```
  2.9291e-015 (s^2 - 3.869s + 3.414e014)  
#1:  -----  
                        (s+0.5)^2
```

```
  8.4128e-017 (s^2 - 33.34s + 5.943e015)  
#2:  -----  
                        (s+0.5)^2
```

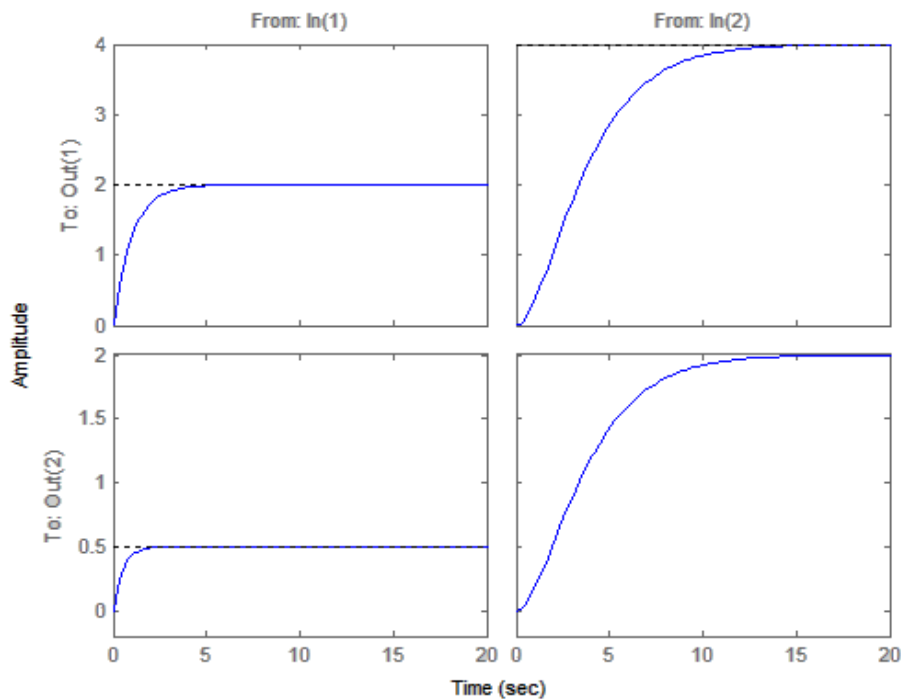
Je zřejmé, že je možné ještě další krácení. Numerická nepřesnost výpočtů zanesla do přenosů od druhého vstupu chybu. Přenosy od druhého vstupu lze tedy zkrátit do výsledné podoby:

```
Zero/pole/gain from input 2 to output...
```

```
      1  
#1:  -----  
      (s+0.5)^2
```

```
      0.5  
#2:  -----  
      (s+0.5)^2
```

Přechodové funkce původního a minimalizovaného systému jsou na obr. 4-7.



Obr. 4-7: Graf odezvy systému na jednotkový skok – přechodové funkce

4.6 Normování vstupních a výstupních signálů

Při analýze vlastností modelů reálných soustav (SVD rozklad, redukce řádu, atd) je zpravidla nutné provést normování vstupních a výstupních signálů. Cílem normalizace je, aby vstupy a výstupy si byly přibližně rovny a zároveň ležely v intervalu $(-1, +1)$. Normovaný výstup je roven

$$\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{S}_o \cdot \mathbf{y}(t) \rightarrow \mathbf{Y}^*(s) = \mathbf{S}_o \cdot \mathbf{Y}(s) \quad (4.31)$$

kde \mathbf{S}_o je diagonální matice přepočítávacích koeficientů výstupních signálů.

Podobně pro normovaný vstup platí

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{u}(t) \rightarrow \mathbf{U}^*(s) = \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{U}(s) \quad (4.32)$$

kde \mathbf{S}_i je diagonální matice přepočítávacích koeficientů vstupních signálů.

Protože platí relace, je normovaný výstup roven

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{F}(s) \cdot \mathbf{U}(s) \rightarrow \mathbf{Y}^*(s) = \mathbf{S}_o \cdot \mathbf{F}(s) \cdot \mathbf{U}(s) \quad (4.33)$$

Podobně vyjádříme normovaný vstup a celkový normovaný vektor výstupu je roven

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{S}_i^{-1} \cdot \mathbf{U}^*(s) \rightarrow \mathbf{Y}^*(s) = \mathbf{S}_o \cdot \mathbf{F}(s) \cdot \mathbf{S}_i^{-1} \cdot \mathbf{U}^*(s) = \mathbf{F}^*(s) \cdot \mathbf{U}^*(s) \quad (4.34)$$

Normovaná přenosová matice se spočítá podle rovnice

$$\mathbf{F}^*(s) = \mathbf{S}_o \cdot \mathbf{F}(s) \cdot \mathbf{S}_i^{-1} \quad (4.35)$$

Literatura

- [1] Albertos, P., Sala, A.: *Multivariable Control Systems*. Springer Verlag, 2004. Str. 65-95.
- [2] Ljung, L.: *System Identification Toolbox. User's Guide*. The MathWorks, Inc. 2005.
- [3] Ljung, L.: *System Identification - Theory for the User*. Prentice Hall. 2001.
- [4] Söderström, T., Stoica, P.: *System Identification*. Prentice Hall International, London, 1989.
- [5] Lagarias, J. C., Reeds J. A., Wright M. H., Wright P. E. Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions. *SIAM Journal of Optimization*, Vol. 9, Number 1, str. 112–147, 1998.

Poděkování: Tento text vznikl za podpory projektu ESF CZ.1.07/2.2.00/07.0247

Reflexe požadavků průmyslu na výuku v oblasti automatického řízení a měření.

Formát zpracování originálu: titulní list barevně, další listy včetně příloh barevně.