TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Hálkova 6, 461 17 Liberec 1, CZ

Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií

Teorie automatického řízení I.

SYNTÉZA REGULAČNÍCH OBVODŮ

Studijní materiály

Doc. Ing. Osvald Modrlák, CSc.

Katedra řídicí techniky

Obsah

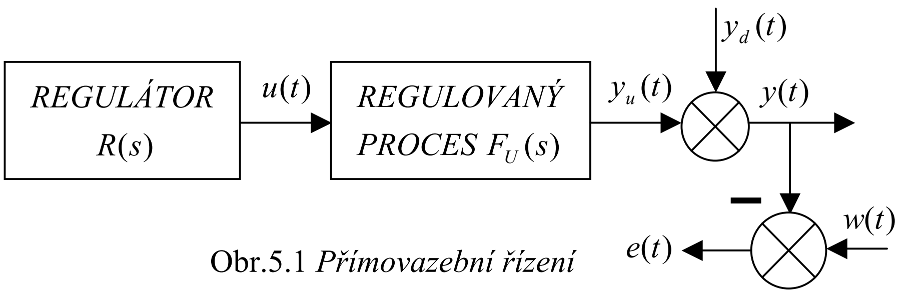
5. SYNTÉZA REGULAČNÍCH OBVODŮ

Cílem řízení a regulace je

1. Zajištění stability
2. Kompenzace vlivů poruchových veličin. Na dynamický systém působí často celá řada poruchových veličin, jejichž vliv je zpravidla nežádoucí. Cíl řízení a regulace pak spočívá v kompenzaci účinků těchto poruchových veličin.
3. Dosažení požadovaných dynamických vlastností obvodu a hodnot regulované veličiny

Řízení systémů je možno realizovat jako přímovazební řízení (ovládání) nebo zpětnovazební řízení (regulaci).

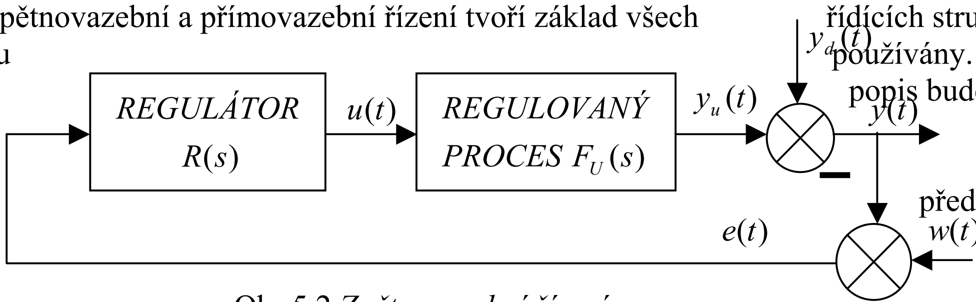
a) Přímovazební řízení (ovládání), při kterém přímovazební regulátor generuje akční veličiny *u(t)* je na obr. 5.1. Při tomto způsobu řízení se nevyužívají zpětně informace (regulační odchylky $e(t) = w(t) - y(t)$) o účinku řízení a vlivu poruch $y_d(t)$ na výstup řízené (ovládané) soustavy $y(t)$. Není tedy možno kompensovat vliv poruchové veličiny $y_d(t)$. Typickým příkladem je automatická pračka.



Obr.5.1 *Přímovazební řízení*

b) Zpětnovazební řízení na rozdíl od přímovazebního řízení viz obr.5.2 využívá informaci o účinku řízení a poruch na výstupu regulované soustavy. Tyto informace jsou obsaženy v regulační odchylce, která je vstupem do regulátoru. Řazení regulátoru a regulovaného procesu ve struktuře na obr.5.2 se označuje jako ***sériová kompenzace*** (*Series copensation*).

Zpětnovazební a přímovazební řízení tvoří základ všech řídících struktur, které jsou používány. Jejich základní popis bude předmětem dalšího výkladu.



Obr.5.2 *Zpětnovazební řízení*

5.1 STRUKTURA ZPĚTNOVAZEBNÍCH REGULAČNÍCH OBVODŮ

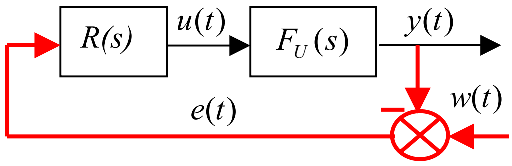
Struktura zpětnovazebních regulačních obvodů vychází ze základní struktury zpětnovazebního řízení. Je však často modifikována v závislosti na požadovaných vlastnostech obvodu a vstupujících poruchových veličinách. Má-li splňovat více požadavků, kombinuje se i s přímovazebním řízením.

vlastnostech obvodu a vstupujících poruchových veličinách. Má-li splňovat více požadavků, kombinuje se i s přímovazebním řízením.

5.1.1 Zpětnovazební obvod s jedním stupněm volnosti-jednoduchý regulační obvod

V technické praxi se používá několik modifikací jednoduchého uzavřeného obvodu v závislosti na působících poruchách.

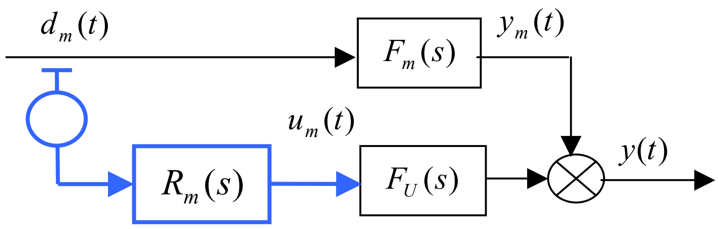
1) Označíme přenos regulátoru $R(s)$ a aproximujeme-li dynamické účinky akční veličiny $u(t)$ vzhledem k regulované veličině $y(t)$ obrazovým přenosem $F_u(s)$, pak za předpokladu, že na tento systém nepůsobí poruchové veličiny a je hlavním cílem regulátoru $R(s)$ zajistit, aby regulovaná veličina $y(t)$ co nejvěrněji sledovala řídící (referenční) veličinu $w(t)$, hovoříme pak o problému sledování (*Tracking Problem)*. Tento regulační obvod se nazývá servomechanismem viz obr. 5.1.1.



Obr.5.1.1 *Servomechanismus*

Poruchové veličiny z hlediska získávání informací dělíme na měřitelné a neměřitelné. Vyrovnání vlivu poruch (*Disturbance Rejection*) je často hlavním úkolem regulace. Struktura obvodu pro kompenzaci poruch závisí na tom, zda je poruchová veličina měřitelná či neměřitelná.

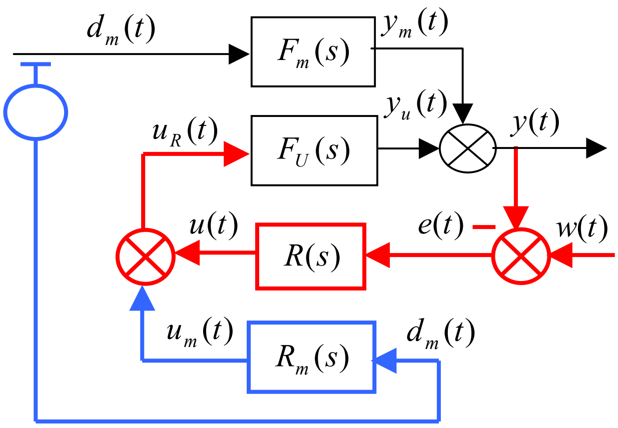
2a) Budeme-li uvažovat pouze měřenou poruchovou veličinu $d_m(t)$, pak její dynamický účinek na regulovanou veličinu je aproximován obrazovým přenosem $F_m(s)$. Pro kompenzaci této poruchy se může použít dopředný regulátor s přenosem $R_m(s)$ viz obr.5.1.2.



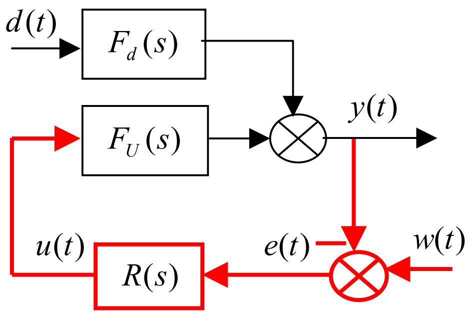
Obr.5.1.2 *Kompenzace měřené poruchy přímovazebním regulátorem $R_m(s)$*

2b) Budeme-li uvažovat servomechanismus s měřenou poruchovou veličinu $d_m(t)$, vyrovnání měřené poruchy může zajistit dopředný regulátor $R_m(s)$ a regulátor ve zpětné vazbě $R(s)$ zajistí sledování referenční veličiny *w(t).*

Je možno konstatovat, že moderní regulátory mají zabudovaný speciální vstup, kam se zavádí měřená poruchová veličina $d_m(t)$. Jinými slovy, současná konstrukce moderních regulátorů umožňuje kompenzaci měřené poruchové veličiny, aniž by bylo nutno fyzicky zapojovat do schématu další regulátor. Přenosové vlastnosti takto vytvořeného regulátoru se zpravidla omezují na natavení vhodného zesílení.



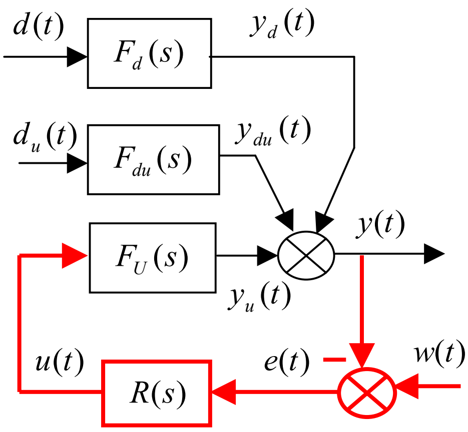
Obr.5.1.3 *Zpětnovazební regulační obvod pro sledování a kompenzaci měřené poruchy dopředným regulátorem*



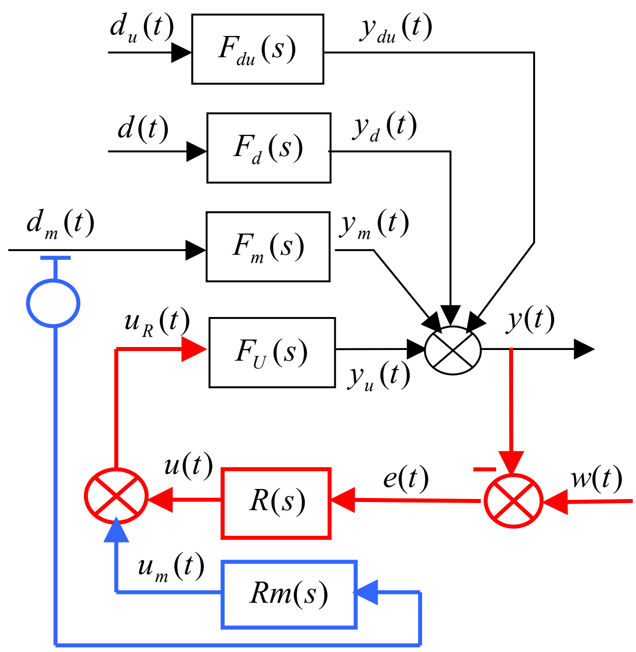
Obr.5.1.4 *Zpětnovazební regulace, regulovaný systém s neměřenou poruchovou veličinou d(t)*

3) Uvažujme regulovaný systém, na který působí neměřitelná porucha $d(t)$ a akční veličina $u(t)$. Obrazový přenos $F_d(s)$ aproximuje dynamický účinek poruchové veličiny $d(t)$ vzhledem k regulované veličině $y(t)$. Model zpětnovazebního obvodu pro vrovnání poruch (*Disturbance Rejection*) je na obr.5.1.4. Regulátor ve zpětné vazbě $R(s)$ nemůže optimálně vyrovnat jak vliv poruchové veličiny $d(t)$, tak požadované změny žádaných hodnot $w(t)$. Je možno dosáhnout pouze kompromisu v tom smyslu, že optimálně vyrovná vliv poruchové veličiny, pak sledování žádaných hodnot bude neoptimální, nebo optimálně realizuje sledování a vyrovnání poruch bude neoptimální, nebo je regulátor navržen tak, že optimálně vyrovná součet obou účinků (současný vstup poruchové i žádané hodnoty). Je-li třeba dosáhnout optimální vyrovnání obou požadavků, je nutno zvolit strukturu uzavřeného obvodu s vyšším stupněm volnosti.

4) Speciálním případem neměřené poruchy je porucha na akční veličině $d_u(t)$, jejíž dynamické účinky popisuje obrazový přenos $F_{du}(s) = F_u(s)$. Uvažujme regulační obvod



Obr.5.1.5 *Zpětnovazební regulace, regulovaný systém s neměřenými poruchovými veličinami d(t), $d_u(t)$*

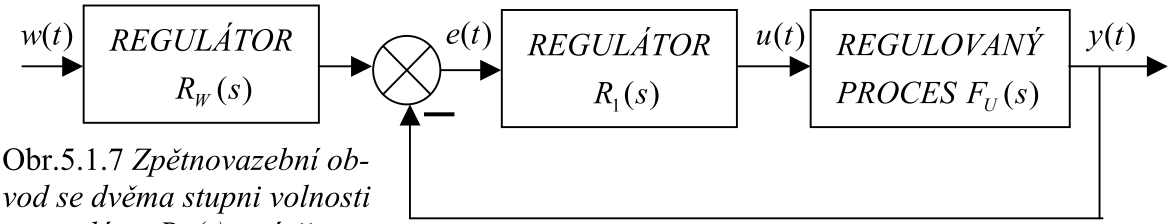


Obr.5.1.6 *Zpětnovazební systém s neměřenými poruchovými veličinami d(t), $d_u(t)$, $d_m(t)$ a referenční žádanou hodnotou w(t).*

s neměřenými poruchami $d_u(t)$, $d(t)$ a referenční žádanou hodnotu $w(t)$. Struktura regulačního obvodu je na obr.5.1.5. Regulátor s jed-ním stupněm volnosti může optimálně vyrovnat pouze jednu poruchovou veličinu nebo sledování referenční žádané hodnoty. Zbývající poruchové veličiny jsou vyrovná suboptimálně. Rozšíříme-li tento regulační obvod ještě o měřenou poruchovou veličinu $d_m(t)$, pak strukturu tohoto obvodu ukazuje obr.5.1.6. Má-li regulační obvod vyhovět podmínkám na kompenzaci neměřené poruchy i sledování výstupu podle referenčního signálu, nebo splnit více kriterií, pak je třeba volit strukturu regulačního obvodu s více stupni volnosti.

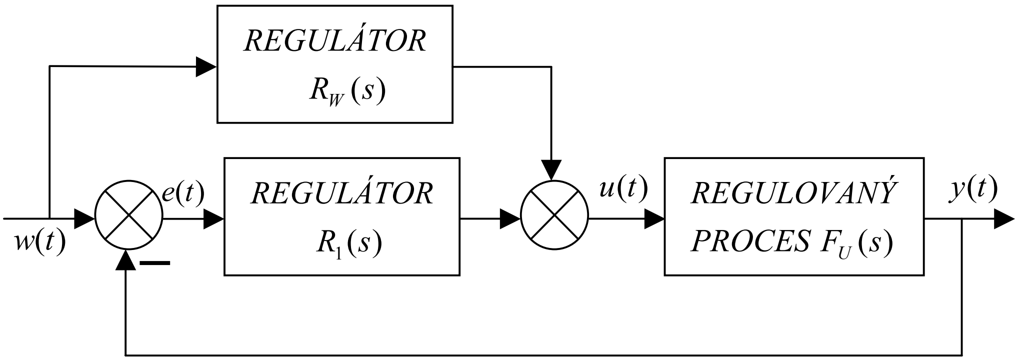
5.1.2 Zpětnovazební obvod s dvěma stupni volnosti

Struktury zpětnovazebních obvodů se dvěma stupni volnosti se existují v několika modifikacích. Na obr.5.1.7-8 jsou struktury, které se v anglosaské literatuře se označují jako „*Feedforward compensation*“. Na obr.5.1.7 je dopředný regulátor $R_w(s)$ je v sériovém zapo-



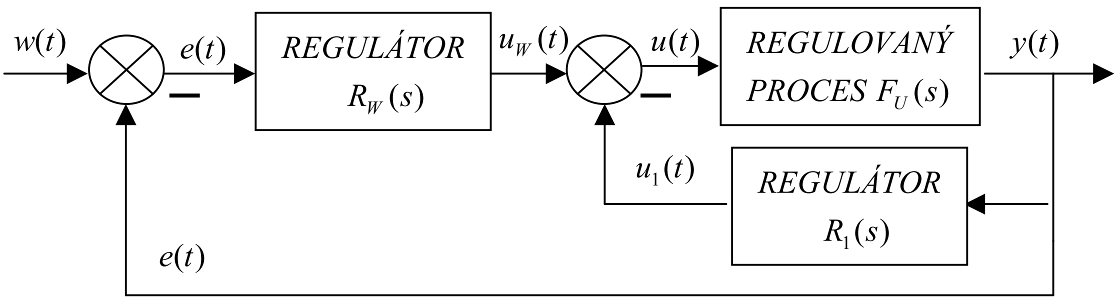
Obr.5.1.7 *Zpětnovazební obvod se dvěma stupni volnosti - regulátor $R_w(s)$ v sérii.*

jení ke zpětnovazební smyčce (*Forward compensation with series compesation)*. V regulační smyčce je regulátor $R_1(s)$ v sérii k regulované soustavě-procesu. Na obr.5.1.8 je regulační obvod s dvěma stupni volnosti (*Feedforward copenesation)*, který má dopředný regulátor $R_w(s)$ paralelně připojen k regulátoru $R_1(s)$. Základní výhodou těchto struktur je, že dopřed-



Obr.5.1.8 *Zpětnovazební obvod se dvěma stupni volnosti s paralelním regulátorem $R_w(s)$.*

ný regulátor $R_w(s)$ není v uzavřené smyčce a tedy neovlivňuje póly uzavřeného obvodu. Póly a nuly dopředného regulátoru je možno vybrat tak, aby jimi bylo možno krátit nuly nebo póly uzavřeného obvodu, který je v sériovém zapojení k dopřednému regulátoru $R_w(s)$.



Obr.5.1.9 *Sériově - zpětnovazební zapojení obvodu se dvěma stupni volnosti*

Na obr.5.1.9 je sériově – zpětnovazební zapojení se dvěma stupni volnosti (*Series-feedback compensation*), které používá sériového a zpětnovazebního regulátoru $R_w(s)$ a $R_1(s)$.

5.1.3 Obrazový přenos PID-regulátoru

Nejčastěji používaným regulátorem v uvedených regulačních schématech je regulátor typu PID (proprcionálně integračně derivační regulátor), jehož vstupem je regulační odchylka a výstup tvoří vážený součet z regulační odchylky, jejího integrálu a derivace. Obrazový přenos ústředního členu regulátoru – dále jen regulátoru, je možno vyjádřit ve tvaru

$$\boxed{R(s)=K_R\left[1+\frac{1}{T_I s}+T_D s\right]=r_0+\frac{r_1}{s}+r_2 s} \qquad (5.1-1)$$

kde je K_R … proporcionální zesílení všech složek regulátoru,
T_I … integrační časová konstanta,
T_D … derivační časová konstanta,
$r_0 = K_R$ … proporcionální zesílení,
$r_1 = K_R / T_I$ … proporcionální zesílení integrační složky,
$r_2 = K_R\, T_D$ … proporcionální zesílení derivační složky.

Obraz výstup z regulátoru je $\boxed{U(s)=R(s)E(s)}$, (5.1 – 2)

kde $E(s)$ je obraz regulační odchylky. Výstup regulátoru v čase je roven

$$\boxed{u(t)=K_R\left[e(t)+\frac{1}{T_I}\int_0^t e(\tau)d\tau+T_D\frac{de(t)}{dt}\right]+u(0)} \qquad (5.1-3)$$

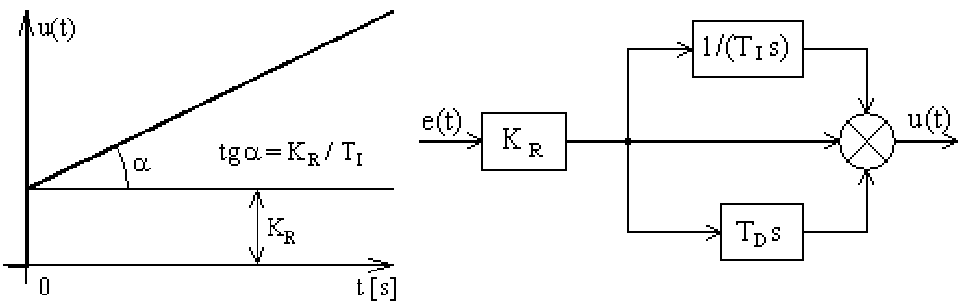
kde $u(0)$ je počáteční hodnota integrátoru v čase $t = 0$.

Z rovnice je zřejmé, že takto definovaný regulátor vyžaduje použití ideálního derivačního členu (derivační člen bez setrvačnosti). Ideální derivační člen generuje na výstupu z regulátoru Diracův impuls, vstoupí-li do derivačního členu jednotkový skok. Je zřejmé, že ideální regulátor s přenosem (I.1.3 – 1) je **fyzikálně nerealizovatelný**.

Přechodová funkce ideálního regulátoru, jehož obrazový přenos má tvar (5.1 – 5), je

$$\boxed{u(t)=K_R\left[1+\frac{1}{T_I}t\right]1(t)+K_R T_D\delta(t)} \qquad (5.1-4)$$

kde je $\eta(t)$ **jednotkový skok** a $\delta(t)$ je **Diracův impuls**. Přechodová charakteristika a struktura ideálního regulátoru je na obr. 5.1.10.



Obr. 5.1.10 *Přechodová charakteristika a struktura ideálního PID regulátoru*

Reálný regulátor obsahuje vždy zpožďovací členy. Uvažujeme-li zpoždění pouze na derivační složce, pak obrazový přenos regulátoru má tvar

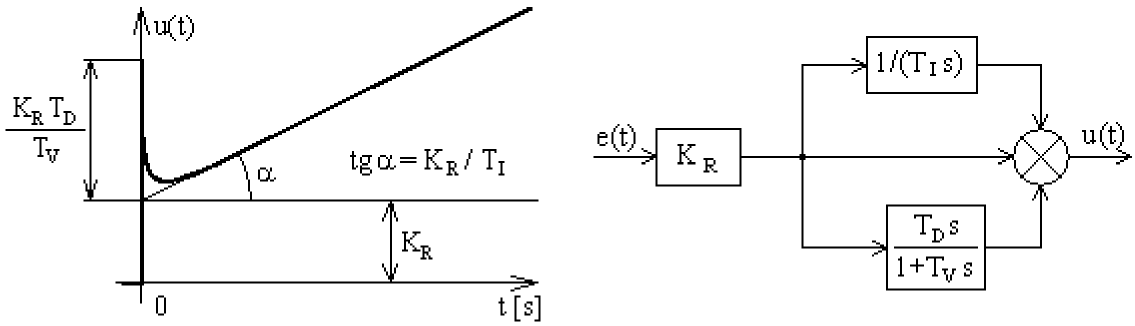
$$\boxed{R(s) = K_R\left[1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{1 + T_V s}\right]} \qquad (5.1-5)$$

kde T_V je časová konstanta zpožďovacího členu. Tato konstanta je dána konstrukcí regulátoru a není ji možno při seřizování regulátoru zpravidla nastavit.

Přechodová funkce reálného PID-regulátoru je

$$\boxed{h_R(t) = K\left[1 + \frac{1}{T_I}t + \frac{T_D}{T_V}\exp(-t/T_V)\right]\eta(t)} \qquad (5.1-6)$$

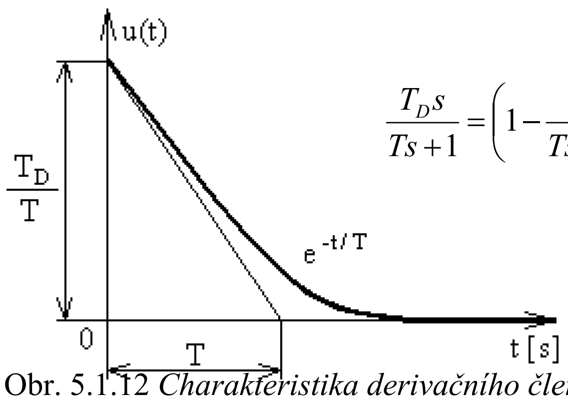
Přechodová charakteristika a struktura reálného regulátoru je na obr. 5.1 – 11.



Obr. 5.1.11 *Přechodová charakteristika a struktura reálného PID regulátoru*

Realizace derivačního členu se setrvačností

Derivační člen v (5.1 – 5) je možno aproximovat členem, který je dán rozdílem



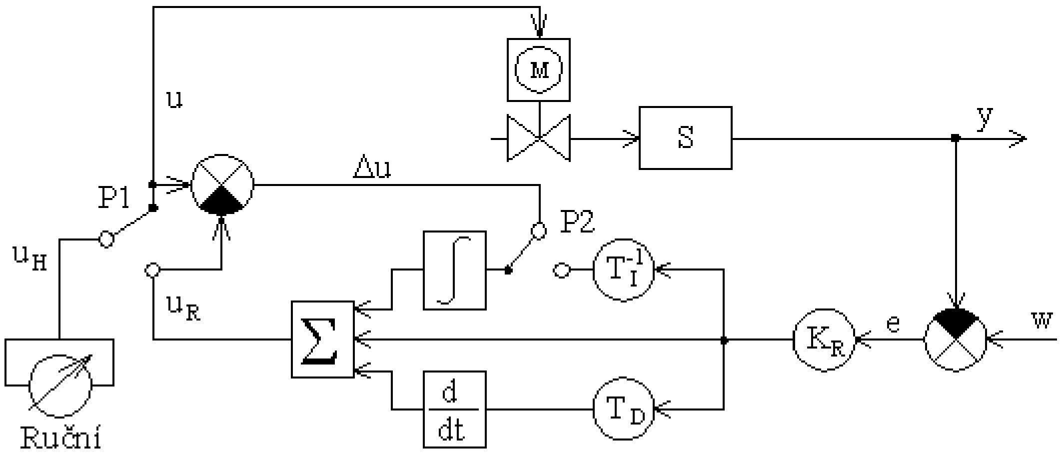
$$\frac{T_D s}{Ts+1} = \left(1 - \frac{1}{Ts+1}\right)K = \frac{Ts+1-1}{Ts+1}K = [KT = T_D] = \frac{T_D s}{Ts+1}. \quad (5.1\text{-}7)$$

$$\boxed{H_D = \frac{T_D s}{Ts+1}\frac{1}{s} = \frac{T_D}{Ts+1} = \frac{T_D/T}{s+1/T}} \qquad (5.1-8)$$

Obr. 5.1.12 *Charakteristika derivačního členu s parazitní časovou konstantou*

5.1.4 Beznárazové přepínání a nastavování PID regulátoru

V technické praxi se vyžaduje, aby akční veličinu *u(t)* bylo možno také měnit ručně. Kompaktní regulátoru pracuje ve dvou režimech: automatický a ruční. V automatickém režimu mění akční veličinu regulátor a v ručním režimu se mění akční veličina ručně pomocí ovladače viz obr. 5.1.13.



Obr. 5.1.13 *Beznárazové přepínání a nastavování PID regulátoru*

Schéma je opatřeno přepínači *P1* a *P2*. V ručním režimu *P1* spojuje výstup ovladače s akčním členem, *P2* spojí integrátor se výstupem z rozdílového členu. Rozdíl *Δu* mezi výstupem z ovladače a regulátoru vstupuje do integrátoru a integrátor mění výstup tak, aby *Δu = 0*.

5.3 KRITERIA JAKOSTI REGULACE

Na kvalitu regulačních pochodů se klade celá řada požadavků a omezení, které mohou býti často i protichůdné. Odvozují se od požadavků, které jsou kladeny na regulovaný systém.

V technické praxi se jakost regulace posuzuje zpravidla podle průběhu regulačních pochodů a využívá se nepřímých kriterií (poloha pólů, fázová bezpečnost atd.). Celá řada metod návrhu regulátorů je na tomto kriteriu založena (např. metoda optimálního modulu, frekvenční metody syntézy atd.). Na základě dlouhodobých zkušeností a experimentů, jejich vyhodnocování se pak formulovaly předpisy a vzorce pro seřízení regulátorů. Tyto metody budou také v dalším textu popsány a diskutovány.

Kvalitu regulačního pochodu je možno též vyjádřit kvantitativně vhodným matematickým kriteriem. U spojitých systémů se používá integrálních kriterií. Nejznámější jsou lineární a kvadratické integrály regulační odchylky. Zavedeme-li kriterium jakosti regulace, je možno úlohu optimálního seřízení regulátoru převést na optimalizační úlohu, jejíž řešení v současné době s vhodnou softwarovou podporou je možné, je-li znám matematický model regulované soustavy. Kriterium samo musí nejen kvantitativně popisovat regulační pochody ale musí také obsahovat vhodné parametry, pomocí kterých můžeme ovlivňovat charakter průběhu (dostatečné tlumení akční veličiny, tlumení regulační odchylky atd.). Proto budou integrální kriteria jakosti regulace v následující kapitole diskutována.

5.3.1 Integrální kriteria

Předpokládejme, že je dána:

a) struktura regulátoru (zpravidla regulátor typu PID),
b) matematický model regulované soustavy s poruchami (obrazové přenosy),
c) model regulační odchylky a akční veličiny na definovaný vstupní signál,

pak

1) ***Zobecněná kvadratická regulační plocha*** (*General integral square-error GISE*) má tvar

$$\boxed{J(r_0,r_1,r_2)=\int_0^\infty\{[e(t)-e(\infty)]^2+\kappa[u(t)-u(\infty)]^2\}dt},\qquad(5.3-1)$$

kde

e(t) … regulační odchylka,
e(∞) … ustálená hodnota regulační odchylky $\lim_{t\to\infty} e(t)=e(\infty)$,
u(t) … akční veličina,
u(∞) … ustálená hodnota akční veličiny $\lim_{t\to\infty} u(t)=u(\infty)$,
κ … váhový koeficient, jehož volbou se dosahuje požadovaného tlumení akční veličiny. Čím je větší, tím se dosahuje většího tlumení.
r_0, r_1, r_2 … parametry regulátoru, jehož výstup je $u(t)=r_0*e(t)+r_1*\int_0^t e(\tau)d\tau+r_2\frac{d}{dt}e(t)$.

2) ***Kvadratická regulační plocha*** *(Integral square-error ISE)*

Položíme-li ve (5.3 – 1) $\kappa=0$, pak dostaneme ***kvadratickou regulační plochu*** ve tvaru

$$J_2(r_0,r_1,r_2)=\int_0^\infty \bar{e}(t)^2 dt=\int_0^\infty [e(t)-e(\infty)]^2 dt, \qquad (5.3-2)$$

kde je $\bar{e}(t)=e(t)-e(\infty)$.

Charakteristika regulačních pochodů, je-li regulátor typu PID seřízen podle kvadratické regulační plochy, je taková, že amplituda regulační odchylky je malá, avšak kmitá a je málo tlumená. Tato vlastnost se projevuje již od řádu > 2.

3) Pro dosažení většího tlumení regulační odchylky je možno použít kriteria

$$J(r_0,r_1,r_2)=\int_0^\infty \{\bar{e}(t)^2+\kappa[\frac{de(t)}{dt}]^2\}dt=\int_0^\infty \{[e(t)-e(\infty)]^2+\kappa[\frac{de(t)}{dt}]^2\}dt, \qquad (5.3-3)$$

kde κ je váhový koeficient, jehož volbou se dosahuje požadovaného tlumení regulační odchylky a tedy i regulované veličiny.

4) ***Absolutní regulační plocha*** *(Integral absolute-error IAE)*

$$J_2(r_0,r_1,r_2)=\int_0^\infty |\bar{e}(t)|dt=\int_0^\infty |[e(t)-e(\infty)]|dt\,. \qquad (5.3-4a)$$

Toto kriterium poskytuje parametry regulátoru s velmi dobrými regulačními pochody, avšak její analytická optimalizace je velmi obtížná. V současné době je kriterium použitelné při numerické optimalizaci. Další modifikací tohoto kriteria je *(Integral of time multiplied absolute-error ITAE)*

$$J_2(r_0,r_1,r_2)=\int_0^\infty t*|\bar{e}(t)|dt=\int_0^\infty t*|[e(t)-e(\infty)]|dt. \qquad (5.3-4b)$$

5) K utlumení akční veličiny je možno použít kriteria ve tvaru

$$J(r_0,r_1,r_2)=\int_0^\infty \{\bar{e}(t)^2+\kappa[\frac{du(t)}{dt}]^2\}dt=\int_0^\infty \{[e(t)-e(\infty)]^2+\kappa[\frac{du(t)}{dt}]^2\}dt, \qquad (5.3-5)$$

kde $\frac{du(t)}{dt}=\dot{u}(t)$ je derivace akční veličiny.

5) Lineární regulační plocha

Má-li se dosáhnout aperiodických regulačních pochodů, používá se kriteria ***lineární regulační plochy*** ve tvaru

$$J(r_0,r_1,r_2)=\int_0^\infty \bar{e}(t)dt=\int_0^\infty [e(t)-e(\infty)]dt. \qquad (5.3-6)$$

5.3.2 Kriteria nepřímá-podle průběhu regulačního pochodu

Za nepřímá kriteria jakosti regulace možno považovat polohu pólů charakteristické rovnice, průběh amplitudové charakteristiky a rezonanční zvětšení amplitudy, fázovou a amplitudovou bezpečnost, pásmo propustnosti uzavřeného obvodu.

5.4 SYNTÉZA REGULÁTORU TYPU PID

Pro seřízení parametrů regulátoru typu PID se používá celá řada metod. Jsou známé metody seřízení podle integrálních kriterií a metody, které jsou založeny na nepřímých kritériích regulačního pochodu. Do této skupiny můžeme zahrnout metody seřízení parametrů PID regulátoru podle: optimálního modulu, absolutního a relativního tlumení, geometrického místa kořenů a seřízení parametrů pomocí frekvenčních charakteristik. Nejdříve se zaměříme na metody, které jsou založeny na integrálních kritériích jakosti regulace.

V kap. 5.3 byl uveden přehled integrálních kriterií jakosti regulace. Optimální seřízení PID regulátorů podle těchto kriterií bylo historicky prováděno analyticky a bylo velmi obtížné ne-li nemožné. Zvládnuto bylo seřízení podle minima kvadratické regulační plochy, ale jeho praktické využití v důsledků málo tlumených kmitů regulované veličiny bylo minimální. Ani zobecněné kvadratické kriterium nepřineslo vždy požadovaná zlepšení. Z těchto důvodů se seřízení podle těchto kriterií v praxi neprosadilo.

Současné hardwarové a softwarové vybavení (např. MATLAB) však umožňuje úlohu seřízení parametrů regulátoru dané struktury při zadaném kriteriu jakosti regulace převést na optimalizační úlohu statické optimalizace. Tyto přístupy pokládáme za významné především pro jejich praktické využití a z hlediska hlubšího pochopení celé problematiky pomocí experimentálních výpočtů. Proto se hned na začátku výkladu syntézy a optimálního seřízení parametrů PID regulátoru tímto přístupem budeme zabývat.

Později se však k analytickému výkladu seřízení PID regulátorů ještě vrátíme, protože tvoří základ syntézy regulátorů vyšších forem.

5.4.1 Seřízení parametrů regulátoru jako numerická optimalizační úloha

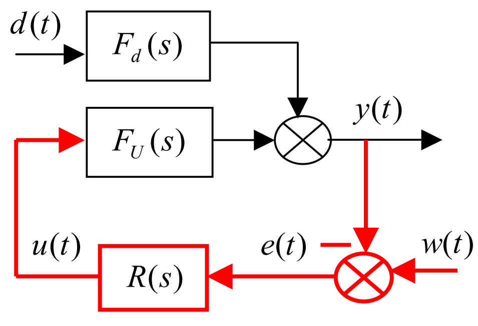
Uvažujme matematický model regulované soustavy dle obr. 5.4.1.

Do soustavy vstupuje poruchová veličina $d(t)$ a žádaná hodnota $w(t)$.

Přenos regulátoru je ve tvaru

$$R(s) = r_0 + \frac{r_1}{s} + \frac{r_2 s}{T_v s + 1},$$

kde je r_0 proporcionální zesílení,
r_1 integrační zesílení,
r_2 derivační zesílení,
T_v parazitní časová konstanta.



Obr.5.4.1 *Model regulované soustavy s neměřenou poruchovou veličinou d(t)*

Jako kritérium, nebo též účelovou funkci, můžeme podle (5.3 – 1) až (5.3 – 5) zvolit

$$1)\ J_z(r_0,r_1,r_2)=\int_0^{Tsim}\{\bar{e}(t)^2+\kappa[u(t)-u(\infty)]^2\}dt\longrightarrow MINIMUM\ , \qquad (5.4-1)$$

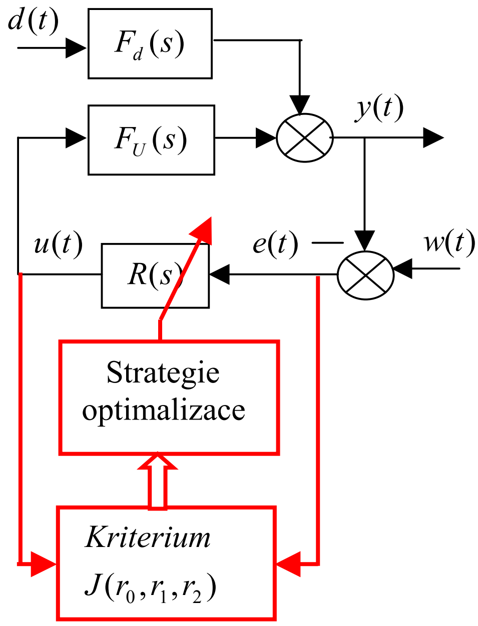
$$2)\ J(r_0,r_1,r_2)=\int_0^{Tsim}\{\bar{e}(t)^2+\kappa[\frac{de(t)}{dt}]^2\}dt\longrightarrow MINIMUM\ , \qquad (5.4-2)$$

$$3)\ J(r_0,r_1,r_2)=\int_0^{Tsim}\{\bar{e}(t)^2+\kappa[\frac{du(t)}{dt}]^2\}dt\longrightarrow MINIMUM\ , \qquad (5.4-3)$$

kde T_{sim} je zvolená doba simulace, ve které se vyhodnocuje podle zvoleného kriteria průběh regulačního pochodu. V současné době je možno pro vlastní optimalizaci použít softwarové podpory MATLABu a SIMULINKu. Ideové schéma je na obr. 5.4.2. Pro zadané buzení $w(t), d(t)$ je možno v SIMULINKu vytvořit simulační schéma regulačního obvodu ze známých obrazových přenosů $F_U(s), F_d(s), R(s)$. V bloku "*Kriterium* " je možno v SIMULINKu dále ještě vytvořit veličiny $\dot{e}$ *nebo* $\dot{u}$ a následně provést jejich kvadráty a integraci. Po zavedení váhy κ je možno dokončit výpočet kriteria $J(r_0,r_1,r_2)$ pro dané nastavení parametrů .

Pomocí funkce fminsearch se pak realizuje strategie optimalizace tak, aby bylo dosaženo podmínek (5.4 – 1, 2, 3). V SIMULINKu je možno kromě ideálního PID regulátoru použít také regulátor se zpožďovacím členem na derivační složce viz (5.1 – 5). Přenos regulátoru je pak roven

$$R(s)=r_0+\frac{r_1}{s}+\frac{r_2 s}{T_V s+1}=P+\frac{I}{s}+\frac{Ds}{Ns+1}\ .$$



Obr.5.4.2 *Optimalizace parametrů PID regulátoru*

5.4.2 Softwarová podpora pro řešení optimalizační úlohy seřízení PID regulátoru

Softwarovou podporu pro řešení optimálního seřizování parametrů regulátoru typu PID nabízí prostředí MATLABu. Regulovanou soustavu a kriterium je možno modelovat pomocí bloků v SIMULINKu. To ovšem vyžaduje spouštění simulace z programu. K tomu slouží funkce sim, kterou v následujícím v hlavních rysech popíšeme. Podrobnosti si může zájemce vyhledat v „helpu" nebo v literatuře [7].

Funkce sim **Spustí a provede simulační výpočet modelu v SIMULINKu.**

Syntaxe funkce

sim (‘model’,timespan,options,UT),
[t, x, y] = sim (‘model’,timespan,options,UT),

kde je **‘model’** … jméno programu v SIMULINKu
timespan … doba simulace
options … parametry simulace
UT … externí vstup
t … vektor, na kterém je uložen čas
x … matice nebo vektor, ve kterých je uložen stavový vektor
y … výstup modelu ve tvaru matice nebo struktury

sim (‘model’) provede simulační výpočet blokového schématu v SIMULINKu, jehož jméno je **‘model’**

sim (‘model’,timespan) provede simulační výpočet blokového schématu **‘model’** v SIMULINKu. Doba simulace bude **timespan.**

[t, x] = sim (‘model’,timespan) … provede simulační výpočet blokového schématu **‘model’** v SIMULINKu. Doba simulace bude **timespan**. Na vektoru **t** je uložen čas, v matici **x** je uložen stavový vektor.

Aplikaci příkazu `sim` si ukážeme na příkladě optimalizace PID regulátoru podle zobecněného kvadratického kriteria.

Příklad 5.4.1

Vypracujte program pro optimalizaci parametrů PID regulátoru s přenosem

$$R(s) = r_0 + \frac{r_1}{s} + \frac{r_2 s}{T_V s + 1} = P + \frac{I}{s} + \frac{Ds}{Ns+1}, \qquad (5.4-4)$$

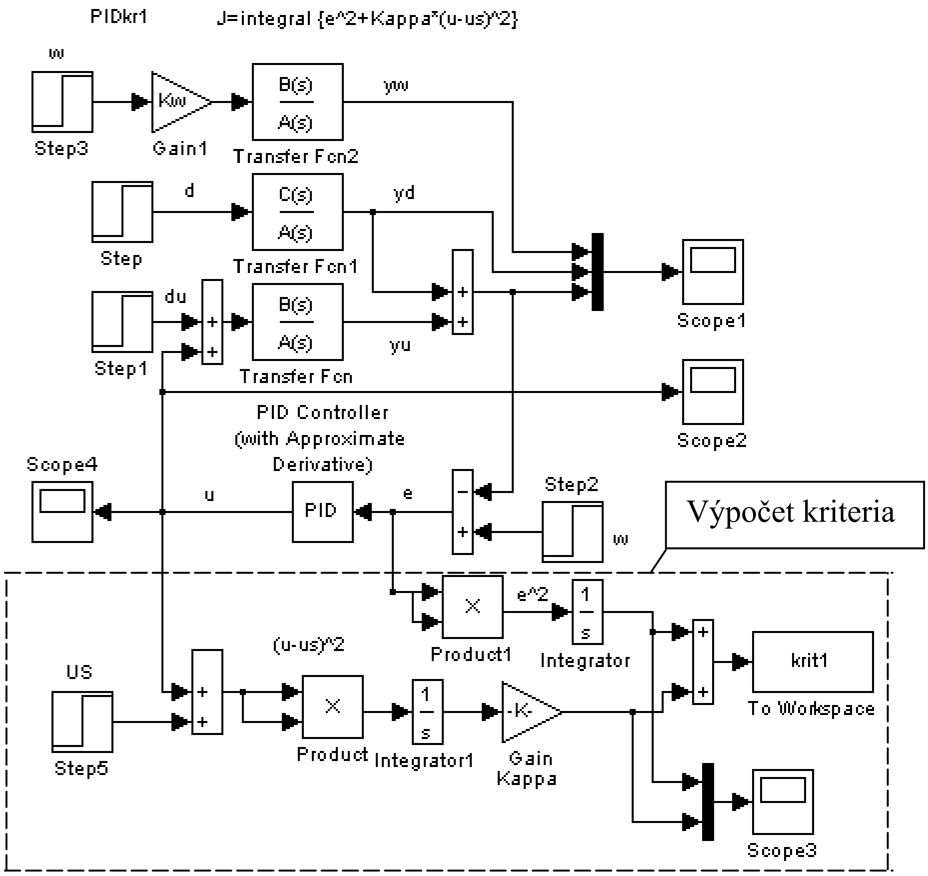
kde T_V je parazitní časová konstanta, podle zobecněného kvadratického kriteria (5.4 – 1)

$$J_z(r_0, r_1, r_2) = \int_0^{Tsim} \{\bar{e}(t)^2 + \kappa[u(t) - u(\infty)]^2\} dt \longrightarrow MINIMUM .$$

Řešení: Vycházíme z těchto předpokladů, označení proměnných a programů:

1) Model regulované soustavy je popsán obrazovými přenosy $F_U(s), F_d(s)$ viz obr.5.4.3
2) Polynomy *A(s), B(s), C(s)* se doplňují nulami tak, aby byly vždy stejného stupně.
3) Doba simulace je na proměnné `Tsim`, krok simulace na proměnné `dT`.
4) Proměnné : `PoruchaD` - neměřená porucha,
   `PoruchaDu` - neměřená porucha na akční veličině,
   `ZadanaW` - žádaná hodnota.
5) Proměnná `US` - ustálená hodnota akční veličiny
6) Proměnná `Kw = A(n)/B(n)` – zesílení, pro výpočet takové akční veličiny, aby bylo dosaženo žádané hodnoty bez regulace.
7) Proměnné `P,I,D` - parametry regulátoru, `P0,I0,D0` – počáteční nastavení.

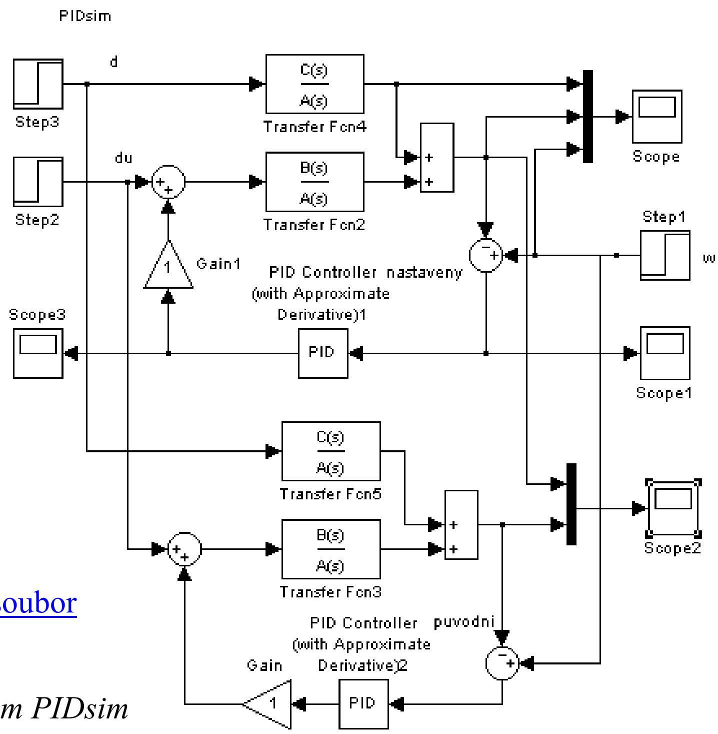
8) Proměnná `x=[P I D]` – vektor parametrů, na kterém je uložen výsledek minimalizace funkcí `fminsearch`.
9) Výpis programu `PIDopt1` a funkce `fPIDkr1` je níže uveden.
10) Funkce `fminsearch` spolupracuje s funkcí `fPIDkr1`.
11) Model uzavřeného obvodu s PID regulátorem a s výpočtem hodnoty kriteria `krit1` v SIMULINKu má jméno `PIDkr1` a je na obr.5.4.3. Obsahuje také pro porovnání regulace na skokovou změnu žádané hodnoty část, která modeluje dosažení žádané hodnoty bez regulace, pouze vhodně nastavenou akční veličinou. Toto realizují bloky: `Step3`, zesílení `Kw` a přenos `Transfer Fcn2`.
12) Porovnání průběhů regulačních pochodů po optimalizaci parametrů PID regulátoru a s počátečním nastavením se realizuje v SIMULINKu pomocí schéma `PIDsim` a je na obr . 5.4.3b.



Obr. 5.4.3a *Model uzavřeného obvodu s výpočtem kriteria*

$$J_z(r_0, r_1, r_2) = \int^{Tsim} \{\bar{e}(t)^2 + \kappa[u(t) - u(\infty)]^2\} dt \longrightarrow \min$$

Program byl ověřován na soustavě 3. řádu a na modelu regulace otáček v laboratoři KŘT 4. Obrazový přenos aproximující dynamické účinky motorku spojeného s tachodynamem pružnou spojkou je 4.řádu a reprezentuje silně kmitající systém.Výpis programu je na obr. 5.4.4. Průběh regulačních pochodů je na obr.5.4.5a,b. Na obr.5.4.5a je průběh regulované veličiny *y* při skoku žádané hodnoty a průběh odezvy při skoku akční veličiny, která zajistí dosažení žádané hodnoty. Na obr 5.4.5b je průběh akční veličiny



PIDsim.mdl - stáhni soubor

Obr.5.4.3b *Program PIDsim*

```
%PIDopt1  integral{e^2 + kappa * [u-u(nek)^2)]}
clear all;
close all;
global P I D Tsim
%A=[4 8 5 1];
A = [ 1 49 987 3856 35693 ];          %polynom A(s)
%B=[0 0 0 1];
B = [ 0 0 0 0 34365 ];                %polynom B(s)
%C=[0 0 0 1];
C = [ 0 0 0 2000 70000];              %polynom C(s)
Ts = 0.05;                            %perioda vzorkování
Tsim=10;                              %doba simulace
dT=0.01;                              %krok simulace
P0=1; I0=0.5;     D0=0.5;     N=20;   %vychozi serizeni PID regulatoru,N=Tv
n=length(A);
Kappa=1                               %váhový koeficient
PoruchaDu=0;
%US=B(n)/A(n)*PoruchaDu;              %US=u(nek) ustalená hodnota u
PoruchaD=0;
%US=C(n)/B(n)*PoruchaDu;
ZadanaW=1;
AkcniVel=0;
US=-A(n)/B(n)*ZadanaW;
Kw=A(n)/B(n);                         %koeficient
disp('OPTIMALIZACE PARAMETRU PID-REGULATORU:')
disp('Kriterium:J=integral {e^2 + kappa * [u-u(nek)^2)}:'),Kappa
P=P0; I=I0; D=D0;
sim('PIDkr1',Tsim);disp('Hodnota kvadr.kriteria pro puvodni nastaveni PID
regulatoru:');krit1
x=[P I D];
PIDpoc=x
x=[P I D];
OPTIONS=optimset('TolFun',1e-10,'MaxFunEvals',100);
x = fminsearch('fPIDkr1',x,OPTIONS);
disp('Optimalizovane parametry PID-Regulatoru:')
PID=x
```

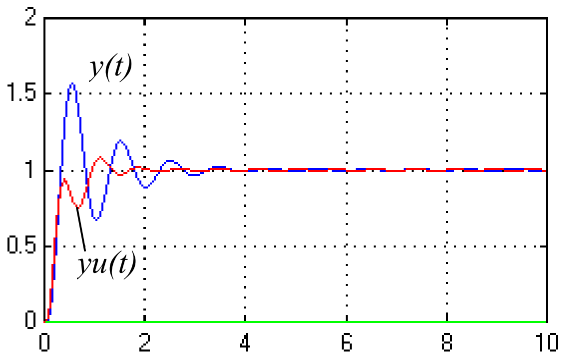
```
sim('PIDkr1',Tsim);disp('Hodnota kvadr.kriteria pro optimalizovane nastave-
ni PID regulatoru:');krit1
PoruchaD=0;
ZadanaW=1;
PoruchaDu=0;
sim('PIDsim',Tsim); PIDsim;
```

[PIDopt1.m - stáhni soubor]

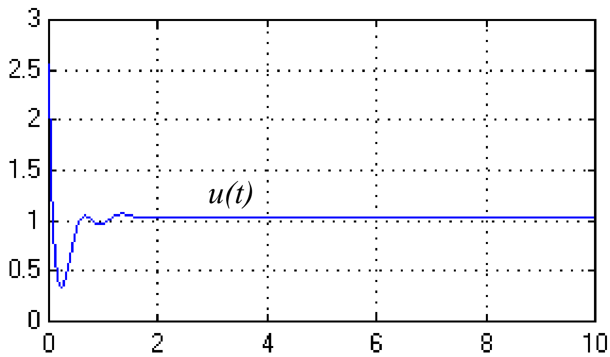
```
%function f=fPIDkr1(x)
function f=fPIDkr1(x)
global P I D Tsim
P=x(1);
I=x(2);
D=x(3);
sim('PIDkr1',Tsim);
f=krit1;
```

[fPIDkr1.m - stáhni soubor]

Obr.5.4.4 Výpis programu `PIDopt1, fPIDkr1`



Obr.5.4.5a *Regulovaná veličina y(t) a yu(t)*



Obr. 5.4.5b *Průběh akční veličiny u(t)*

```
OPTIMALIZACE PARAMERU PID-REGULATORU:
Kriterium:J=integral {e^2 + kappa * [u-u(nek)^2)}:

Kappa =  1


Hodnota kvadr.kriteria pro puvodni nastaveni PID regulatoru:

krit1 =  2.6550e+004

PIDpoc = 1.0000    0.5000    0.5000

Exiting: Maximum number of function evaluations has been exceeded
         - increase MaxFunEvals option.
         Current function value: 0.256748

Optimalizovane parametry PID-Regulatoru:

 PID  = 0.1194    4.5285    0.1104

Hodnota kvadr.kriteria pro optimalizovane nastaveni PID regulatoru:

krit1 = 0.3233
```

Obr.5.4.6 *Výstupy optimalizačního programu na display*

Použité kriterium pro optimální seřízení parametrů regulátoru pro silně kmitavou soustavu nedává zcela uspokojivé regulační pochody. Je-li třeba dosáhnout hladšího průběhu je třeba použít kriteria (5.4 – 2) nebo (5.4 – 3).

Konec příkladu

Příklad 5.4.2

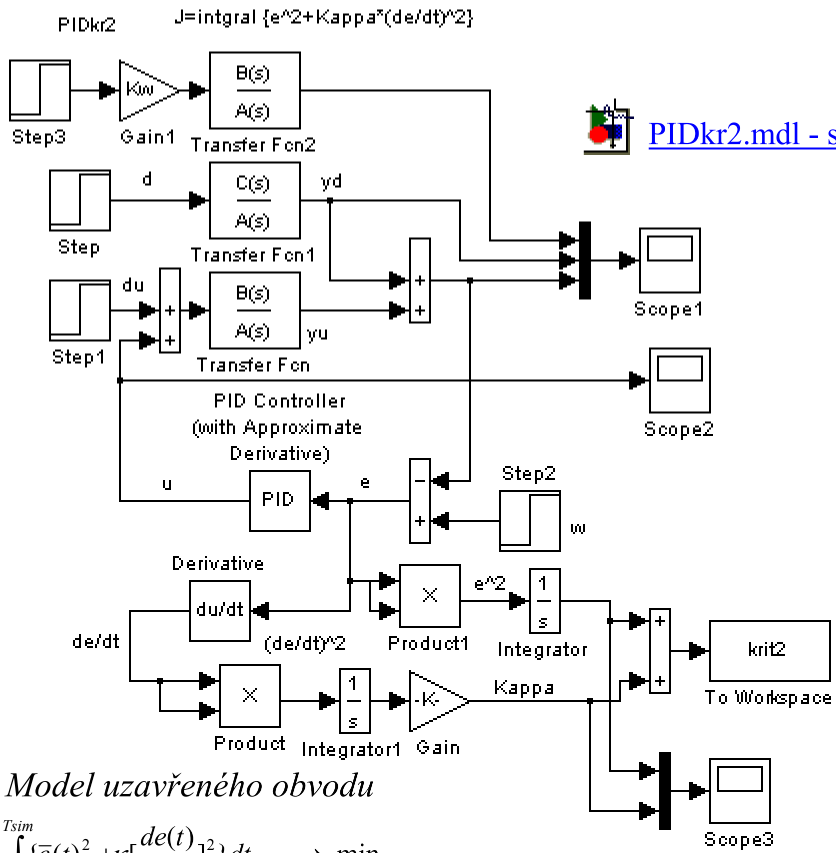
Vypracujte program pro optimalizaci parametrů PID regulátoru s přenosem (5.4 – 4) podle zobecněného kvadratického kriteria (5.4 – 2)

$$J(r_0, r_1, r_2) = \int_0^{Tsim} \{\bar{e}(t)^2 + \kappa[\frac{de(t)}{dt}]^2\} dt \longrightarrow \min$$

Řešení: označení proměnných je zachováno, programy mají ve jménech v koncovce číslo 2:

1) Model regulované soustavy je popsán stejně jako v předcházejícím
2) Výpis programu `PIDopt2` a funkce `fPIDkr2` je na obr. 5.4.8 uveden.
3) Funkce `fminsearch` spolupracuje s funkcí `fPIDkr2`.

4) Model uzavřeného obvodu s PID regulátorem a s výpočtem hodnoty kriteria `krit2` v SIMULINKu má jméno `PIDkr2` a je na obr. 5.4.7. Porovnání průběhů regulačních pochodů po optimalizaci parametrů PID regulátoru a s počátečním nastavením se realizuje v SIMULINKu pomocí schéma `PIDsim`.



PIDkr2.mdl - stáhni soubor

Obr. 5.4.7 *Model uzavřeného obvodu*

$$J(r_0, r_1, r_2) = \int_0^{Tsim} \{\bar{e}(t)^2 + \kappa[\frac{de(t)}{dt}]^2\} dt \longrightarrow \min$$

```
%PIDopt2 J=integral[e^2+kappa*(du/dt)^2]
clear all;
close all;
global P I D Tsim

%A=[4 8 5 1];
A = [ 1 49 987 3856 35693 ];      %polynom A(s)
%B=[0 0 0 1];
B = [ 0 0 0 0 34365 ];            %polynom B(s)
%C=[0 0 0 1];
C = [ 0 0 0 2000 70000];          %polynom C(s)
Ts = 0.05;                        %perioda vzorkování
Tsim=10;                          %doba simulace 10
dT=0.01;                          %krok simulace

P0=1; I0=0.5;  D0=0.5;  N=20;     %vychozi zesílení PID regulatoru, N=Tv
AkcniVel=0;
n=length(A);
Kappa=0.25;                       %váhový koeficient
PoruchaDu=0;
%US=B(n)/A(n)*PoruchaDu;          %US=u(nek) ustalená hodnota u
PoruchaD=0;
%US=C(n)/B(n)*PoruchaDu;
ZadanaW=1;
Kw=A(n)/B(n);                     %koeficient
%US=-A(n)/B(n)*ZadanaW;
disp('OPTIMALIZACE PARAMETRU PID-REGULATORU:')
disp('Kriterium:J=integral {e^2 + kappa * (de/dt)^2)]}:'),Kappa
P=P0; I=I0; D=D0;
sim('PIDkr2',Tsim);disp('Hodnota kvadr.kriteria pro puvodni nastaveni PID
regulatoru:');krit2
x=[P I D];
PIDpoc=x
OPTIONS=optimset('TolFun',1e-10,'MaxFunEvals',100);
x = fminsearch('fPIDkr2',x,OPTIONS);
disp('Optimalizovane parametry PID-Regulatoru:')
PID=x
sim('PIDkr2',Tsim);disp('Hodnota kriteria pro optimalizovane nastaveni PID
regulatoru:');krit2
PoruchaD=0;
ZadanaW=1;
PoruchaDu=0;
sim('PIDsim',Tsim); PIDsim;
```

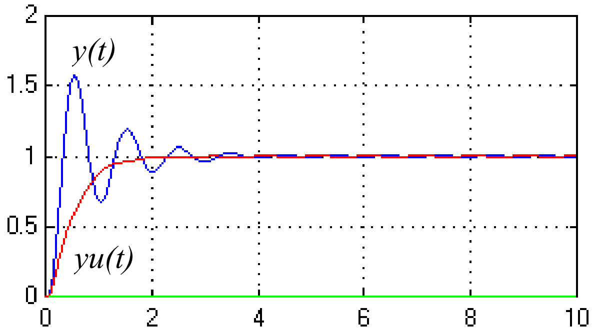
[PIDopt2.m - stáhni soubor]

```
%function f=fPIDkr2(x)
function f=fPIDkr2(x)
global P I D Tsim
P=x(1);
I=x(2);
D=x(3);
sim('PIDkr2',Tsim);
f=krit2;
```

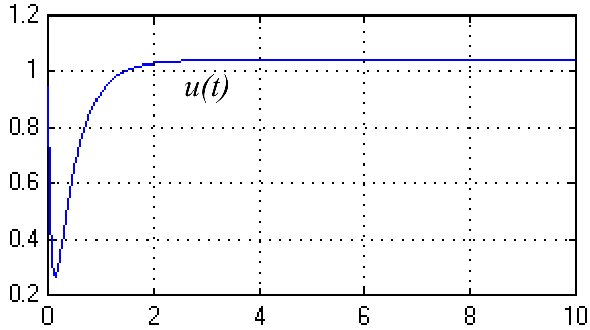
[fPIDkr2.m - stáhni soubor]

Obr. 5.4.8 *Výpis programu* `PIDopt2, fPIDkr2`

5) Průběh regulačních pochodů je na obr. 5.4.9a,b. Na obr. 5.4.9a je průběh regulované veličiny *y* při skoku žádané hodnoty a průběh odezvy při skoku akční veličiny, která zajistí dosažení žádané hodnoty. Na obr 5.4.9b je průběh akční veličiny.



Obr. 5.4.9a *Regulované veličiny y(t) a yu(t)*



Obr. 5.4.9b *Průběh akční veličiny u(t)*

Z obr. 5.4.9a je zřejmý útlum regulované veličiny, kmity byly zcela odstraněny. Rychlost náběhu se nepatrně snížila.

```
» OPTIMALIZACE PARAMERU PID-REGULATORU:
Kriterium:J=integral {e^2 + kappa * (de/dt)^2)]}:

Kappa = 0.2500

Hodnota kriteria pro puvodni nastaveni PID regulatoru:

krit2 = 3.8295e+004

PIDpoc = 1.0000    0.5000    0.5000

Exiting: Maximum number of function evaluations has been exceeded
         - increase MaxFunEvals option.
         Current function value: 0.575369

Optimalizovane parametry PID-Regulatoru:

PID = -0.0011    1.9457    0.0554

Hodnota kriteria pro optimalizovane nastaveni PID regulatoru:

krit2 = 0.5761
```

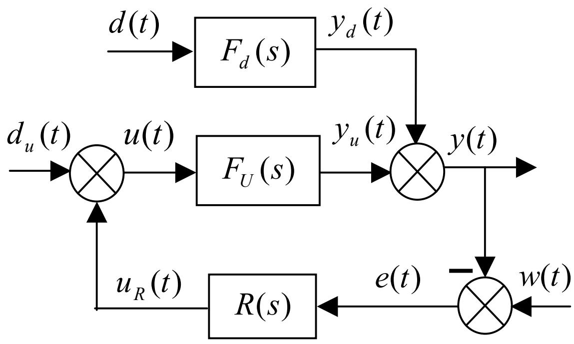
Obr.5.4.10 *Výstupy optimalizačního programu na display*

Konec příkladu

5.4.3 Seřízení regulátoru podle kvadratické regulační plochy-analyticky

Uvažujme model regulačního obvodu dle obr.5.4.11. Obrazové přenosy aproximující dynamické účinky akční veličiny, poruchových veličin *d(t), d_u(t)* jsou

$$F_U(s)=\frac{B(s)}{A(s)};\ F_d(s)=\frac{C(s)}{A(s)};\ F_{du}(s)=\frac{B(s)}{A(s)};$$



Obr. 5.4.11 *Regulační obvod*

Přenos PID regulátoru je

$$R(s)=r_0+\frac{r_1}{s}+r_2\cdot s=\frac{r_0 s+r_1+r_2 s^2}{s},$$

Uvažujme dále zobecněné kvadratické kriterium ve tvaru

$$J(r_0,r_1,r_2)=\int_0^\infty\{\bar{e}(t)^2+\kappa*\bar{u}(t)^2\}dt=\int_0^\infty\{[e(t)-e(\infty)]^2+\kappa[u(t)-u(\infty)]^2\}dt,$$

kde je $e(t)\ldots$ regulační odchylka, $e(t)=w(t)-y(t)$,

$e(\infty)=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)$ je trvalá regulační odchylka,

$y(t)\ldots$ regulovaná veličina,

$w(t)\ldots$ žádaná hodnota,

$u(t)\ldots$ akční veličina,

$u(\infty)=\lim_{t\to\infty}u(t)=\lim_{s\to 0}sU(s)$ je ustálená hodnota akční veličiny,

κ … je koeficient, pomocí kterého je možno zajistit tlumení regulačního pochodu.

Pro stabilní regulační obvody dle obr. 5.4.1, je možno L-obraz regulační odchylky $\bar{E}(s)$ vyjádřit ve tvaru

$$\bar{E}(s)=\frac{\beta(s)}{\alpha(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{\alpha_n s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0}. \qquad (5.4-5)$$

Hodnotu kvadratické regulační plochy je pak možno vyjádřit ve tvaru

$$\boxed{J(r_0,r_1,r_2)=\int_0^\infty\bar{e}(t)^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\left|\bar{E}(i\omega)\right|^2d\omega=\frac{1}{2\alpha_n}\cdot\frac{H_D}{H_C},} \qquad (5.4-6)$$

kde je α_n koeficient u nejvyšší mocniny jmenovatele,

H_C determinant Hurwitzovy matice, která se vytvoří ze jmenovatele L-obrazu regulační odchylky,

H_D determinant upravené Hurwitzovy matice

$$H_D = \left| \begin{array}{c} Q_0 \; Q_1 \; Q_2 \; \ldots \; Q_{n-1} \\ \boxed{\begin{array}{c}\text{Hurwitzova} \\ \text{matice bez} \\ \text{prvé řádky}\end{array}} \end{array} \right| , \quad \begin{array}{l} Q_0 = (-1)^0 \beta_{n-1}^2 \\ Q_1 = (-1)^1 \left[\beta_{n-2}^2 - 2\beta_{n-1} \cdot \beta_{n-3}\right], \\ Q_2 = (-1)^2 \left[\beta_{n-3}^2 - 2\beta_{n-2} \cdot \beta_{n-4} + 2\beta_{n-1} \cdot \beta_{n-5}\right], \\ \quad \ldots \\ Q_{n-2} = (-1)^{n-2} \left[\beta_1^2 - 2\beta_0 \cdot \beta_2\right], \\ Q_{n-1} = (-1)^{n-1} \beta_0^2 . \end{array} \qquad (5.4-7)$$

Podobně L-obraz akční veličiny $\overline{U}(s)$ bude mít tvar

$$\overline{U}(s) = \frac{\beta_U(s)}{\alpha_U(s)} = \frac{\beta_{U\,n-1} s^{n-1} + \cdots + \beta_{U1} s + \beta_{U0}}{\alpha_{U\,n} s^n + \alpha_{U\,n-1} s^{n-1} \cdots + \alpha_{U1} s + \alpha_{U0}}. \qquad (5.4-8)$$

Hodnotu kvadratické regulační plochy akční veličiny je pak možno vyjádřit ve tvaru

$$\boxed{J(r_0, r_1, r_2) = \int_0^\infty \overline{u}(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left|\overline{U}(i\omega)\right|^2 d\omega = \frac{1}{2\alpha_{U\,n}} \cdot \frac{H_{U\,D}}{H_{U\,C}},} \qquad (5.4-9)$$

kde je $\alpha_{U\,n}$ … koeficient u nejvyšší mocniny jmenovatele L-obrazu akční veličiny $\overline{U}(s)$,

$H_{U\,C}$ …determinant Hurwitzovy matice, která se vytvoří ze jmenovatele L-obrazu akční veličiny,

$H_{U\,D}$ …determinant upravené Hurwitzovy matice $H_{U\,C}$

Hodnota zobecněné kvadratické plochy bude

$$\boxed{J(r_0, r_1, r_2) = \int_0^\infty \{\overline{e}(t)^2 + \kappa * \overline{u}(t)^2\} dt = \frac{1}{2\alpha_n} \cdot \frac{H_D}{H_C} + \frac{1}{2\alpha_{U\,n}} \cdot \frac{H_{U\,D}}{H_{U\,C}}}. \qquad (5.4-10)$$

Nutné podmínky extrému - minima jsou

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial J(r_0, r_1, r_2)}{\partial r_0} = 0, \\ \dfrac{\partial J(r_0, r_1, r_2)}{\partial r_1} = 0, \\ \dfrac{\partial J(r_0, r_1, r_2)}{\partial r_2} = 0. \end{array}} \qquad (5.4-11)$$

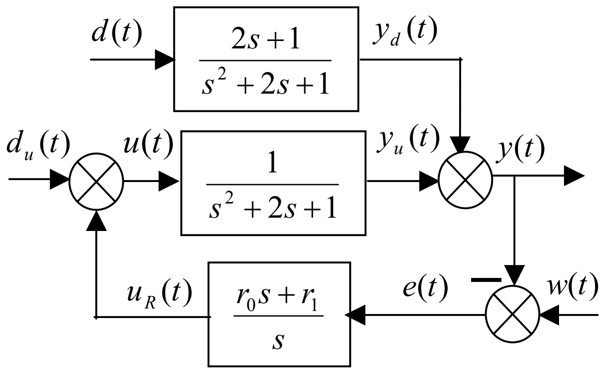
Příklad 5.4.3

Uvažujme regulační obvod s PI regulátorem dle obr. 5.4.12.

Určete:

1) Oblast stability pro parametry regulátoru r_0, r_1.
2) Optimální seřízení PI regulátoru podle minima kvadratické regulační plochy (5.4 – 9) pro
   a) $d_u(t) = 1(t);\ d(t) = w(t) = 0.$
   b) $d(t) = 1(t);\ d_u(t) = w(t) = 0.$
3) Vyjádřete hodnotu kvadratické regulační plochy pro

$$w(t) = 1(t);\ d(t) = d_u(t) = 0.$$



Obr. 5.4.12 *Regulační obvod*

Řešení:

1) Určíme přenos $F_{edu}(s) = \dfrac{-F_U(s)}{1+F_U(s)} = \dfrac{\dfrac{-1}{s^2+2s+1}}{1+\dfrac{1}{s^2+2s+1}\cdot\dfrac{r_0 s + r_1}{s}} = -\dfrac{s}{s^3+2s^2+(1+r_0)s+r_1}.$

Charakteristická rovnice je: $s^3 + 2s^2 + (1+r_0)s + r_1 = 0$

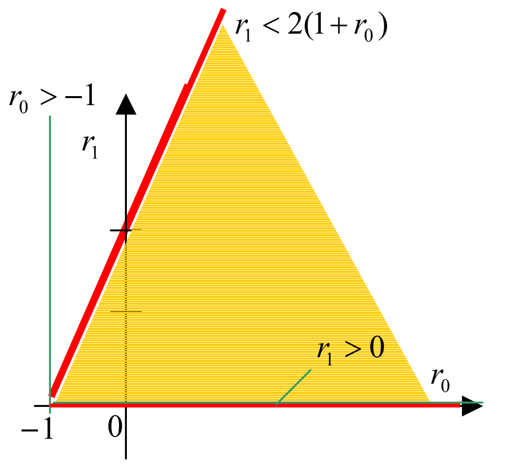
Podmínka stability podle Hurwitze :

a) $1 + r_0 > 0 \rightarrow r_0 > -1;\quad r_1 > 0.$

b)Determinanty Hurwitzovy matice na hlavní diagonále až do řádu *(n - 1)* jsou > 0.

$$H_C = \begin{bmatrix} 2 & r_1 & 0 \\ 1 & 1+r_0 & 0 \\ 0 & 2 & r_1 \end{bmatrix} \rightarrow D_1 = 2 > 0;\quad D_2 = 2*(1+r_0) - r_1 = 0;\quad D_3 = r_1 * [2*(1+r_0) - r_1] = H_c$$

.



Obr.5.4.13 *Oblast stability*

2) Optimální seřízení pro
   a) $d_u(t) = 1(t);\ d(t) = w(t) = 0.$

Obraz regulační odchylky je roven

$$E_{du}(s) = F_{edu}(s) D_u(s) = \frac{-1}{s^3+2s^2+(1+r_0)s+r_1};$$

Poznamenejme : $\beta_0 = -1;\quad \beta_1 = \beta_2 = 0;\quad e_{du}(\infty) = 0.$

Pak platí

$$\overline{E}(s) = E(s),\ \ Q_0 = (-1)^0 \cdot \beta_2^2 = 0;\ \ Q_1 = (-1)\cdot[\beta_1^2 - 2\cdot\beta_0\beta_2] = 0;\ \ Q_2 = (-1)^2 \cdot \beta_0^2 = 1.$$

Upravená Hurwitzova matice

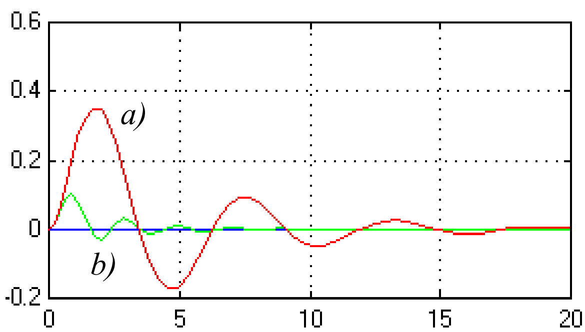
$$H_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1+r_0 & 0 \\ 0 & 2 & r_1 \end{bmatrix} \rightarrow H_D = 2; \qquad J(r_0, r_1) = \int_0^\infty \bar{e}(t)^2 dt = \frac{1}{2\alpha_n} \cdot \frac{H_D}{H_C} = \frac{1}{r_1 * [2*(1+r_0) - r_1]}.$$

Nutné podmínky minima jsou

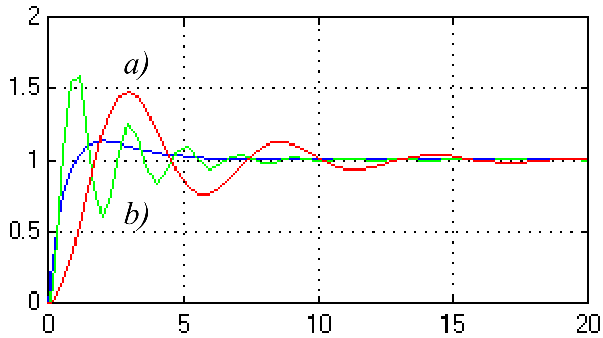
$$\frac{\partial J(r_0, r_1)}{\partial r_0} = \frac{-2r_1}{\{r_1 * [2*(1+r_0) - r_1]\}^2} = 0 \quad \rightarrow \quad r_{0\,opt} \rightarrow \infty, \tag{1}$$

$$\frac{\partial J(r_0, r_1)}{\partial r_1} = \frac{-2(1+r_0) + 2r_1}{\{r_1 * [2*(1+r_0) - r_1]\}^2} = 0 \quad \rightarrow \quad r_{1\,opt} = r_0 + 1. \tag{2}$$

Z rovnice (1) plyne, že zesílení r_0 je třeba nastavit maximálně možné a podle (2) dopočítat $r_{1\,opt.}$. Například pro a) $r_0 = 1$ je $r_{1\,opt} = 2$,
b) $r_0 = 10$ je $r_{1\,opt} = 11$.



Obr.5.4.14a *Regulační pochod d_u=1(t), w=0*



Obr.5.4.14b *Regulační pochod d_u=0, w=1(t)*

Na obr.5.4.14a,b jsou charakteristické regulační pochody pro regulátor seřízený pole minima kvadratické regulační plochy (5.4 – 6) (*PI regulátor se seřízením a) a b)*).

b) Optimální seřízení pro $d(t) = 1(t);\, d_u(t) = w(t) = 0$.

Přenos uzavřeného obvodu je

$$F_{ed}(s) = \frac{-F_d(s)}{1 + F_U(s)} = \frac{\dfrac{-(2s+1)}{s^2 + 2s + 1}}{1 + \dfrac{1}{s^2 + 2s + 1} \cdot \dfrac{r_0 s + r_1}{s}} = -\frac{s(2s+1)}{s^3 + 2s^2 + (1+r_0)s + r_1}.$$

Obraz regulační odchylky je roven

$$E_d(s) = F_{ed}(s) D(s) = \frac{-(2s+1)}{s^3 + 2s^2 + (1+r_0)s + r_1};$$

Připomeneme si : $\beta_0 = -1; \quad \beta_1 = -2; \quad \beta_2 = 0; \quad e_{du}(\infty) = 0. \ \overline{E}(s) = E(s)$

Koeficienty v první řádce upravené Hurwitzovy matice jsou

$$Q_0 = (-1)^0 \cdot \beta_2^2 = 0; \ Q_1 = (-1) \cdot \left[\beta_1^2 - 2 \cdot \beta_0 \beta_2\right] = -4; \ Q_2 = (-1)^2 \cdot \beta_0^2 = 1.$$

Upravená Hurwitzova matice

$$H_D = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & 1+r_0 & 0 \\ 0 & 2 & r_1 \end{bmatrix} \rightarrow H_D = 2(2r_1+1); J(r_0, r_1) = \int_0^\infty \overline{e}(t)^2 dt = \frac{1}{2\alpha_n} \cdot \frac{H_D}{H_C} = \frac{(2r_1+1)}{r_1 * \left[2*(1+r_0) - r_1\right]}. \tag{3}$$

Nutné podmínky minima jsou

$$\frac{\partial J(r_0, r_1)}{\partial r_0} = \frac{-2r_1 \cdot (2r_1+1)}{\left\{r_1 \cdot \left[2 \cdot (1+r_0) - r_1\right]\right\}^2} = 0 \quad \rightarrow \quad r_{0\,opt} \rightarrow \infty, \tag{4}$$

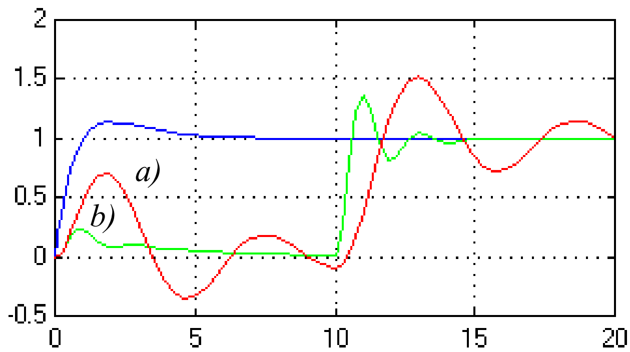
$$\frac{\partial J(r_0, r_1)}{\partial r_1} = \frac{2r_1[(1+r_0) - 2r_1] - (2r_1+1)[2(1+r_0) - 2r_1]}{\left\{r_1 \cdot \left[2 \cdot (1+r_0) - r_1\right]\right\}^2} = 0 \quad \rightarrow \quad r_1^2 + r_1 - r_0 - 1 = 0. \tag{5}$$

Optimální seřízení parametru r_1 určíme řešením kvadratické rovnice

$$r_1^2 + r_1 - r - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad r_{1\,opt} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(1+r_0)}}{2}.$$

Z rovnice (1) plyne, že zesílení r_0 je třeba nastavit maximálně možné a podle (2) dopočítat $r_{1\,opt}$. Například pro a) $r_0 = 1$ je $r_{1\,opt} = 2$
b) $r_0 = 10$ je $r_{1\,opt} = 2{,}854$.

Pro takto seřízený PI regulátor jsou regulační pochody uvedeny na obr. 5.4.15. V čase $t = 0$ vstupuje porucha $d = 1(t)$ a $w = 0$ a v čase $t = 10$ vstupuje skok žádané hodnoty $w = 1(t)$ porucha $d = 0$. Parametry regulátoru jsou nastaveny podle a) a b).



Obr.5.4.15 *Regulační pochody a) a b)*

3) Vyjádřete hodnotu kvadratické regulační plochy pro $w(t) = 1(t);\, d(t) = d_u(t) = 0.$

Obrazový přenos $F_{ew}(s)$ a obraz regulační odchylky na skok žádané hodnoty je

$$F_{ew} = \frac{1}{1 + F_u(s)R(s)} = \frac{s(s^2 + 2s + 1)}{s^3 + 2s^2 + s(1 + r_0) + r_1} \quad \rightarrow \quad E_w(s) = \frac{(s^2 + 2s + 1)}{s^3 + 2s^2 + s(1 + r_0) + r_1}.$$

Koeficienty čitatele regulační odchylky jsou : $\beta_0 = +1;\quad \beta_1 = +2;\quad \beta_2 = +1;\quad e_{du}(\infty) = 0.$
$\overline{E}(s) = E(s)$

Koeficienty v první řádce upravené Hurwitzovy matice jsou

$$Q_0 = (-1)^0 \cdot \beta_2^2 = 1;\ Q_1 = (-1) \cdot \left[\beta_1^2 - 2 \cdot \beta_0 \beta_2\right] = -2;\ Q_2 = (-1)^2 \cdot \beta_0^2 = 1.$$

Upravená Hurwitzova matice a její determinant je

$$H_D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 + r_0 & 0 \\ 0 & 2 & r_1 \end{bmatrix} \rightarrow H_D = r_1 * (r_0 + 1) + 2(r_1 + 1);$$

Hodnotu kvadratického funkcionálu pro skok žádané hodnoty je možno vyjádřit ve tvaru

$$J(r_0, r_1) = \int_0^\infty \overline{e}(t)^2 dt = \frac{1}{2\alpha_n} \cdot \frac{H_D}{H_C} = \frac{r_1 * (1 + r_0) + (2r_1 + 1)}{2r_1 * \left[2 * (1 + r_0) - r_1\right]}.$$

Konec příkladu

Na posledním příkladě bude demonstrován postup nastavení parametrů regulátoru podle minima zobecněné regulační plochy (5.3 – 1). Jako poslední

Příklad 5.4.4

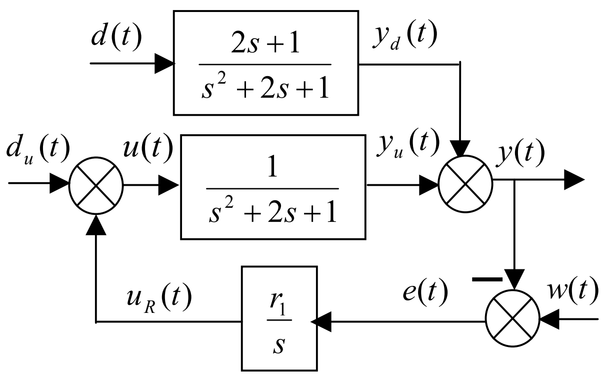
Uvažujme model regulačního obvodu z příkladu 5.5.3 ale s tím, že regulátor bude čistě integrační viz obr. 5.4.16

Úkol: Proveďte optimální seřízení I-regulátoru podle minima zobecněné regulační plochy pro

$$d(t) = 1(t);\, d_u(t) = w(t) = 0.$$

Řešení:

1) Zobecněná kvadratická regulační plocha podle (5.3 – 1) je dána součtem



Obr. 5.4.16 *Regulační obvod*

$$J_Z(r_1) = \int_0^\infty \{[e(t) - e(\infty)]^2 + \kappa[u(t) - u(\infty)]^2\} dt = J_e(r_1) + \kappa J_U(r_1),$$

kde je $$J_e(r_1) = \int_0^\infty [e(t) - e(\infty)]^2\, dt, \qquad (1)$$

$$J_U(r_1) = \int_0^\infty [u(t) - u(\infty)]^2 dt. \qquad (2)$$

Úloha je lineární, proto můžeme vyjádřit hodnoty integrálů $J_e(r_1)$ a $J_U(r_1)$ odděleně.

2) Hodnotu integrálu (1) můžeme určit z Př.5.4.3, dosadíme-li za $r_0 = 0$ do rovnosti (3). Dostaneme

$$J_e(r_1) = \int_0^\infty \overline{e}(t)^2 dt = \frac{1}{2\alpha_n} \cdot \frac{H_D}{H_C} = \frac{(2r_1 + 1)}{r_1 * [2 - r_1]}. \qquad (3)$$

3) Aby bylo možno pro výpočet integrálu použít vzorce (5.4 – 10), je třeba určit L-obraz akční veličiny a její ustálenou hodnotu. Přenos $F_{Ud}(s)$ je roven

$$F_{Ud}(s) = -\frac{F_d(s)R(s)}{1 + F_U(s)R(s)} = -\frac{r_1(2s+1)}{s^3 + 2s^2 + s + r_1} \to U_d(s) = -\frac{r_1(2s+1)}{s^3 + 2s^2 + s + r_1} \cdot \frac{1}{s}.$$

Ustálenou hodnotu $u_d(\infty)$ určíme pomocí věty o konečné hodnotě viz P2

$$u_d(\infty) = \lim_{t\to\infty} u_d(t) = \lim_{s\to 0} s\, U_d(s) = -1.$$

L-obraz $\overline{U}_d(s)$ je roven

$$\overline{U}_d(s) = U_d(s) - L\{u(\infty)\} = -\frac{r_1(2s+1)}{s^3 + 2s^2 + s + r_1} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{s^2 + 2s + (1 - 2r_1)}{s^3 + 2s^2 + s + r_1}.$$

Lehce se můžeme přesvědčit, že $\overline{u}_d(\infty) = \lim_{T\to\infty} \overline{u}_d(t) = \lim_{s\to 0} s\, \overline{U}_d(s) = 0.$

4) Koeficienty čitatele L – obrazu $\overline{U}_d(s)$ (akční veličiny) jsou :

$$\beta_0 = +1 - 2r_1; \quad \beta_1 = +2; \quad \beta_2 = 1;$$

Koeficienty v první řádce upravené Hurwitzovy matice vypočteme podle (5.4 – 7)

$$Q_0 = (-1)^0 \cdot \beta_2^2 = 1; \; Q_1 = (-1) \cdot \left[\beta_1^2 - 2 \cdot \beta_0 \beta_2\right] = -(2 + 4r_1); \; Q_2 = (-1)^2 \cdot \beta_0^2 = (1 - r_1)^2.$$

Upravená Hurwitzova matice a její determinant je

$$H_{DU} = \begin{bmatrix} 1 & -(2+4r_1) & (1-r_1)^2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & r_1 \end{bmatrix} \to H_{DU} = r_1 + 2(r_1 + 1)^2 + r_1(2 + 4r_1) = 12r_1^2 - 5r + 2.$$

Hodnotu kvadratického funkcionálu $J_U(r_1)$ je možno vyjádřit ve tvaru

$$J_U(r_1) = \int_0^\infty \bar{u}(t)^2 dt = \frac{1}{2\alpha_n} \cdot \frac{H_{DU}}{H_{CU}} = \frac{12r_1^2 - 5r_1 + 2}{2r_1 * [2 - r_1]}. \qquad (4)$$

Sečtením (3) a (4) dostaneme hodnotu zobecněného kvadratického kriteria v závislosti na parametru regulátoru

$$J_Z(r_1) = J_e(r_1) + \kappa J_U(r_1) = \int_0^\infty \bar{e}(t)^2 dt + \kappa \int_0^\infty \bar{u}(t)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2\alpha_n}(\cdot \frac{H_D}{H_C} + \kappa \frac{H_{DU}}{H_{CU}}) = \frac{(2r_1+1) + \kappa(12r_1^2 - 5r_1 + 2)}{r_1 * [2 - r_1]}.$$

5) Nutná podmínka extrému je

$$\frac{\partial J_Z(r_1)}{\partial r_1} = \frac{[4 + 24\kappa r_1 - 5\kappa] * 2r_1(2 - r_1) - 4 * [(4r_1 + 2) + \kappa(12r_1^2 - 52r_1 + 2)] * 2(2 - 2r_1)}{\{r_1 * [2 * (1 + r_0) - r_1]\}^2} = 0$$

Po úpravách dostaneme v čitateli kvadratickou rovnici tvaru

$$r_1^2(19\kappa + 4) + r_1 4(\kappa + 1) - 4(\kappa + 1) = 0$$

Řešením kvadratické rovnice pro optimální nastavení parametru regulátoru dostaneme

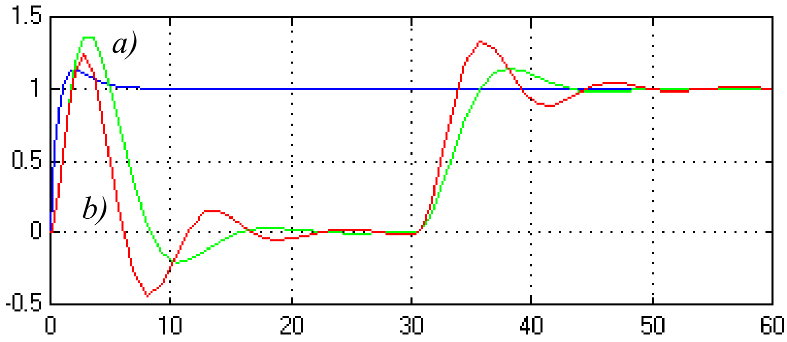
$$r_{1\,opt} = \frac{-4(\kappa+1) + \sqrt{16(\kappa+1)^2 + 16(\kappa+1)(19\kappa+4)}}{2(19\kappa+4)}.$$

Optimální seřízení regulátoru závisí na κ, takže provedeme výpočet I-regulátoru pro dvě hodnoty κ.

$$a)\ \kappa = 0, \quad r_{1\,opt} = \frac{-4 + \sqrt{16 + 16 \cdot 4}}{2 \cdot 4} = 0{,}6183;$$

$$b)\ \kappa = 10, \quad r_{1\,opt} = \frac{-44 + \sqrt{16 * 121 + 16 * 11 * (190 + 4)}}{2(190 + 4)} = 0{,}3628.$$

Pro takto seřízený I regulátor jsou regulační pochody uvedeny na obr. 5.4.17. V čase $t = 0$ vstupuje porucha $d = 1(t)$ a $w = 0$, a v čase $t = 30$ vstupuje skok žádané hodnoty $w = 1(t)$ porucha $d = 0$. Parametry regulátoru jsou nastaveny podle a) a b).



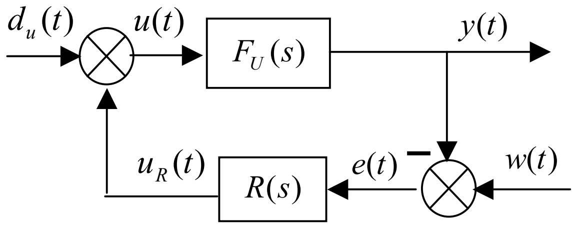
Obr.5.4.17a *Regulační pochody a) a b)*

Konec příkladu

5.5 SEŘÍZENÍ REGULÁTORU PODLE LINEÁRNÍ REGULAČNÍ PLOCHY

Pro seřízení regulátoru podle minima lineární regulační plochy bude uvažován regulační obvod dle obr. 5.5.1, s regulátorem typu PID a se vstupní poruchou na akční veličině $d_u(t)$ ve tvaru jednotkového skoku

$$d_u(t) = 1(t);\ w(t) = 0.$$



Obr. 5.5.1 *Regulační obvod*

Postup syntézy rozdělíme do těchto kroků:

1) Vyjádření hodnoty kriteria. lineární regulační plochy (5.3 – 6) v závislosti na parametrech regulátoru z obrazu regulační odchylky $E_{du}(s)$.
2) Diskuse kriteria
3) Návrh dalších vazebních podmínek, formulace optimalizační úlohy
4) Závěr, metodika výpočtu.

5.5.1 Výpočet hodnoty kriteria

Uvažujme lineární regulační plochu ve tvaru

$$J(r_0, r_1, r_2) = \int_0^\infty \bar{e}_{du}(t)dt = \int_0^\infty [e_{du}(t) - e_{du}(\infty)]dt.$$

Hodnotu kriteria určíme přímo v L-obraze. Nejdříve je třeba určit L-obraz regulační odchylky. Předpokládáme, že obrazový přenos mezi regulační odchylkou a poruchou na akční veličině $d_u(t)$ je $F_{edu}(s)$, pak obraz regulační odchylky je roven

$$L\{e_{du}(t)\} = E_{du}(s) = F_{edu}(s) \cdot D_u(s) = F_{edu}(s) \cdot \frac{1}{s}.$$

Použitím věty o konečné hodnotě viz (P2 – 24) určíme ustálenou hodnotu regulační odchylky $e_{du}(\infty)$. Platí

$$e_{du}(\infty) = \lim_{t \to \infty} e_{du}(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot E_{du}(s) = F_{edu}(0).$$

Laplaceův obraz ustálené hodnoty regulační odchylky je $L\{F_{edu}(0)\} = F_{edu}(0)/s$. Takže L-obraz $e_{du}(t) - e_{du}(\infty)$ je roven

$$L\{e_{du}(t) - e_{du}(\infty)\} = E_{du}(s) - \frac{F_{edu}(0)}{s}.$$

Horní hranici ∞ v integrálu kriteria nahradíme časem "t" jehož L-obraz je dán větou (P2 – 10) viz. Příloha P2. Platí

$$J(r_0,r_1,r_2) = \int_0^t [e_{du}(t) - e_{du}(\infty)]dt \mathrel{\hat=} L\left\{\int_0^t [e_{du}(\tau) - e_{du}(\infty)]d\tau\right\} =$$
$$= \frac{1}{s} L\{[e_{du}(\tau) - e_{du}(\infty)]\} = \frac{1}{s}[E_{du}(s) - \frac{F_{edu}(0)}{s}] \qquad (5.5-0)$$

Předpokládejme, že obrazový přenos uzavřeného regulačního obvodu $F_{edu}(s)$ má tvar

$$F_{edu}(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}. \qquad (5.5-1)$$

Přejdeme-li v (5.5 - 0) k limitě $t \to \infty$, pak je možno určit hodnotu lineární regulační plochy. Platí

$$J_1(r_0,r_1,r_2) = \int_0^\infty \bar{e}_{du}(t)dt = \lim_{s\to 0} sL\left\{\int_0^t [e_{du}(\tau) - e_{du}(\infty)]d\tau\right\} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s}\left[E_{du}(s) - \frac{F_{edu}(0)}{s}\right].$$

Dosadíme-li za obrazový přenos (5.5 – 1) dostaneme hodnotu lineární regulační plochy ve tvaru

$$J_1(r_0,r_1,r_2) = \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} - \frac{\beta_0}{\alpha_0 s}\right] = \frac{\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0}{\alpha_0^2}. \qquad (5.5-2)$$

5.5.2 Diskuse kriteria

Hodnotu kriteria lineární regulační plochy $J_1(r_0,r_1,r_2)$ je možno spočítat podle (5.5 – 2). Budeme-li uvažovat, že regulátor má integrační složku, pak koeficient β_0 obrazového přenosu $F_{edu}(s)$ (uzavřená regulační smyčka) bude roven nule. Kritérium má pak tvar

$$\boxed{J_1(r_0,r_1,r_2) = \frac{\beta_1}{\alpha_0} = \frac{\beta_1 / a_n}{\alpha_0 / \alpha_n} = \frac{\beta_1 / \alpha_n}{A_0} \to Min,} \qquad (5.5-3)$$

kde je $A_0 = \dfrac{\alpha_0}{\alpha_n}$. Má-li býti dosaženo minima musí býti splněna podmínka $|A_0| \to Max.$

Charakteristický polynom obrazového přenosu (5.5 – 1) je možno převést do normovaného tvaru dělíme-li koeficientem a_n všechny koeficienty obrazového přenosu. Dostaneme

$$F_{edu}(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} = \frac{(\beta_{n-1}/\alpha_n)s^{n-1} + \cdots + (\beta_1/\alpha_n)s + (\beta_0/\alpha_n)}{s^n + A_{n-1}s^{n-1} + \cdots + A_2 s^2 + A_1 s + A_0}.$$
$$(5.5-4)$$

Porovnáním (5.5 – 3) a (5.5 – 4) je vidět, že ne všechny parametry regulátoru, které jsou obsaženy v koeficientech charakteristické rovnice mají vliv na velikost lineární regulační plochy. Je tedy třeba najít další podmínky pro určení parametrů regulátoru.

5.5.3 Návrh dalších vazebních podmínek

Nejdříve se soustředíme na strukturu a koeficienty charakteristického polynomu. Analýzu provedeme na jednoduchém příkladě. Uvažujme regulační obvod dle obr. 5.5.1. Obrazový přenos $F_U(s)$ a přenos regulátoru $R(s)$ nechť jsou

$$F_U(s) = \frac{K}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}; \quad R(s) = r_0 + \frac{r_1}{s} + r_2 s = \frac{s r_0 + r_1 + r_2 s^2}{s}.$$

Obrazový přenos $F_{edu}(s)$ uzavřeného obvodu je

$$F_{edu}(s) = \frac{-F_U(s)}{1 + F_U(s) \cdot R(s)} = -\frac{Ks}{a_4 s^5 + a_3 s^4 + a_2 s^3 + s^2(a_1 + K r_2) + s(a_0 + K r_0) + K r_1}.$$

Obrazový přenos s normovaným charakteristickým polynomem má tvar

$$F_{edu}(s) = -\frac{\frac{K}{a_4} s}{s^5 + \frac{a_3}{a_4} s^4 + \frac{a_2}{a_4} s^3 + s^2 \frac{(a_1 + K r_2)}{a_4} + s \frac{(a_0 + K r_0)}{a_4} + \frac{K r_1}{a_4}} =$$

$$= -\frac{s \cdot K / a_4}{s^5 + A_4 s^4 + A_3 s^3 + s^2 A_2 + s A_1 + A_0}.$$

Koeficienty charakteristického polynomu je možno rozdělit do dvou skupin:

$$\boxed{\begin{aligned} A_0 &= \frac{K r_1}{a_4} \\ A_1 &= \frac{(a_0 + K r_0)}{a_4} \\ A_2 &= \frac{(a_1 + K r_2)}{a_4} \end{aligned}}$$

I. skupina koeficientů závisí na parametrech regulátoru,

$$\boxed{\begin{aligned} A_3 &= \frac{a_2}{a_4} \\ A_4 &= \frac{a_3}{a_4} \end{aligned}}$$

II. skupina koeficientů nezávisí na parametrech regulátoru.

Podmínku (5.5 – 3) je možno zapsat ve tvaru $|A_0| \to Max$ při splnění podmínky, že koeficienty A_3, A_4 musí býti zachovány. Je tedy třeba najít vztah ***mezi koeficienty a póly charakteristického polynomu***. Tato vazba je definována Vietovými vztahy, které jsou formulovány pro normovaný polynom. Platí

$$
\begin{aligned}
&-A_{n-1} = s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1} + s_n \\
&+A_{n-2} = s_1 s_2 + \cdots + s_1 s_{n-1} + s_1 s_n + s_2 s_3 + \cdots + s_{n-1} s_n \\
&-A_{n-3} = s_1 s_2 s_3 + s_1 s_2 s_4 \cdots + s_1 s_2 s_n + s_2 s_3 s_4 + \cdots + s_{n-2} s_{n-1} s_n \\
&+A_{n-4} = s_1 s_2 s_3 s_4 + s_1 s_2 s_3 s_5 + \cdots + s_1 s_2 s_3 s_n + \cdots + s_{n-3} s_{n-2} s_{n-1} s_n \\
&\qquad \cdots \\
&\qquad \cdots \\
&(-1)^n A_0 = s_1 s_2 s_3 \cdots s_n
\end{aligned}
\qquad (5.5-5)
$$

Optimalizační úloha byla převedena na vázaný extrém

$$\boxed{A_0 = \left| s_1 s_2 s_3 s_4 \cdots s_n \right| \to Max}, \qquad (5.4 - 6)$$

při vazebních podmínkách (δ rovnic- sestavených z Vietových rovnic pro koeficienty $A_{n-1}, A_{n-2}, \cdots, A_{n-\delta}$), které nelze ovlivnit seřízením regulátoru

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&-A_{n-1} = s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1} + s_n \\
&+A_{n-2} = s_1 s_2 + \cdots + s_1 s_{n-1} + s_1 s_n + s_2 s_3 + \cdots + s_{n-1} s_n \\
&-A_{n-3} = s_1 s_2 s_3 + s_1 s_2 s_4 \cdots + s_1 s_2 s_n + s_2 s_3 s_4 + \cdots + s_{n-2} s_{n-1} s_n \\
&\qquad \cdots \\
&(-1)^\delta A_{n-\delta} = s_1 s_2 \cdots s_\delta + s_1 s_2 \cdots s_{\delta+1} + \cdots
\end{aligned}
}
\qquad (5.5-7)
$$

Úloha vázaného extrému se řeší metodou Lagrangeových multiplikátorů, která je uvedena v Příloze P4 a zobecněním výsledků této optimalizační úlohy je věta o násobnosti pólů.

Věta o násobnosti pólů

Nechť n - je stupeň charakteristického polynomu uzavřeného obvodu a δ je počet koeficientů tohoto polynomu, které není možno ovlivnit seřízením regulátoru. Pak velikost lineární regulační plochy $J_1(r_0,r_1,r_2)$ bude minimální, jestliže charakteristická rovnice má póly násobnosti

$$p_n = n - \delta + 1 .$$

Zbývající póly jsou násobnosti jedna. Jeden kořen maximální násobnosti dává menší hodnotu kriteria $J_1(r_0,r_1,r_2)$, než varianta s větším počtem pólů, jejichž násobnost je menší než p_n.

Úlohu optimálního seřízení PID regulátoru podle minima lineární regulační plochy není nutné vždy řešit včetně metody Lagrangeových multiplikátorů ale postačuje použít věty o násobnosti pólů a sestavit vazební podmínky z Vietových rovnic. Tento postup je možno shrnout do následujících bodů:

1) *Nalezení charakteristické rovnice uzavřeného obvodu.*
2) *Dělením koeficientů koeficientem a_n se převede charakteristický polynom do normovaného tvaru.*
3) *Určí se počet koeficientů δ, které není možno ovlivnit seřízením (parametry) regulátoru.*
4) *Aplikací věty o násobnosti pólů se určí požadovaná násobnost pólů.*
5) *Pro δ- koeficientů, které není možno ovlivnit parametry regulátorů, se sestaví vazební podmínky z Vietových rovnic.*
6) *Z dané násobnosti a řešením vazebních rovnic určíme póly charakteristické rovnice.*
7) *Výpočet koeficientů charakteristické a rovnice a parametrů regulátoru.*

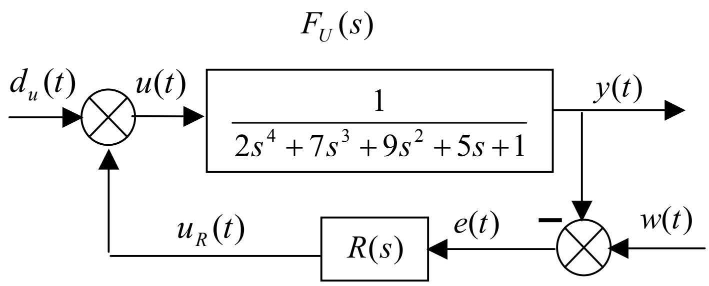
Připomeneme si pouze, že pomocí regulátoru typu PID není možno ovlivnit všechny koeficienty charakteristické rovnice uzavřeného obvodu. Postup seřizování parametrů PID regulátoru podle minima lineární regulační plochy ukážeme na následujících příkladech.

Příklad 5.5.1 Uvažujme model regulačního obvodu dle obr. 5.5.2 s regulátorem PID, jehož obrazový přenos je ve tvaru

$$R(s) = r_0 + \frac{r_1}{s} + r_2 s = \frac{r_0 s + r_1 + r_2 s^2}{s}.$$

Úkol.

Určete optimální seřízení PID regulátoru dle minima lineární regulační plochy.



Obr. 5.5.2 *Regulační obvod*

Řešení:

1) Přenos uzavřeného obvodu je roven

$$F_{edu}(s) = -\frac{s}{2s^5 + 7s^4 + 9s^3 + s^2(5 + r_2) + s(r_0 + 1) + r_1}.$$

2) Normovaná charakteristická rovnice pak je

$$s^5 + 3{,}5s^4 + 4{,}5s^3 + s^2\frac{(5 + r_2)}{2} + s\frac{(r_0 + 1)}{2} + \frac{r_1}{2} = 0\,. \qquad (1)$$

3) Počet koeficientů δ, které není možno ovlivnit seřízením regulátoru je δ = 2

$(A_4 = 3{,}5;\ A_3 = 4{,}5)$.

4) Podle věty o násobnosti pólů platí volíme $p_n = n - \delta + 1 = 4$, takže platí:

$$s_I = s_1 = s_2 = s_3 = s_4; \quad s_{II} = s_5.$$

5)Sestavíme vazební podmínky z Vietových rovnic

$$-3{,}5 = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = 4 \cdot s_I + s_{II}$$

$$4{,}5 = s_1s_2 + s_1s_3 + s_1s_4 + s_1s_5 + s_2s_3 + s_2s_4 + s_2s_5 + s_3s_4 + s_3s_5 + s_4s_5 = 6s_I^2 + 4s_Is_{II}.$$

6) Řešením rovnic dostaneme

$$-3{,}5 = 4\cdot s_I + s_{II} \qquad \rightarrow s_{II} = -3{,}5 - 4\cdot s_I \tag{2}$$

$$4{,}5 - 6s_I^2 - 4s_I s_{II} = 0 \quad \rightarrow 4{,}5 - 6s_I^2 - 4s_I(-3{,}5 - 4\cdot s_I) = 0. \tag{3}$$

Úpravou rovnice (2) dostaneme kvadratickou rovnici $10s_I^2 + 14s_I + 4{,}5 = 0$.
Řešením kvadratické rovnice dostaneme

$$s_{I\,1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4*10*4{,}5}}{20} = \begin{cases} -0{,}5 \\ -0{,}9 \end{cases}$$

Dosadíme-li $s_{I\,1,2}$ do (1) dostaneme $s_{II\,1} = -1{,}5;\ \ s_{II\,1} = +0{,}1.$ Je zřejmé, že $s_{II\,1} = +0{,}1$ je nestabilní kořen, takže řešením je dvojice: $s_I = -0{,}5 = s_1 = s_2 = s_3 = s_4$ a $s_{II} = -1{,}5.$

7) Charakteristický polynom je roven

$$A(s) = (s+0{,}5)^4(s+1{,}5) = s^5 + 3{,}5s^4 + 4{,}5s^3 + 2{,}75s^2 + 0{,}8125s + 0{,}09375.$$

Parametry regulátoru určíme z koeficientů rovnice (1). Platí

$$A_2 = \frac{5+r_2}{2} = 2{,}7500 \quad \rightarrow \quad r_2 = 0{,}5$$

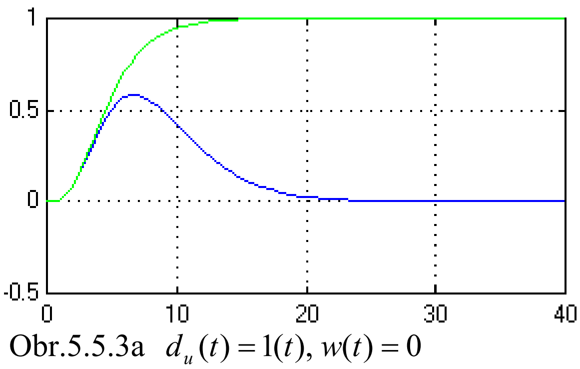
$$A_1 = \frac{1+r_0}{2} = 0{,}8125 \quad \rightarrow \quad r_0 = 0{,}625$$

$$A_0 = \frac{r_1}{2} = 0{,}09375 \quad \rightarrow \quad r_1 = 0{,}1875$$

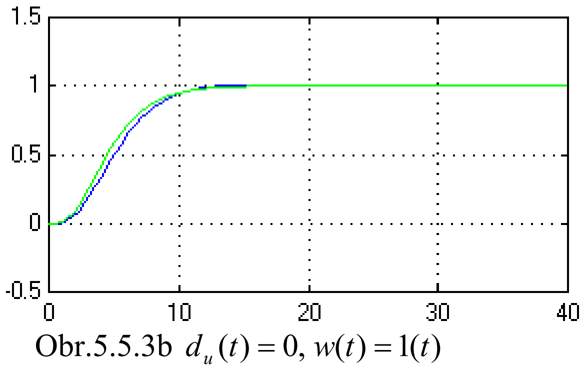
Seřízený regulátor má přenos

$$R(s) = r_0 + \frac{r_1}{s} + r_2 s = 0{,}625 + \frac{0{,}1875}{s} + 0{,}5s.$$

Průběh regulačních pochodů na vstup poruchy $d_u(t) = 1(t),\ w(t) = 0$ je na obr.5.5.3a, průběh regulačních pochodů na skok žádané hodnoty $d_u(t) = 0,\ w(t) = 1(t)$ je na obr. 5.5.3b.



Obr.5.5.3a $d_u(t) = 1(t),\ w(t) = 0$



Obr.5.5.3b $d_u(t) = 0,\ w(t) = 1(t)$

Z obr.5.5.3a,b lze usuzovat, že regulační pochod je pomalý, ale nekmitavý, což je charakteristickým znakem tohoto seřízení.

Konec příkladu

Úloha se výrazně zjednoduší, pokud je neovlivnitelný pouze koeficient A_{n-1} charakteristického polynomu. Řešení tohoto případu bude demonstrována na následujícím příkladě.

Příklad 5.5.2

Uvažujme regulovanou soustavu s přenosem $F(s)=\dfrac{1}{s^2+3s+1}$.

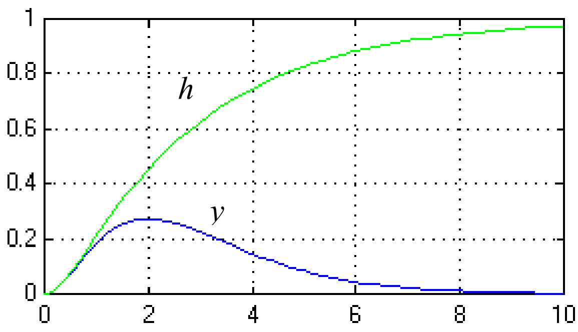
Regulátor je typu PI.
Proveďte seřízení parametrů PI regulátoru podle minima lineární regulační plochy.
Řešení:

1) Obrazový přenos uzavřeného obvodu je

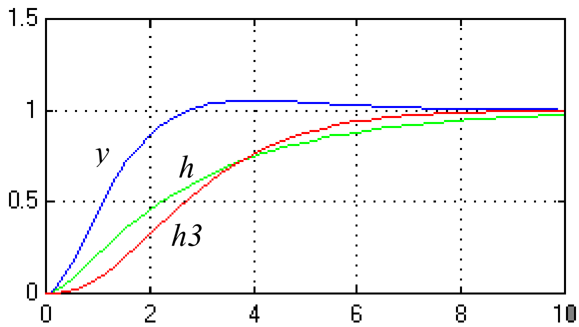
$$F_{edu}(s)=-\frac{F_u(s)}{1+F_u(s)R(s)}=-\frac{s}{s^3+3s^2+s(1+r_0)+r_1}.$$

2) Charakteristická rovnice je $s^3+3s^2+s(1+r_0)+r_1=0$, je v normovaném tvaru.
3) Pouze koeficient $A_{n-1}=3$ není ovlivnitelný seřízením regulátoru a tedy $\delta = 1$.
4) Podle věty o násobnosti pólu platí: $p_n=n-\delta+1=3$ a $p_I=p_1=p_2=p_3$.
5) Pro násobnost pólu je 3 : $-3=p_1+p_2+p_3=3p_I \quad \rightarrow \quad p_I=-1$
6) Charakteristický polynom je roven $(s+1)^3=s^3+3s^2+3s+1$
7) Parametry regulátoru jsou: $1+r_0=3 \quad \rightarrow \quad r_0=2, \quad r_1=1$.

Průběhy regulačních pochodů pro toto seřízení jsou na obr.5.5.4.



Obr.5.5.4a *Reg. pochod* $d_u(t)=1(t),\ w(t)=0$



Obr.5.5.4b *Reg. pochod* $d_u(t)=0,\ w(t)=1(t)$

Na obr.5.5.4b je zajímavý průběh regulované veličiny při skoku žádané hodnoty. Charakteristický polynom uzavřeného obvodu má sice trojnásobný pól, ale odezva na skokovou změnu žádané hodnoty vykazuje překmit. Tento překmit je způsoben čitatelem přenosu uzavřeného obvodu, který je roven

$$F_{yw}(s)=\frac{F_u(s)R(s)}{1+F_u(s)R(s)}=\frac{r_0s+r_1}{s^3+3s^2+s(1+r_0)+r_1}=\frac{2s+1}{s^3+3s^2+3s+1}.$$

Pro porovnání jsou na obr.5.5.4b zobrazeny přechodové charakteristiky h_u a h_3 - neregulované soustavy a soustavy s přenosem $1/(s+1)^3$.

Konec příkladu

Je možno konstatovat, že seřízením parametrů regulátoru podle minima lineární regulační plochy, se ovlivňují pouze póly charakteristické rovnice a není možno respektovat místo a tvar vstupující poruchové veličiny, tak jak tomu je při seřízení regulátoru podle kvadratických kriterií.

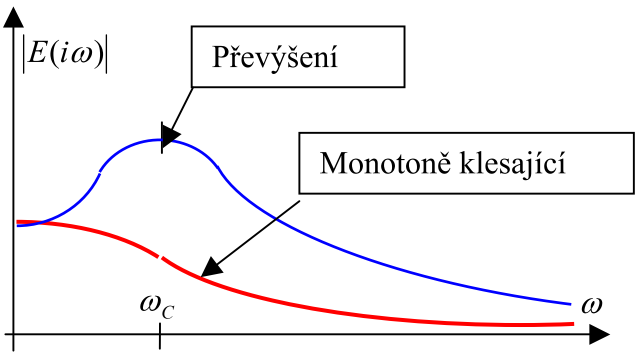
5.6 SEŘÍZENÍ REGULÁTORU PODLE OPTIMÁLNÍHO MODULU

Vzhledem ke skutečnosti, že seřízení regulátorů podle minima kvadratické regulační plochy je početně relativně náročné a zpravidla vykazuje kmity sice malých amplitud, ale které jsou málo tlumené a naopak, seřízení dle minima lineární regulační plochy je zase příliš pomalé, nebyly tyto postupy zatím v praxi příliš rozšířeny. V technické praxi nalezly širokého uplatnění metody a postupy, založené na seřízení parametrů regulátoru podle optimálního modulu, které dávají technicky uspokojivé výsledky.

5.6.1 Princip metody, podmínky pro seřízení parametrů PID-regulátoru

Uvažujme model regulačního obvodu dle obr. 5.5.1. Základem této metody je frekvenční odezva uzavřeného obvodu na zvolenou poruchovou veličinu nebo žádanou hodnotu. Požadavkem je, aby amplitudová charakteristika neobsahovala převýšení, které signalizuje náchylnost obvodu ke kmitání.

Požadovaný průběh amplitudové charakteristiky je monotónně klesající viz. obr. 5.6.1.



Obr.5.6.1 *Amplitudová charakteristika*

Předpokládejme, že obraz regulační odchylky na zvolenou poruchu nebo žádanou hodnotu je

$$E_d(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}. \qquad (5.6-1)$$

Podmínku monotónnosti je možno vyjádřit ve tvaru

$$\frac{d|E_d(i\omega)|}{d\omega} \le 0. \qquad (5.6-2)$$

Je možno ukázat, že podmínku (5.6 – 2) je možno nahradit podmínkou

$$\frac{d|E_d(i\omega)|^2}{d\omega} \le 0. \qquad (5.6-3)$$

Kvadrát absolutní hodnoty $|E_d(i\omega)|^2$ je možno vyjádřit ve tvaru

$$|E_d(i\omega)|^2 = E_d(i\omega)\cdot E_d(-i\omega) = \frac{D_m\omega^{2m} + D_{m-1}\omega^{2(m-1)} + \cdots + D_1\omega^2 + D_0}{C_n\omega^{2n} + C_{n-1}\omega^{2(n-1)} + \cdots + C_1\omega^2 + C_0} = G(\omega^2),$$

přičemž koeficienty C_i, D_i závisí obecně na parametrech regulátoru, které je možno určit ze vzorců

$$\begin{aligned} C_n &= a_n^2 \\ C_{n-1} &= a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-2} \\ C_{n-2} &= a_{n-2}^2 - 2a_{n-3}a_{n-1} + 2a_n a_{n-4} \\ &\cdots \\ C_2 &= a_2^2 - 2a_3 a_1 + 2a_0 a_4 \\ C_1 &= a_1^2 - 2a_0 a_2 \\ C_0 &= a_0^2 \end{aligned} \qquad (5.6-4)$$

Pro výpočet koeficientů D_i se použije též formule (5.6 – 4) s tím, že se za koeficienty a_i dosazují koeficienty b_i.
Pro tři parametry regulátoru je možno podmínku (5.6 – 3) nahradit podmínkou

$$\frac{D_0}{C_0} \ge \frac{D_1}{C_1} \ge \frac{D_2}{C_2}. \qquad (5.6-5)$$

Pro výpočet parametrů regulátoru $r_0, r_1, r_2,$ je možno nerovnost (5.6 – 5) přepsat do tvaru

$$\begin{matrix} \dfrac{D_0}{C_0} = \dfrac{D_1}{C_1} & & \dfrac{D_0}{C_0} > \dfrac{D_1}{C_1} \\ \dfrac{D_0}{C_0} = \dfrac{D_2}{C_2} & \text{nebo} & \dfrac{D_0}{C_0} > \dfrac{D_2}{C_2} \\ \dfrac{D_0}{C_0} = \dfrac{D_3}{C_3} & & \dfrac{D_0}{C_0} > \dfrac{D_3}{C_3} \end{matrix} \qquad (5.6-6)$$

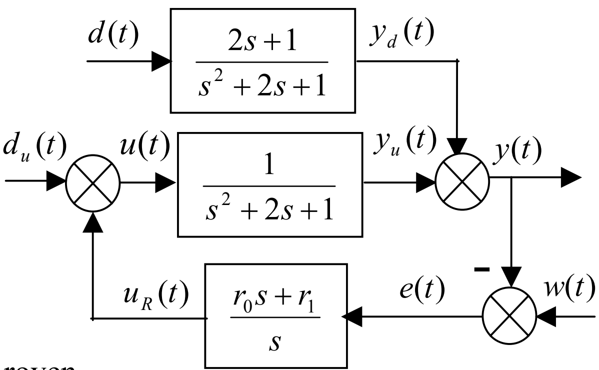
Příklad 5.6.1

Uvažujme model regulačního obvodu z Př. 5.4.3.

Určete:Optimální seřízení PI regulátoru podle optimálního modulu (5.6 – 6) pro

1) $d_u(t) = 1(t);\ d(t) = w(t) = 0.$
2) $d(t) = 1(t);\ d_u(t) = w(t) = 0.$
3) $w(t) = 1(t);\ d_u(t) = d(t) = 0.$

Řešení:



Obr. 5.6.2 *Regulační obvod*

1) L-obraz regulační odchylky $E_{dU}(s)$ je roven

$$E_{dU}(s) = -\frac{1}{s^3 + 2s^2 + (1+r_0)s + r_1}.$$

Koeficienty C_i, D_i čtverce absolutní hodnoty určíme ze (5.6 – 4)

$$C_0 = r_1^2, \qquad D_0 = (-1)^2 = 1$$
$$C_1 = (r_0+1)^2 - 2r_1 2, \qquad D_1 = D_2 = D_3 = 0,$$
$$C_2 = 4 - 2(r_0+1),$$
$$C_3 = 1.$$

Pro dva parametry regulátoru dostaneme dvě podmínky ve tvaru

$$\frac{D_0}{C_0} = \frac{D_1}{C_1} \rightarrow \frac{1}{r_1^2} = \frac{0}{(r_0+1)^2 - 4r_1}, \qquad (1)$$
$$\frac{D_0}{C_0} = \frac{D_2}{C_2} \rightarrow \frac{1}{r_1^2} = \frac{0}{4 - 2(r_0+1)}. \qquad (2)$$

Křížovým roznásobením získáme rovnosti

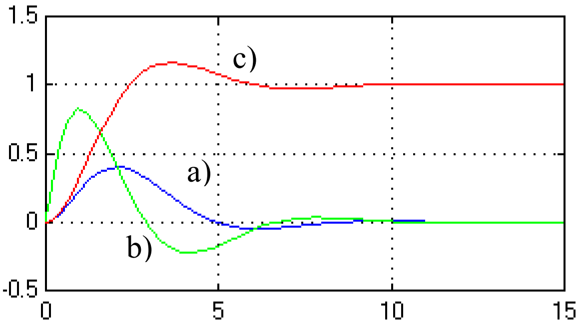
$$(r_0+1)^2 - 4r_1 = 0 \rightarrow 4 - 4r_1 = 0 \rightarrow r_{1opt} = 1,$$
$$4 - 2(r_0+1) = 0 \rightarrow r_{0\,opt} = 1.$$

Regulační pochody pro takto seřízený PI regulátor jsou na obr.5.6.3 pro

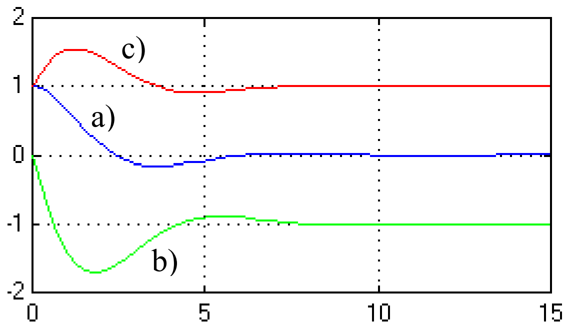
a) $d_u(t) = 1(t);\ d(t) = w(t) = 0.$

b) $d(t) = 1(t);\ d_u(t) = w(t) = 0.$

c) $w(t) = 1(t);\ d(t) = d_u(t) = 0.$



Obr.5.6.3a *Průběh y(t) pro a), b), c)*



Obr.5.6.3b *Průběh u(t) pro a), b), c)*

2) L-obraz regulační odchylky $E_U(s)$ je roven

$$E_U(s) = -\frac{2s+1}{s^3 + 2s^2 + (1+r_0)s + r_1}.$$

Koeficienty C_i se nemění, D_i jsou rovny $D_0 = 1, D_1 = 4, D_2 = 0.$

Pro dva parametry regulátoru dostaneme dvě podmínky ve tvaru

$$\frac{D_0}{C_0}=\frac{D_1}{C_1} \quad\rightarrow\quad \frac{1}{r_1^2}=\frac{4}{(r_0+1)^2-4r_1}, \qquad (3)$$

$$\frac{D_0}{C_0}=\frac{D_2}{C_2} \quad\rightarrow\quad \frac{1}{r_1^2}=\frac{0}{4-2(r_0+1)}. \qquad (4)$$

Křížovým roznásobením získáme rovnosti

$$(r_0+1)^2-4r_1=4r_1^2 \quad\rightarrow\quad 4r_1^2+4r_1-(r_0+1)^2=0, \qquad (5)$$

$$4-2(r_0+1)=0 \quad\rightarrow\quad r_{0\,opt}=1.$$

Optimální seřízení parametru r_1 určíme řešením kvadratické rovnice (5) pro $r_{0\,opt} = 1$

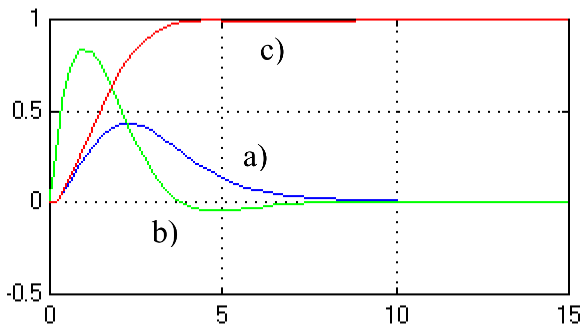
$$r_{1\,1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\begin{cases}0{,}61803,\\ -1{,}61803.\end{cases}$$

Regulační pochody pro takto seřízený PI regulátor jsou na obr. 5.6.4 pro

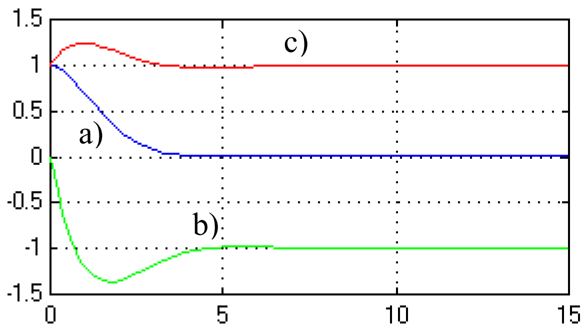
a) $d_u(t)=1(t);\, d(t)=w(t)=0.$

b) $d(t)=1(t);\, d_u(t)=w(t)=0.$

c) $w(t)=1(t);\, d(t)=d_u(t)=0.$



Obr.5.6.4a *Průběh y(t) pro a), b), c)*



Obr.5.6.4b *Průběh u(t) pro a), b), c)*

3) L-obraz regulační odchylky $E_w(s)$ je roven

$$E_U(s)=-\frac{s^2+2s+1}{s^3+2s^2+(1+r_0)s+r_1}.$$

Koeficienty C_i se nemění, D_i jsou rovny $D_0=1, D_1=2, D_2=1.$

Podmínkové rovnice jsou ve tvaru

$$\frac{D_0}{C_0} = \frac{D_1}{C_1} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r_1^2} = \frac{2}{(r_0+1)^2 - 4r_1} \qquad (6)$$

$$\frac{D_0}{C_0} = \frac{D_2}{C_2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r_1^2} = \frac{1}{4 - 2(r_0+1)} \qquad (7)$$

Křížovým roznásobením získáme rovnosti

$$(r_0+1)^2 - 4r_1 = 2r_1^2 \quad \rightarrow \quad 4r_1^2 + 4r_1 - (r_0+1)^2 = 0, \qquad (6)$$

$$4 - 2(r_0+1) = r_1^2 \quad \rightarrow \quad r_{0\,opt} = -0{,}5r_1^2 + 1. \qquad (7)$$

Rovnice (6), (7) představují soustavu nelineárních rovnic. Dosadíme-li $r_{0\,opt}$ z rovnice (7) do (6), pak vyloučíme r_0 a po úpravě dostaneme rovnost

$$-0{,}25r_1^4 + 4r_1^2 + 4r_1 - 4 = 0. \qquad (8)$$

Řešení provedeme Newtonovou metodou

$$r_{1,k+1} = r_{1,k} - \frac{f(r_{1,k})}{f'(r_{1,k})},$$

kde
$$f(r_1) = -0{,}25r_1^4 + 4r_1^2 + 4r_1 - 4 = 0.$$
$$f'(r_1) = -r_1^3 + 12r_1^1 + 4.$$

Pro počáteční odhad $r_{10} = 1$ a čtyřech výpočetních krocích dostaneme $r_{1\,opt} = 0{,}6222$. Dosazením $r_{1\,opt} = 0{,}6222$ do (7) můžeme vypočítat $r_{0\,opt} = 0{,}8064$. Optimální přenos takto seřízeného regulátoru je

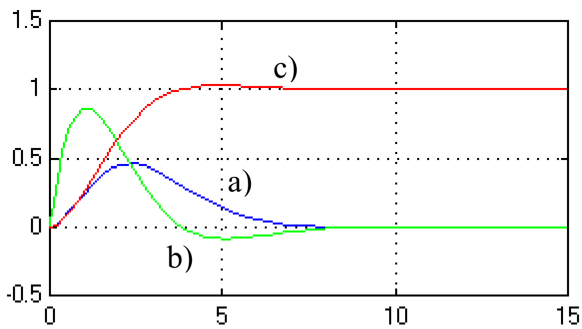
$$R(s) = 0{,}8064 + \frac{0{,}6222}{s}.$$

Regulační pochody pro takto seřízený regulátor jsou na obr.5.6.5 pro

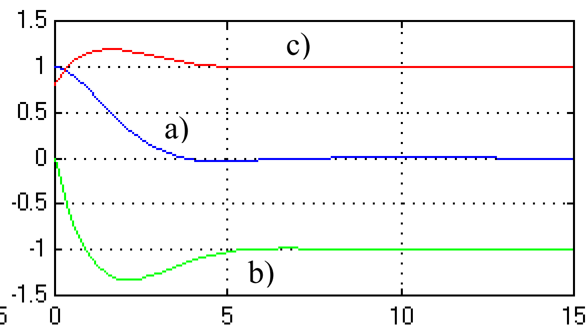
a) $d_u(t) = 1(t);\ d(t) = w(t) = 0.$

b) $d(t) = 1(t);\ d_u(t) = w(t) = 0.$

c) $w(t) = 1(t);\ d(t) = d_u(t) = 0.$



Obr.5.6.5a *Průběh y(t) pro a), b), c)*



Obr.5.6.5b *Průběh u(t) pro a), b), c)*

Konec příkladu

5.6.2 Modifikace metody seřizování regulátoru podle optimálního modulu

Pro praktické seřizování v provozech se osvědčila modifikovaná metoda optimálního modulu pro její jednoduchost a skutečnost, že umožňuje respektovat způsob aproximace dynamických vlastností soustavy . Její modifikace viz [10] umožňuje návrh parametrů regulátoru na základě znalosti časových konstant a zesílení regulované soustavy.

Seřízení parametrů PI regulátoru metodou optimálního modulu, jestliže obrazový přenos regulované soustavy je aproximován jednou dominantní časovou konstantou T_1 a časovou konstantou T_Σ. Přenos regulované soustavy $F_{APR}(s)$ pak je ve tvaru

$$F(s) = \frac{K_S}{\prod_{v=1}^{n}(T_v s+1)} \approx \frac{K_S}{(T_1 s+1)(T_\Sigma s+1)} = F_{APR}(s), \qquad (5.6-7)$$

kde pro T_1 platí:

$$T_1 >> T_\Sigma = \sum_{2}^{n} T_v \;; \qquad R(s) = K_R \frac{1+T_R s}{s} = \frac{K_R + K_R T_R s}{s} = \frac{r_1 + r_0 s}{s},\; r_0 = K_R T_R,\; r_1 = K_R$$

Parametry PI - Regulátoru: $K_R = \dfrac{1}{2K_S T_\Sigma}$; $T_R = T_1$. (5.6 – 8a,b)

a) Seřízení parametrů PI regulátoru metodou optimálního modulu, jestliže obrazový přenos regulované soustavy je aproximován třemi časovými konstantami $\boldsymbol{T_1}$**,** $\boldsymbol{T_2}$ a časovou konstantou $\boldsymbol{T_\Sigma}$**.** Přenos takové regulované soustavy aproximujeme přenosem $\boldsymbol{F_{APR}(s)}$ tvaru

$$F(s) = \frac{K_S}{\prod_{v=1}^{n}(T_v s+1)} \approx \frac{K_S}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_\Sigma +1)} = F_{APR}(s), \qquad (5.6-9)$$

kde je $T_1, T_2 >> T_\Sigma = \sum_{v=3}^{n} T_v$

Parametry PI - Regulátoru: $R(s) = K_R \dfrac{1+T_R s}{s}$

$$K_R = \frac{T_1^2 + T_1 T_2 + T_2^2}{2K_S (T_1+T_2) T_1 T_2}\;; \qquad T_R = \frac{(T_1^2+T_2^2)(T_1+T_2)}{T_1^2 + T_1 T_2 + T_2^2}. \qquad (5.6-10)$$

Parametry PID - Regulátoru: $R(s) = K_R \dfrac{(1+T_{R1}s)(1+T_{R2}s)}{s} = \dfrac{r_2 s^2 + r_0 s + r_1}{s}$, kde $r_2 = K_R T_{R1} T_{R1}$; $r_0 = K_R(T_{R1} + T_{R1})$; $r_1 = K_R$.

$$\boxed{K_R = \frac{1}{2K_S T_\Sigma}; T_{R1} = T_1; T_{R2} = T_2}. \qquad (5.6-11)$$

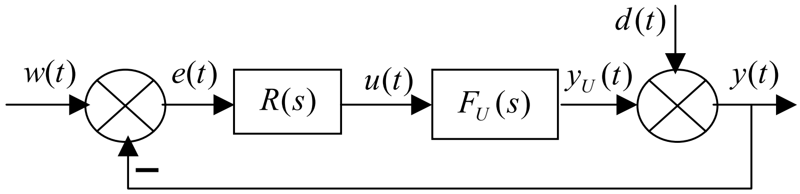
Návrh parametrů regulátorů typu PID bude demonstrováno na následujícím příkladech.

Příklad 5.6.2

Uvažujme regulační obvod dle obr.5.6.6.

$$F_U(s) = \frac{0{,}5}{(130s+1)(8s+1)},$$

$$R(s) = r_0 + \frac{r_1}{s} = \frac{r_0 s + r_1}{s}.$$



Obr. 5.6.6 *Model regulačního obvodu*

a) Pro aproximaci obrazovým přenosem (5.6 – 7) platí pro PI regulátor seřízení podle formule (5.6 – 8a,b)

$$K_R = \frac{1}{2K_S T_\Sigma} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}5 \cdot 8} = 0{,}125; \quad T_R = T_1 = 130; \quad r_0 = K_R T_R = 16{,}25; \quad r_1 = K_R = 0{,}125$$

b) Pro aproximaci obrazovým přenosem (5.6 – 27) platí pro PI regulátor seřízení podle formule (5.6 – 10) pro $T_1 = 130$ a $T_2 = 8$

$$K_R = \frac{T_1^2 + T_1 T_2 + T_2^2}{2K_S(T_1+T_2)T_1 T_2} = 0{,}250, \qquad T_R = \frac{(T_1^2+T_2^2)(T_1+T_2)}{T_1^2 + T_1 T_2 + T_2^2} = 130{,}02,$$

$$r_0 = K_R T_R = 32{,}623; \quad r_1 = K_R = 0{,}250.$$

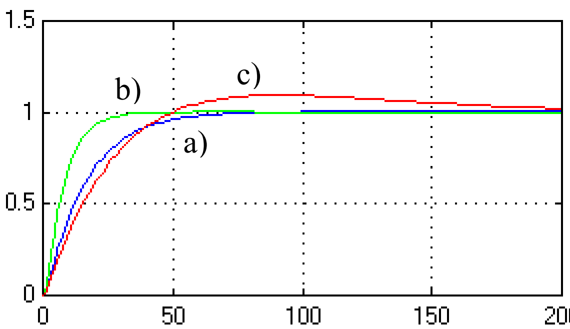
c) Pro aproximaci obrazovým přenosem (5.6 – 27) a PID regulátor platí seřízení podle formule (5.6 – 11) pro $T1 = 130$ a $T2 = 8$

$$K_R = \frac{1}{2K_S T_\Sigma} = 0{,}125; \; T_{R1} = T_1 = 130; \; T_{R2} = T_2 = 8,$$

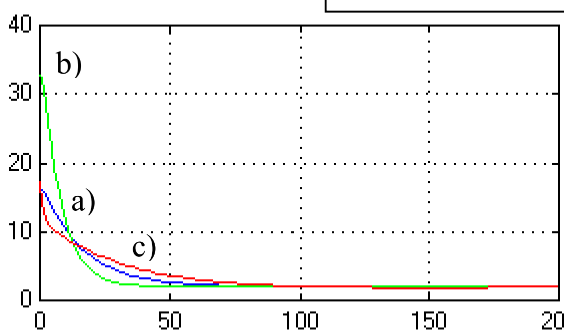
$$r_2 = K_R T_{R1} T_{R1} = 130; \; r_0 = K_R(T_{R1} + T_{R1}) = 17{,}25; \; r_1 = K_R = 0{,}25.$$

Regulační pochody pro seřízení podle a), b) a c) je na obr.5.6.7.

Konec příkladu

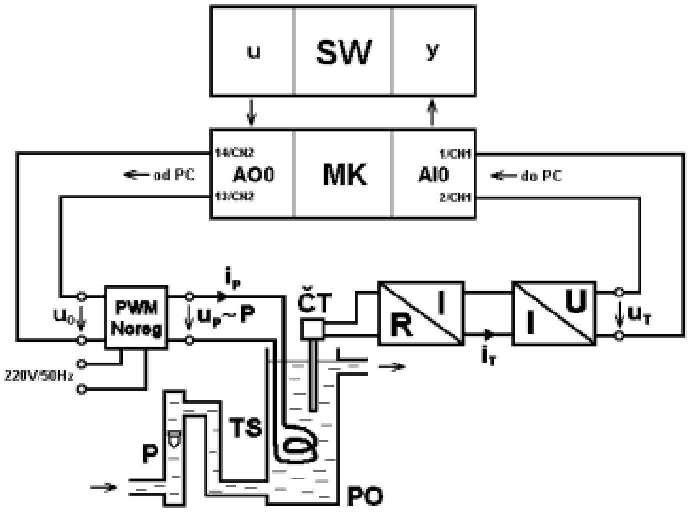


Obr.5.6.7a *Průběh regulované veličiny*



Obr.5.6.7b *Průběh akční veličiny*

Příklad 5.6.3 Uvažujme regulační obvod - průtokový ohřívač dle obr.5.6.8.



Obr.5.6.8 *Regulační obvod-průtokový ohřívač*

PO průtokový ohřívač
ČT čidlo teploty
TS topná spirála
P průtokoměr
PWM regulační výkonový člen Noreg s pulzně šířkovou modulací
R/I převodník odpor/proud
I/U převodník proud/napětí
MK měřící karta v PC, Advantech PCL812-PG
AO0 analogový výstup karty PCL812- PG
AI0 analogový vstup karty PCL812-PG
SW používaný software

Dynamické vlastnosti regulované soustavy byly aproximovány obrazovým přenosem $F_U(s) = Y(s)/U(s)$ (při konstantním průtoku a vstupní teplotě vody) ve tvaru

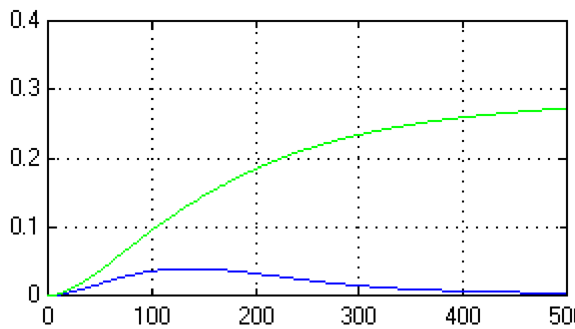
$$F_U(s) = \frac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)} = \frac{0{,}2862}{(149{,}52s+1)(39{,}92s+1)(0{,}34s+1)}.$$

Zadání: Proveďte optimální seřízení PI regulátoru podle optimálního modulu.

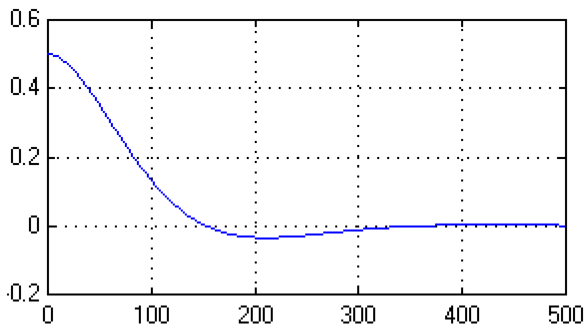
Řešení: Pro aproximaci obrazovým přenosem (5.6 – 9) platí pro PI regulátor seřízení podle formule (5.6 – 10) pro $T_1 = 149{,}52;\ T_2 = 39{,}92\ a\ T_\Sigma = 0{,}34$

$$K_R = \frac{T_1^2 + T_1 T_2 + T_2^2}{2K_S(T_1+T_2)T_1 T_2} = 0{,}052, \qquad T_R = \frac{(T_1^2+T_2^2)(T_1+T_2)}{T_1^2 + T_1 T_2 + T_2^2} = 151{,}65,$$

$$r_0 = K_R T_R = 7{,}89; \quad r_1 = K_R = 0{,}052.$$

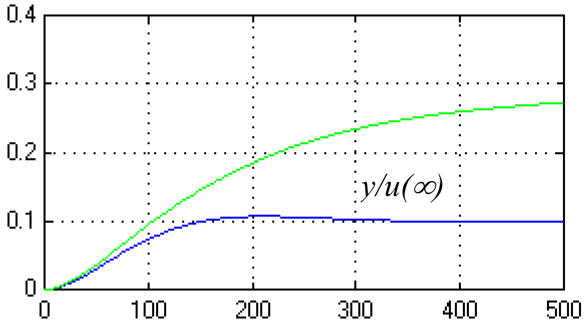


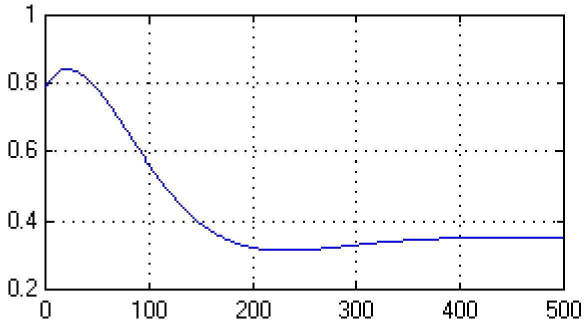
Obr.5.6.9a *Průběh regulované veličiny*



Obr.5.6.9b *Průběh akční veličiny*

Průběh regulované veličiny jako odezvy na poruchu na akční veličině $d_U = 0{,}5;\ w(t) = 0$ je na obr.5.6.9a, průběh akční veličiny je na obr. 5.6.9b. Průběhy regulačních pochodů jako





Obr.5.6.10a *Průběh regulované y veličiny* Obr.5.6.10b *Průběh akční veličiny*

odezvy na skok žádané hodnoty $w(t) = 0{,}1;\ d_U(t) = 0$ jsou na obr.5.6.10a,b. Průběh $y/u(\infty)$ představuje odezvu na skokovou změnu akční veličiny *u(∞)*, která zajistí dosažení žádané hodnoty. Je možno konstatovat, že akční veličina je v povoleném rozsahu a regulovaná veličina *y* ve srovnání *y/u*(∞) je výrazně rychlejší.

Konec příkladu

5.7 SEŘÍZENÍ REGULÁTORU PODLE ABSOLUTNÍHO TLUMENÍ

5.8 SYNTÉZA REGULÁTORU PODLE GEOMETRICKÉHO MÍSTA KOŘE-NŮ

Syntéza regulačního obvodu pomocí geometrického místa kořenů díky softwarové podpoře nabízí splnění celé řady technicky zajímavých požadavků. Kromě práce v příjemném prostředí MATLABu umožňuje syntézu, která směřuje k zajištění požadovaného maximálního překmitu odezvy uzavřeného obvodu v procentech nebo požadované doby regulace. Tyto požadavky jsou vstupními parametry této syntézy. Základem této metodiky je:

1) Metoda geometrického místa kořenů.
2) Předpoklad, že charakteristický polynom obrazového ***přenosu uzavřeného obvodu je možno aproximovat kvadratickým polynomem s dominantním komplexně sdruženým pólem***.
3) Využití vlastností soustavy 2.řádu s komplexně sdruženým kořeny (viz Kap.3.3.3 a obrazový přenos (3.3 – 6)), pro které jsou póly a tím i dynamické vlastnosti soustavy určeny ***relativním tlumením*** ξ a ***přirozenou úhlovou frekvencí*** ω_n .

4) Znalost a) struktury uzavřeného obvodu,
   b) struktury přenosu kompenzátoru – regulátoru,
   b) nul a pólů otevřeného obvodu.

5) Využití znalostí o vlivu pólů a nul připojených k přenosu otevřeného obvodu.

Výše uvedené body budou níže diskutovány a popsány.

5.8.1 Předpoklady a princip metody

1) Metoda geometrického místa kořenů

Metoda geometrického místa kořenů, byla vysvětlena v kap.3.5 včetně programové podpory MATLABu (funkce rlocus, rlocfind). Na základě **znalostí pólů a nul otevřené smyčky** zobrazuje pro měnící se zesílení otevřené smyčky **trajektorie kořenového hodografutrajektorie kořenů charakteristického polynomu uzavřené smyčky**. Stabilitu uzavřeného obvodu je proto možno průběžně kontrolovat v kořenovém hodografu.

2) **Aproximace obrazového přenosu uzavřeného obvodu**

Na základě zkušeností je známo, že je možno aproximovat obrazový přenos uzavřenéhoobvodu přenosem soustavy 2. řádu s dominantním komplexně sdruženým pólem.Tento předpoklad je jistě v mnoha běžných případech v principu možný a akceptovatelný. Aproximace se však ***při konkrétním návrhu neprovádí***, pouze se využívá vlastností těchto soustav.

3) Využití vlastností soustavy 2. řádu s komplexně sdruženým kořeny

Technika syntézy pomocí metody geometrického místa kořenů vychází dle 2) z předpokladu, že ***přenos uzavřeného obvodu je možno aproximovat soustavou 2. řádu s dominantními komplexně sdruženým pólem***. ***Vliv nul čitatele uzavřeného obvodu na jeho dynamiku není možno při syntéze bezprostředně zohlednit. Kontroluje se simulačními výpočty odezva uzavřeného obvodu na zvolený vstupní signál.***

V kap. 3.3.3 byly odvozeny a diskutovány vlastnosti soustavy 2. řádu s komplexními kořeny. Za výše uvedených předpokladů je možno přechodovou funkci uzavřeného obvodu vyjádřit ve tvaru viz (3.3 – 7)

$$h(t) = 1 - \exp(-\xi\omega_n t)[\cos\omega_n\sqrt{1-\xi^2} + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\xi^2}] =$$
$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\exp(-\xi\omega_n t)(\cos\omega_n\sqrt{1-\xi^2} - \varphi); \quad \varphi = arctg\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}; \quad (5.8-1)$$

kde ξ je poměrné tlumení a ω_n je přirozená frekvence.

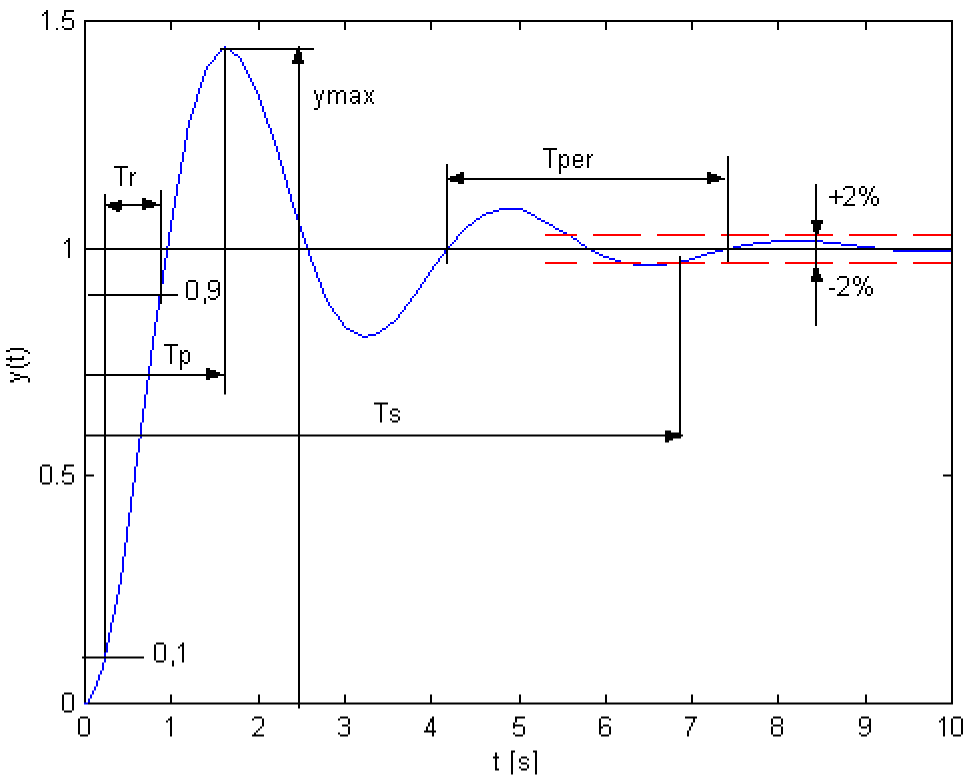
Pro dané ξ a ω_n jsou póly přenosu uzavřeného obvodu rovny viz obr.5.8.2.

$$\omega = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}; \quad \alpha = -\varsigma\omega_n. \quad (5.8-2)$$

Je zřejmé, že hodnoty relativního tlumení ξ a přirozené úhlové frekvence ω_n uzavřeného obvodu nejsou z popisu otevřené smyčky známy. Je však možno syntézu provést tak, aby parametry ξ, ω_n uzavřeného obvodu se blížily k parametrům požadovaným $\xi_{POŽ}$, $\omega_{n\,POŽ}$.

Požadované hodnoty relativního tlumení a přirozené úhlové frekvence získáme z charakteristik přechodové funkce uzavřeného obvodu 2. řádu. Z hlediska posouzení kvality regulačních pochodů jsou významné charakteristiky přechodové funkce (5.8 – 1) viz obr.5.8.1:

a) Doba dosažení dosažení prvního maxima $T_p = hmax$ (*Peak time* T_p).
b) Překmit v % (*Percent overshoot % OP*).
c) Doba regulace (*Settling time* T_s).
d) Doba náběhu (*Rise Time* T_r).



Obr.5.8.1 *Charakteristiky regulačního pochodu*

a) Doba dosažení prvního maxima $T_p = t_{max}$ (*Peak time* T_p)

Dobu T_p určíme z podmínky extrému $\frac{d}{dt}h(t) = 0$ přechodové funkce. Platí

$$\frac{d}{dt}h(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\exp(-\xi\omega_n t)\cdot\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})t = 0 \quad .$$

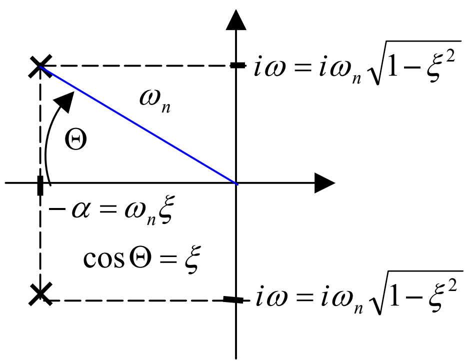
Funkce bude nulová, jestliže $\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})t = 0$. Musí býti splněna podmínka

$$(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})t = n\pi \quad \rightarrow \quad t = \frac{n\pi}{(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})}$$

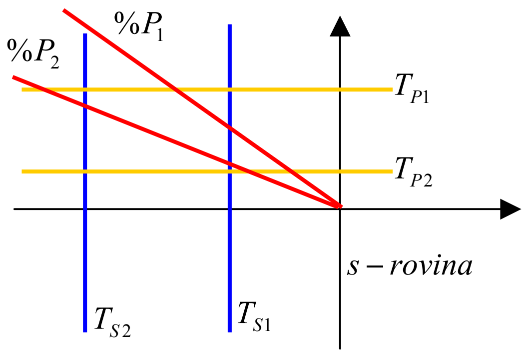
Pro $n = 1$ dostaneme souřadnici prvního maxima

$$\boxed{T_p = t_{\max} = \frac{\pi}{(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})} = \frac{\pi}{\omega}; \omega = (\omega_n\sqrt{1-\xi^2})}. \qquad (5.8-3)$$

Ze vztahu (5.8 – 2) je vidět, že doba dosažení prvního maxima T_p závisí pouze na imaginární části komplexně sdruženého kořenu. Znamená to tedy, že horizontální přímka v *s*–rovině určuje póly, ve kterých je doba T_p konstantní, viz přímky T_{p1} ,T_{p2} na obr.5.8.3.



Obr.5.8.2 *Póly komplexně sdružené vyjádřené parametry ξ a ω_n v s–rovině*



Obr.5.8.3 *Přímky, určující póly pro konstantní T_{S1}, T_{S1}, T_{p1}, T_{p2}, a $\%P_1$, $\%P_2$*

b) Překmit v % (*Percent overshoot % OPP)*

Překmit v % (*Percent overshoot % OP*) – je definován jako hodnota překmitu v procentech ustálené hodnoty přechodové funkce

$$\boxed{\%P = \frac{h_{\max} - h(\infty)}{h(\infty)}\cdot 100}. \qquad (5.8-4)$$

První maximum určíme z (5.8 – 1) pro $t_{\max} = T_p$ dle (5.8 – 3)

$$h_{\max} = h(t_{\max}) = 1 - \exp(-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2})\cdot[\cos\pi + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2})}\sin\pi] = 1 - \exp(-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}) \; .$$

Je–li $h(\infty) = 1$ pak

$$\boxed{\%P = \exp(-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}) * 100}. \qquad (5.8 - 5)$$

Poměrné tlumení ξ je možno z (5.8 – 5) vyjádřit ve tvaru

$$\boxed{\xi = \frac{-\ln(\%P/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%P/100)}}}. \qquad (5.8 - 5)$$

Ze vzorce pro výpočet překmitu v % je zřejmé, že velikost překmitu závisí pouze na koeficientu relativního tlumení ξ. Radiální přímka, která svírá s reálnou osou úhel $\Theta = \cos^{-1}\xi$ v komplexní rovině *s*, určuje množinu pólů, pro které je překmit v procentech konstantní viz přímky $\%P_1$ a $\%P_2$ na obr.5.8.3.

Pomocným či řídícím parametrem syntézy, může být relativní tlumení uzavřeného obvodu ξ, které lze pro zvolený překmit v procentech %P vypočítat z výrazu (5.8 – 5).

c) Doba regulace (*Settling time T_s*)

Doba regulace (*Settling time T_s*) – doba nutná k tomu, aby přechodová funkce *h(t)* dosáhla a zůstala v tolerančním poli $\pm 2\%$ hodnoty $h(\infty)$.

Pro výpočet doby regulace je možno položit $\cos(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})t = 1$. Pak pro dobu regulace platí

$$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\exp(-\xi\omega_n t) = 0{,}02 \quad \rightarrow \quad T_s = \frac{-\ln(0{,}02\cdot\sqrt{1-\xi^2})}{\xi\omega_n}.$$

Pro rozsah parametru $0 \le \xi < 0{,}9$ je možno dobu regulace aproximovat funkcí

$$\boxed{T_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{\alpha}; \quad \alpha = \xi\omega_n}. \qquad (5.8 - 6)$$

Ze vzorce pro výpočet doby regulace plyne, že doba regulace je nepřímo úměrná reálné části komplexně sdruženého pólu uzavřeného obvodu α. Horizontální přímka v *s*–rovině, určuje množinu pólů, pro které je doba regulace konstantní, viz přímky T_{S1} a T_{S2} na obr.5.8.3.

Požadovaná doba regulace T_s je další řídící parametr syntézy.

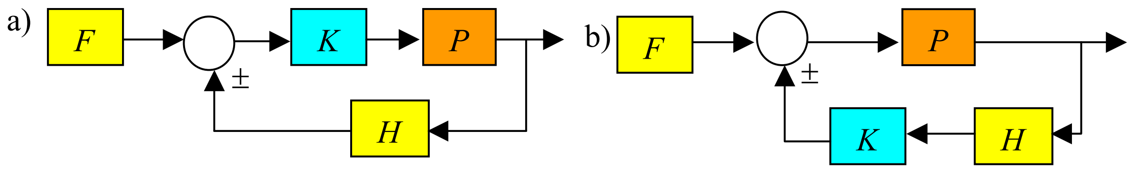
d) Doba náběhu (*Rise Time T_r*)

Doba náběhu (*Rise Time T_r*) – doba nutná k tomu, aby přechodová funkce *h(t)* z hodnoty $0{,}1\,h(\infty)$ dosáhla hodnoty $0{,}9\,h(\infty)$ (z ustálené hodnoty přechodové funkce) .

4) Znalost struktury

a) Uzavřeného obvodu

V rámci dosažitelných softwarových prostředků jsou uvažovány dvě struktury uzavřeného obvodu viz obr.5.8.4a,b. Podle konkrétního zadání regulačního obvodu se definují jednotlivé obrazové přenosy bloků *F, P, H*.



F–přenos filtru, K–zesílení otevřené smyčky, P–přenos soustavy, H–přenos čidla

Obr. 5.8.4 *Struktury uzavřeného obvodu*

b) Struktury přenosu kompenzátoru – regulátoru

Syntéza regulačního obvodu pomocí geometrického místa kořenů umožňuje návrh obvodu s regulátorem (kompenzátorem) typu PID i s kompenzátorem typu filtr s fázovým zpožděním nebo předstihem. Pro uvažovanou techniku syntézy je třeba přenos kompenzátoru vyjádřit pomocí pólů a nul.

a) Vyjádříme-li regulátor PD pomocí nul dostaneme:

$$R(s) = r_0 + r_2 s = r_2 \cdot (s + \frac{r_0}{r_2}) = K \cdot (s + s_{BR2}), \qquad (5.8-7)$$

kde je K zesílení otevřené smyčky a platí $K = r_2$; $s_{BR2} = \frac{r_0}{r_2} \rightarrow r_0 = r_2 * s_{BR2}$.

PD – regulátor reprezentuje v otevřené smyčce nulu a zesílení K.

b) Pro regulátor PI platí:

$$R(s) = r_0 + \frac{r_1}{s} = \frac{r_0 s + r_1}{s} = \frac{r_0 (s + \frac{r_1}{r_0})}{s} = \frac{K(s + s_{BR1})}{s}, \qquad (5.8-8)$$

kde je K zesílení otevřené smyčky a platí $K = r_0$; $s_{BR1} = \frac{r_1}{r_0} \rightarrow r_1 = r_0 * s_{BR1}$.

PI – regulátor reprezentuje v otevřené smyčce pól roven nule, nulu s_{BR1} a zesílení K.

c) Pro regulátor typu PID platí

$$R(s) = r_0 + \frac{r_1}{s} + r_2 s = \frac{r_2 s^2 + r_0 s + r_1}{s} = \frac{r_2 (s^2 + \frac{r_0}{r_2} s + \frac{r_1}{r_2})}{s} = \frac{K(s + s_{BR0})(s + s_{BR0})}{s}, \qquad (5.8-9)$$

kde je K zesílení otevřené smyčky a platí $K = r_2$; $s_{BR0} + s_{BR1} = \frac{r_0}{r_2}$; $s_{BR0} \cdot s_{BR1} = \frac{r_1}{r_2}$.

PID – regulátor reprezentuje v otevřené smyčce pól nula, dvě nuly s_{BR1}, s_{BR2} a zesílení K.

Pro výpočet zesílení PID regulátoru z nul s_{BR0} a s_{BR1} a zesílení K platí

$$R(s)=r_0+\frac{r_1}{s}+r_2 s=\frac{r_2 s^2+r_0 s+r_1}{s}=\frac{r_2(s^2+\frac{r_0}{r_2}s+\frac{r_1}{r_2})}{s}=\frac{K(s+s_{BR1})(s+s_{BR2})}{s}=\frac{Ks^2+K(s_{BR1}+s_{BR2})s+Ks_{BR1}\cdot s_{BR2})}{s}$$

Porovnáním koeficientů s (5.8 – 9) dostaneme

$$\boxed{\begin{aligned}&r_2=K;\\&\frac{r_0}{r_2}=(s_{BR1}+s_{BR2})\rightarrow r_0=r_2*(s_{BR1}+s_{BR2});\\&\frac{r_1}{r_2}=s_{BR1}\cdot s_{BR2}\qquad\rightarrow r_1=r_2*s_{BR1}\cdot s_{BR2}.\end{aligned}} \qquad (5.8-10)$$

Je-li třeba ze zesílení PID regulátoru určit nuly a pól kompenzátoru postupujeme následovně:

$$r_2=K;$$
$$\frac{r_0}{r_2}=K_0=(s_{BR1}+s_{BR2})\rightarrow K_0=(\frac{K_1}{s_{BR2}}+s_{BR2})\rightarrow s_{BR2}^2+K_1=K_0 s_{BR2}\rightarrow s_{BR2}^2+K_1-K_0\cdot s_{BR2}=0 \qquad (1)$$
$$\frac{r_1}{r_2}=K_1=s_{BR1}\cdot s_{BR2}\quad\rightarrow\quad s_{BR1}=\frac{K_1}{s_{BR2}}. \qquad (2)$$

Řešením kvadratické rovnice (1) určíme s_{R2}

$$\boxed{s_{BR2\,12}=\frac{K_0\pm\sqrt{(K_0)^2-4\cdot K_1}}{2};\quad K_0=\frac{r_0}{r_2};\quad K_1=\frac{r_1}{r_2}.} \qquad (5.8-11)$$

Příklad 5.8.1 Pro zesílení PID regulátoru $P=0{,}1194;\quad I=4{,}4528;\quad D=0{,}1104$ určete nuly a póly.

Řešení: Pro $r_0=P=0{,}1194;\quad r_1=I=4{,}4528;\quad r_2=D=0{,}1104$ je možno podle (5.8 – 11) určit nuly

$$s_{R2\,12}=\frac{1{,}001\pm\sqrt{(1{,}001)^2-4\cdot 40{,}33}}{2}=\frac{1{,}001\pm\sqrt{1{,}002-161{,}33}}{2}=\frac{1{,}001\pm i12{,}66}{2}=0{,}5\pm i6{,}33;$$
$$K_0=\frac{0{,}1192}{0{,}1104}=1{,}001;\quad K_1=\frac{4{,}4528}{0{,}1104}=40{,}33.$$

Dále je možno se přesvědčit, že je splněna podmínka (2)

$$s_{RB1}=\frac{K_1}{s_{RB2}}\quad\rightarrow\quad s_{RB1}*s_{RB1}=K_1\quad\rightarrow\quad(0{,}5+i6{,}33)*(0{,}5-i6{,}33)=40{,}33$$

a ověřit správnost čitatele

$$(s+0{,}5+i6{,}33)(s+0{,}5-i6{,}33)=s^2+s+0{,}25+40{,}0689=s^2+s+40{,}3189$$

Konec příkladu

$0{,}1104(s^2+s+40{,}3189)=0{,}1104s^2+0{,}1104s+4{,}4512$. Správnost je potvrzena.

d) Filtr s fázovým zpožděním má přenos

$$R_F(s) = \frac{1+T_{F1}s}{1+T_{F2}s} = \frac{1+T_F s}{1+aT_F s}, \quad T_{F2} > T_{F1}, a > 1. \qquad (5.8-12)$$

Vyjádřit přenos filtru s fázovým zpožděním pomocí nul a pólů, a respektuje-li se zesílení otevřené smyčky, pak platí

$$K \cdot \frac{s+s_{BF}}{s+s_F} = K \cdot \frac{s+\frac{1}{T_F}}{s+\frac{1}{a \cdot T_F}} = K \cdot a \cdot \frac{1+T_F s}{1+aT_F s} = Ka\frac{1+T_{F1}s}{1+T_{F2}s} = K \cdot a \cdot R_F(s);\ a > 1 \qquad (5.8-13)$$

kde

$$R_F(s) = \frac{1+T_{F1}s}{1+T_{F2}s} = \frac{1+T_F s}{1+aT_F s}; \quad s_{BF} = \frac{1}{T_F} = \frac{1}{T_{F1}}; s_F = \frac{1}{a \cdot T_F} = \frac{1}{T_{F2}}.$$

Filtr s fázovým zpožděním reprezentuje v otevřené smyčce pól s_F , nula s_{BF} a zesílení K.

e) Filtr s fázovým předstihem má přenos

$$R_F(s) = \frac{1+T_{F1}s}{1+T_{F2}s} = \frac{1+T_F s}{1+a \cdot T_F s}; T_{F1} > T_{F2};\ a < 1. \qquad (5.8-14)$$

Filtr s fázovým předstihem vyjádřený pomocí nul a pólů má tvar

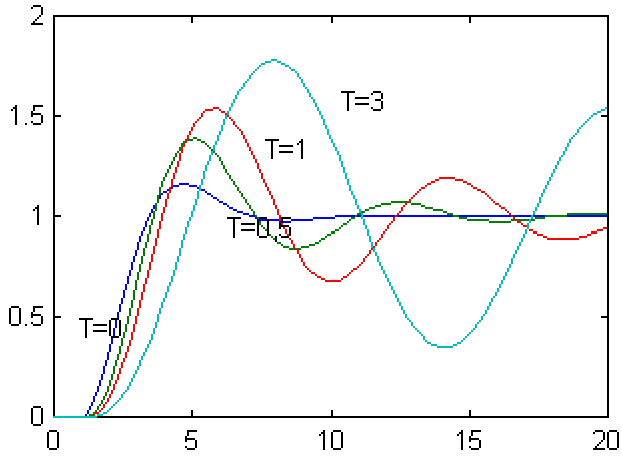
$$K \cdot \frac{s+s_{BF}}{s+s_F} = K \cdot a \cdot \frac{1+T_F s}{1+aT_F s} = Ka\frac{1+T_{F1}s}{1+T_{F2}s} = K \cdot a \cdot R_F(s);\ a < 1. \qquad (5.8-15)$$

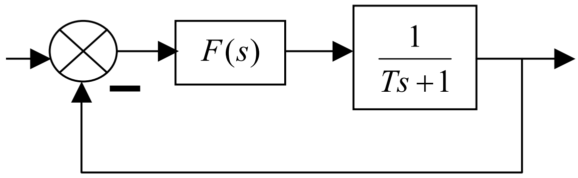
Filtr s fázovým předstihem reprezentuje v otevřené smyčce pól s_F a nula s_{BF} a zesílení K.

5) Připojení pólů a nul

Vliv připojení nul a pólů bude demonstrováno na následujících obrázcích. Uvažujme přenos $F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$, na kterém bude ukázán vliv nul a pólu připojených do otevřené smyčky a za uzavřenou smyčku.

a) Připojení pólu ve tvaru $\frac{1}{Ts+1}$ k přenosu otevřené smyčky je na obr.5.8.5a.

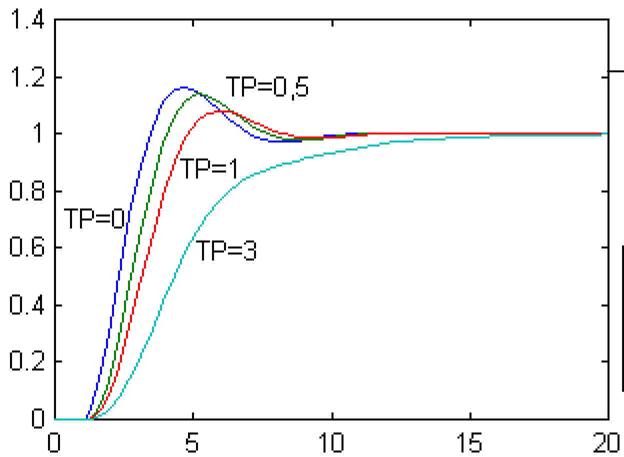


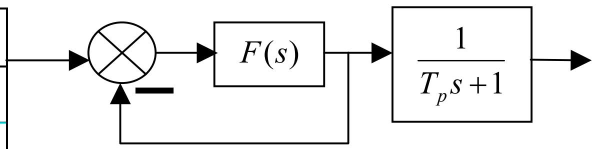


Obr.5.8.5a *Připojení pólu do otevřené smyčce*

Připojením pólu do otevřené smyčky způsobuje posun pólů (trajektorií) uzavřené smyčky k imaginární ose a tím se zvyšuje přeregulování uzavřeného obvodu.

b) Připojení pólu ve tvaru $\frac{1}{T_p s+1}$ k přenosu uzavřené smyčky

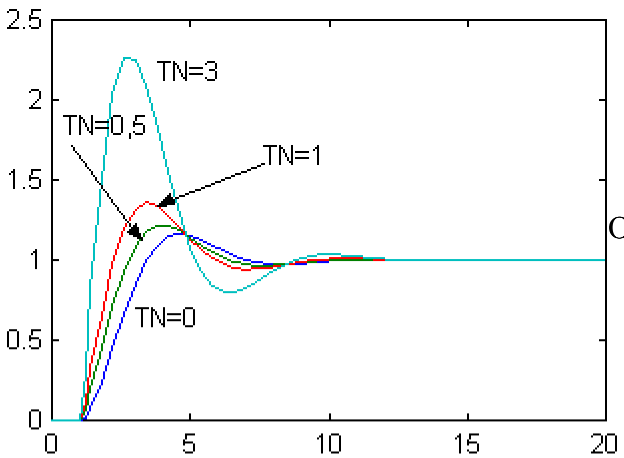


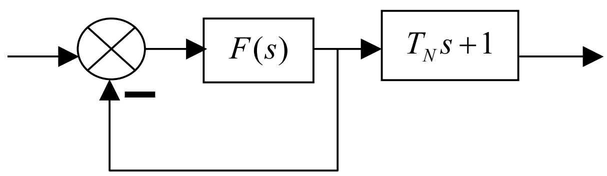


Obr.5.8.5b *Připojení pólu za uzavřenou smyčku*

Připojením pólu za uzavřenou smyčku má opačný efekt než v případě a): způsobuje tlumení odezvy celého obvodu.

c) Připojení nul ve tvaru $(T_N s+1)$ k přenosu uzavřené smyčky

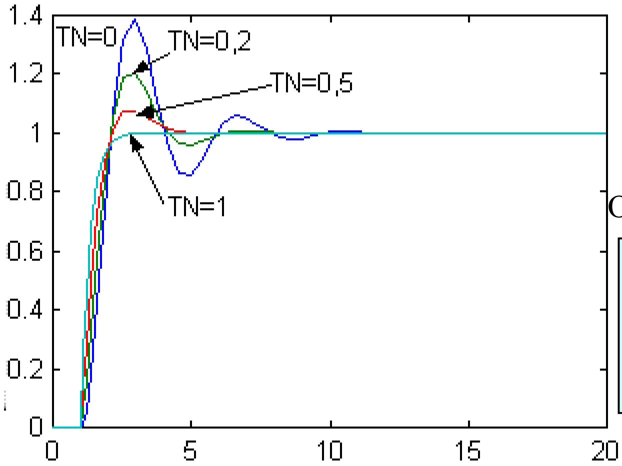


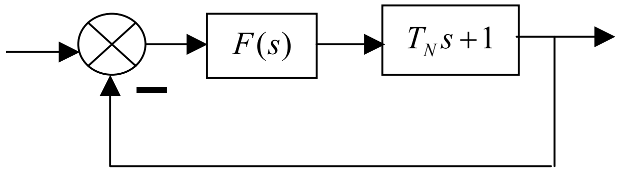


Obr.5.8.5c *Připojení nuly za uzavřenou smyčku*

Připojením nuly za uzavřenou smyčku zkracuje dobu náběhu a zvyšuje převýšení odezvy celého obvodu.

d) Připojení nuly ve tvaru $(T_N s+1)$ k přenosu otevřené smyčky

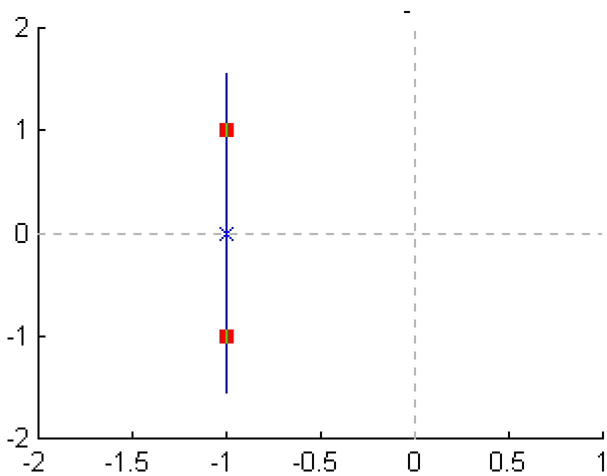




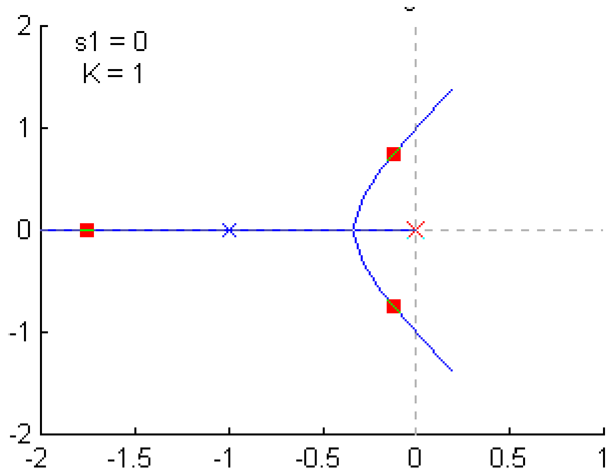
Obr.5.8.5d *Připojení nuly do otevřené smyčky*

Připojením nuly do otevřené smyčky se stabilizuje a tlumí regulační pochody uzavřené smyčky. Má vliv na trajektorie geometrického místa kořenů .

Z hlediska syntézy jsou nejvýznamnější případy a) a d). Ukážeme jaký vliv má připojení pólu a nul na trajektorie geometrického místa kořenů pro přenos otevřené smyčky $F(s)=1/s^2+2s+1$. Kořenový hodograf bez připojené nuly a pólu je na obr. 5.8.5e a

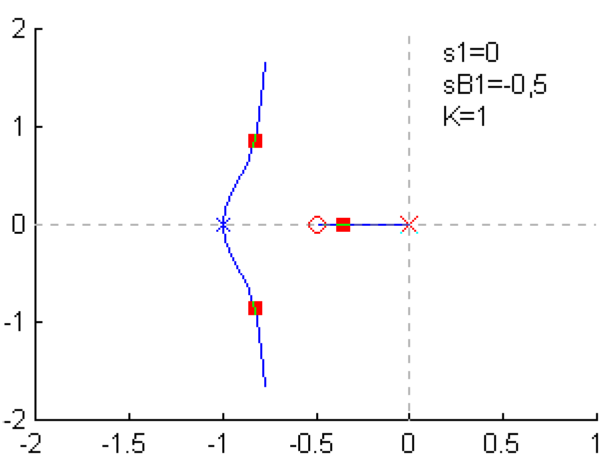


Obr.5.8.5e *Kořenový hodograf K = 1*

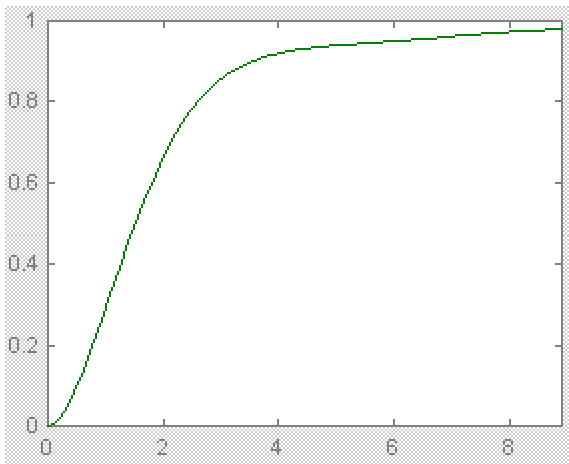


Obr.5.8.5f *Kořenový hodograf K = 1, pól $s_1 = 0$*

s připojeným pólem na obr.5.8.5f. Vliv připojení další nuly je na obr.5.8.5g a přechodová charakteristika uzavřeného obvodu pro tyto parametry je zobrazena na obr.5.8.5h.



Obr.5.8.5g *Koř. hodograf K=1, $s_1 = 0$, $s_{B1} = -0,5$*



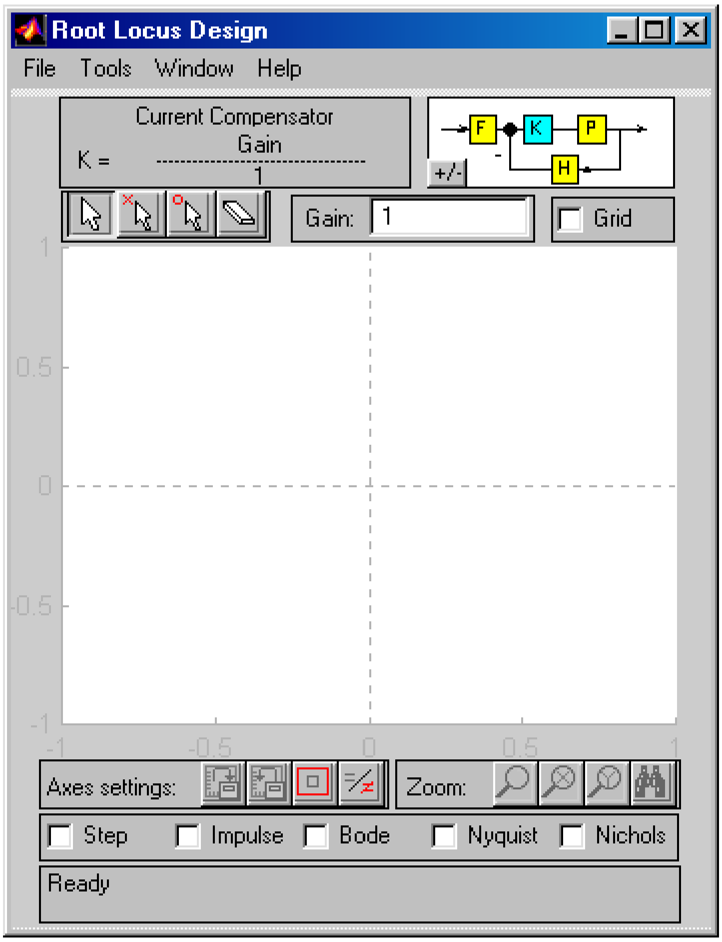
Obr.5.8.5h *Přechodová charakteristika*

5.8.2 Softwarová podpora syntézy regulátorů podle geometrického místa kořenů

V softwarovém prostředí MATLABu je zařazen „Control System Toolbox“, ze kterého je možno použit specializovaného produktu pro syntézu regulačních obvodů pomocí geometrického místa kořenů – rltool (Root Locus Design). Podrobný popis lze najít v [5] a v „Helpu“. V následujícím textu bude popsán pouze v hlavních rysech, aby byl umožněn studentům rychlý přístup k praktické syntéze.

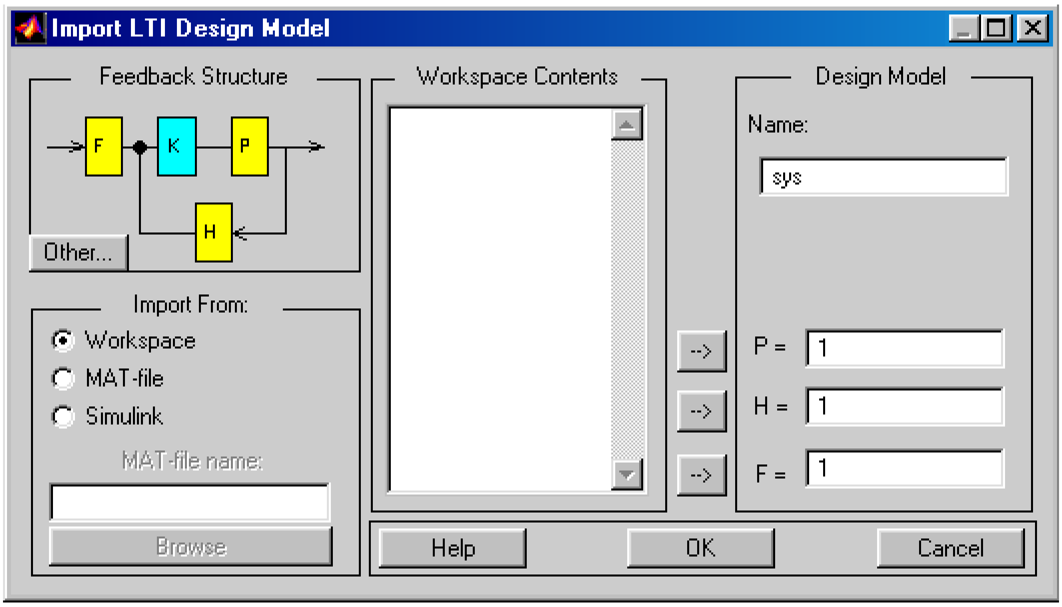
Program rltool

1) Spustí se buď z příkazové řádky nebo po spuštění programu v M-souboru.
2) Pracuje s LTI objektem, který je třeba umístit do Workspace.
3) Příkazem rltool se spustí program (Root Locus Design) a současně se otevře okno viz obr.5.8.6



Obr.5.8.6 *Okno „Root Locus Design“*

1) **Import LTI modelů do programu rltool**. Import modelů realizujeme v menu *File* viz obr.5.8.7a a vybráním položky „*Import LTI Design Model*" viz obr.5.8.7. Okno má čtyři části:

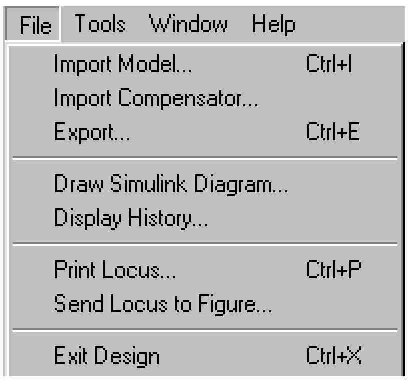


Obr.5.8.7 *Okno „Import LTI Design Model"*

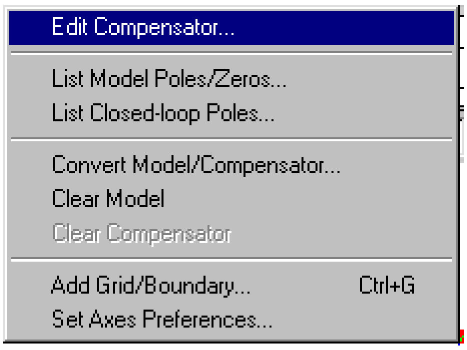
a) V části „Feedback Structure" se pomocí tlačítka „*Other*" volí zpětnovazební struktura.
b) V části „Import From" se volí odkud se bude importovat.
c) V části „Workspace Contents" je seznam LTI objektů, které se mohou jejich označením použít.
d) V části „Design model" se volí jméno uzavřeného obvodu a stiskem šipek u označení P,H,F se těmto blokům přiřadí označený LTI model z „Workspace Contents". Nuly a póly soustavy P, dynamiky čidel H a filtru F je možno zobrazit viz obr. 5.8.10a.

Okno „ *Import LTI Design Model* " se zavře tlačítkem OK.

a)



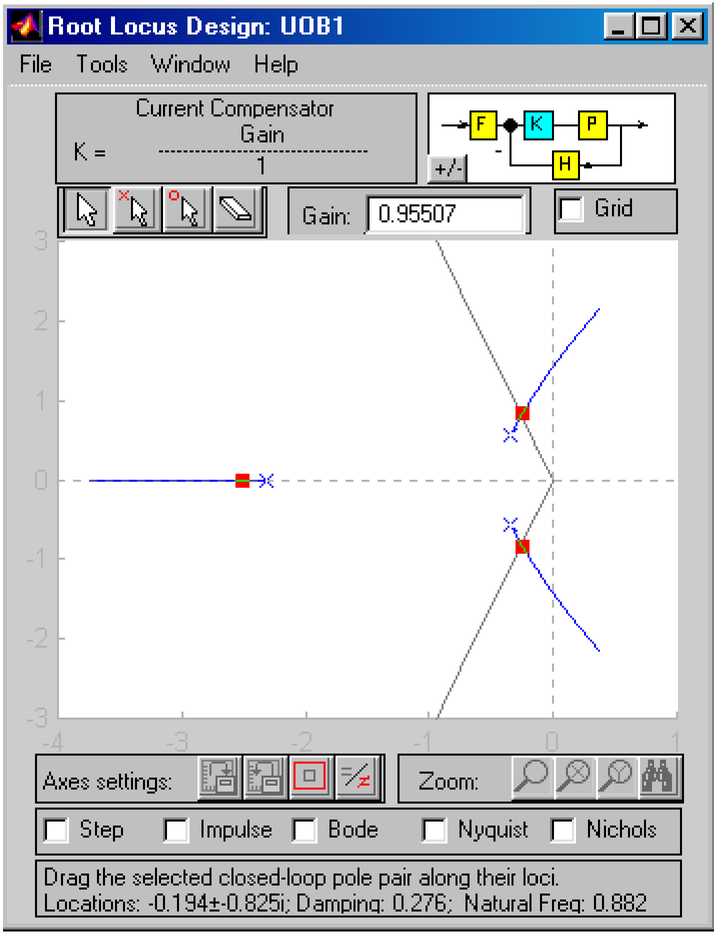
b)



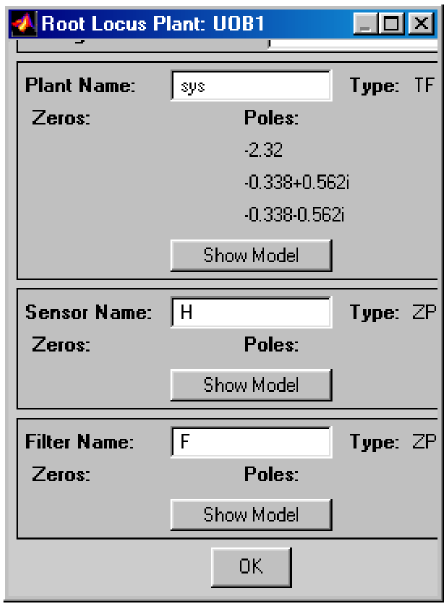
Obr.5.8.7a) *Menu „File"*

Obr.5.8.7b) *Menu „Tools"*

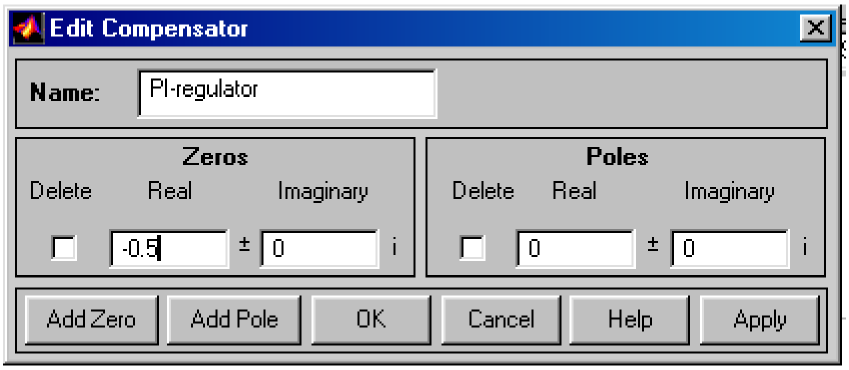
2) **Interaktivní syntéza.** Po ukončení importu se zobrazí okno *Root Locus Design UOB1* se zobrazeným geometrickým místem kořenů viz obr.5.8.8. Menu *Tools* je na obr.5.8.7b. Kliknutím na „*Edit Compensator*“ je možno definovat kompensátor viz obr.5.8.9. V okně „*Edit Compensator*“ je možno zadat jméno kompensátoru a zadat strukturu kompensátoru viz obr.5.8.9 (póly a nuly). Na obr.5,8.10a je seznam pólů a nul regulované soustavy, filtrů H, F.



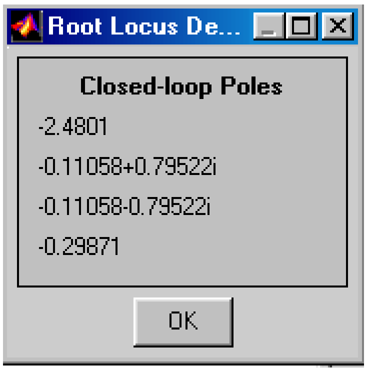
Obr.5.8.8a *Okno „Root Locus Plant“*



Obr.5.8.10a *Okno „Root Locus Plant“*



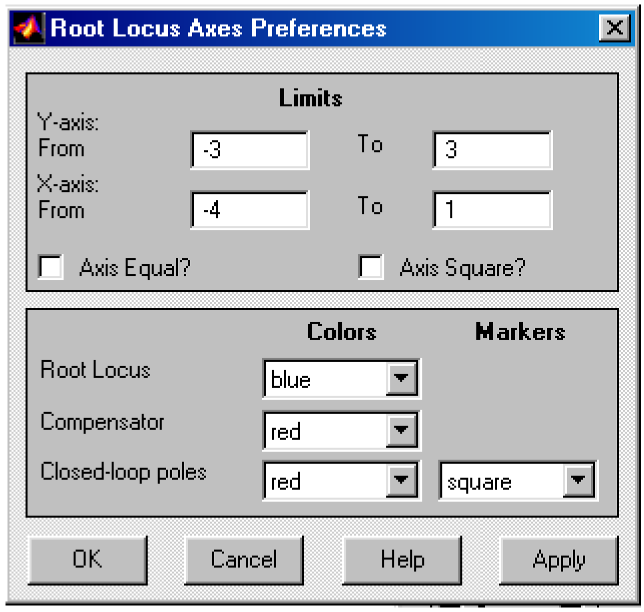
Obr.5.8.9 *Okno „Edit Compensator“*



Obr.5.8.10b *Póly uzavřeného obvodu*

Zobrazení okna "*List Closed-loop Polles*" je na obr. 5.8.10b. Okno menu "*Add Grid / Boundry*" je na obr.5.8.11 a slouží k zadávání relativní tlumení ξ (*Damping Ratio*), doby regulace (*Settlig Time*), přeregulování (*Peak Overshoot*). Relativní tlumení ξ, které se zobrazí jako přímka vycházející z počátku souřadnic nebo přímky v rovině – *s*. Protože na relativním tlumení závisí převýšení (%P), podává informaci o požadované hodnotě komplexního dominantního kořenu. Doba regulace se přetransformuje do roviny *s* jako vertikální přímka. Okno menu " *Set Axes Preferences*" je na obr.5.8.12.

Obr.5.8.11 *Okno Set Axes Preferences*



Obr.5.8.12 *Okno Set Axes Preferences*

3) **Syntéza regulačního obvodu.** Vlastní návrh regulačního obvodu pak spočívá v připojení pólů a nul k otevřenému obvodu a v analýze geometrického místa kořenů a vlastností obvodu. Získané výsledky porovnáváme s požadovanými vlastnostmi uzavřeného obvodu, které mohou býti dány požadovaným překmitem v procentech, dobou regulace atd. Kontrola dynamických vlastností se ověřuje pomocí přechodových charakteristik, váhovou impulsní nebo frekvenčními charakteristikami. Před ukončením programu rltool je třeba exportovat výsledky do *Workspace* pomocí příkazu *Export* v menu *File*.

Vlastní návrhářské práce se opírají o postup, který je podobný ručnímu seřízení regulátoru. Zpravidla se postupuje následovně:

a) Nastaví se zesílení K tak, aby uzavřená smyčka splnila požadavky na rychlost systému, tedy čas náběhu T_R.
b) Nastaví se derivační složka – připojí se nula k otevřenému obvodu, aby bylo dosaženo požadovaného tlumení.

c) Připojením nulového pólu k otevřenému obvodu (integrační složky) se zajistí požadavek $e_w(\infty) = \lim_{t\to\infty} e_w(t) = 0$. K zajištění stability je možno připojit další nulu (PID regulátor).

Syntézu s pomocí programu lrtool ukážeme na následujících příkladech.

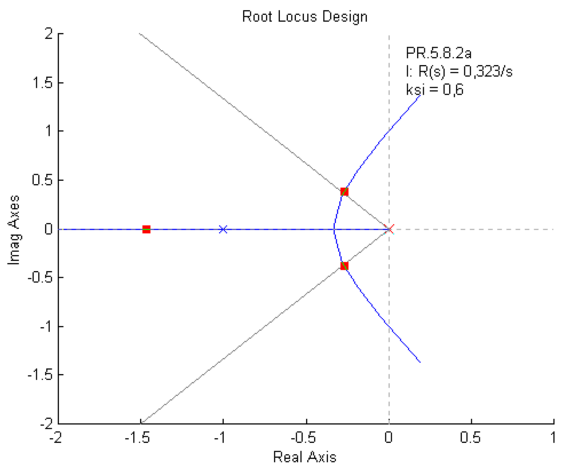
Příklad 5.8.2

Uvažujme regulovanou soustavu z Příkladu 5.4.3, jejíž obrazový přenos $F_U(s)$ je $F_U(s) = \dfrac{1}{s^2 + 2s + 1}$.

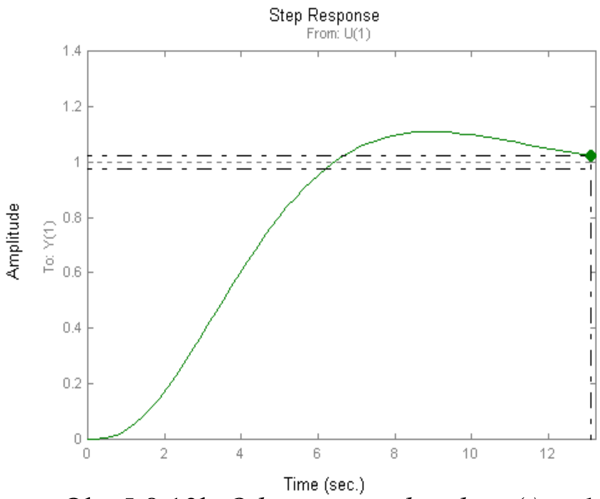
Proveďte optimální seřízení obvodu technikou geometrického místa kořenů pro:

a) I regulátor, $\%P < 20\%$,
b) PI regulátor, $\%P < 20\%$ a $T_s < 8sec$.

Řešení: a) Pro požadované převýšení v % se volí ξ = 0,6. Vyvoláme program rltool, provedeme import modelu, nastavíme počáteční parametry kompenzátoru (jeden nulový pól). Aktuální zesílení nastavíme tak, aby kořenový hodograf protínal radiální přímku viz obr. 5.8.13a. Přechodová funkce uzavřeného obvodu je na obr. 5.8.13b.

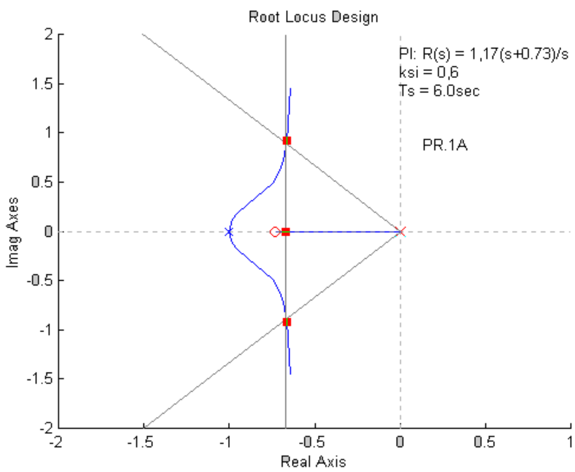


Obr.5.8.13a *Kořenový hodograf, I reg.*

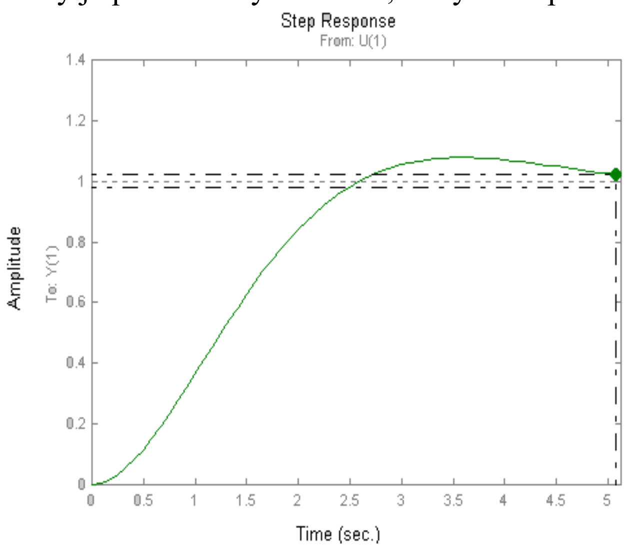


Obr.5.8.13b *Odezva reg. obvodu w(t) = 1*

b) Pro PI regulátor je požadovaná doba regulace menší než 6s, čemuž odpovídá vertikální přímka. Průsečík radiální a vertikální přímky je požadovaným bodem, kterým má pro-



Obr.5.8.14a *Kořenový hodograf, PI reg.*



Obr.5.8.14b *Odezva obvodu w(t) = 1*

cházet geometrické místo kořenů. Změníme–l nulu kompenzátoru na s = –0,73 dosáhneme takového průběhu geometrického místa kořenů, že kořenová trajektorie projde právě průsečíkem radiální a vertikální přímky. Aktuální zesílení nastavíme na 1,17 viz obr. 5.8.14a. Přechodová funkce uzavřeného obvodu je na obr. 5.8.14b, z jejího průběhu je vidět, že požadované přeregulování v procentech i doba regulace byly dodrženy.

Konec příkladu

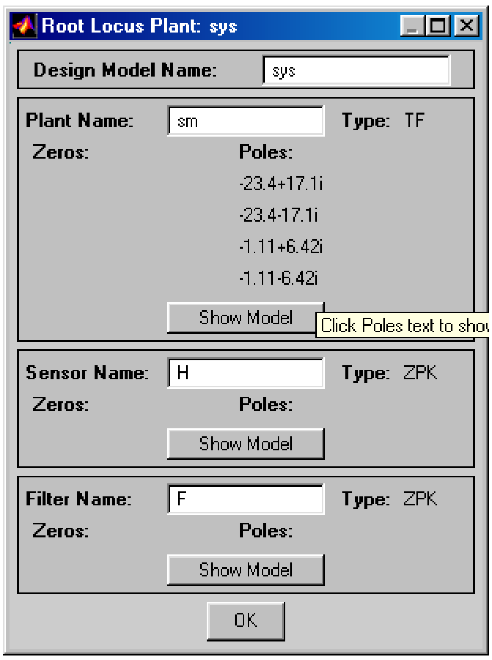
Příklad 5.8.3

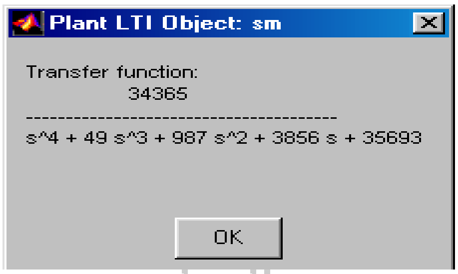
Uvažujme soustavu stejnosměrný motor, který je spojen s tachodynamem pružnou sojkou. Obrazový přenos nalezený v identifikaci je

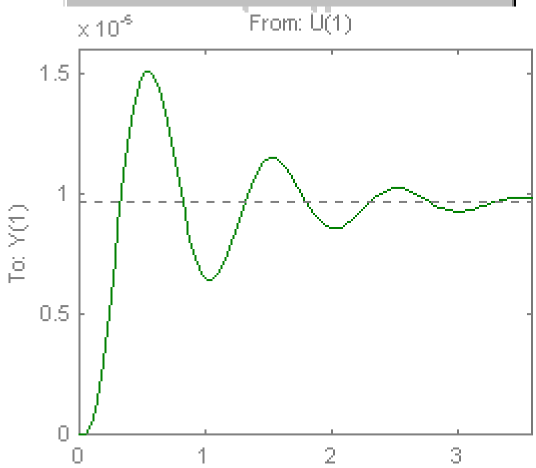
$$F_U(s) \text{ je } F_U(s) = \frac{1}{s^4 + 49s^3 + 987s^2 + 3856s + 35693}.$$

Proveďte optimální seřízení obvodu technikou geometrického místa kořenů.

Řešení: Regulovaná soustava, která je aproximovaná uvedeným obrazovým přenosem, patří ke skupině soustav u kterých se obtížně provádí a hledá vhodné seřízení regulátoru.
a) Importujeme-li tento model do rltool můžeme v okně "*Root Locus Design*" v menu "Tool" kliknout na *"List Model Poles"* a otevřít okno"*Root Locus Plant*" a "*Plant LTI*" obr.5.8.14a.







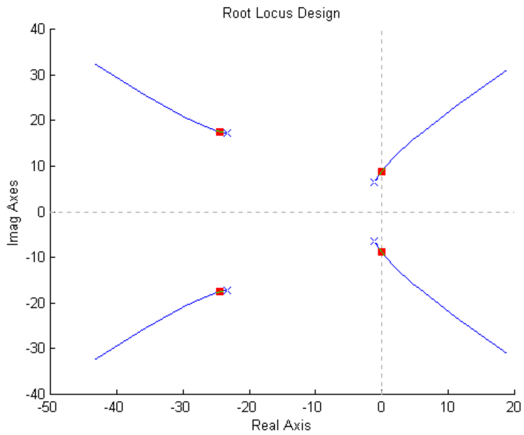
Obr.5.8.15a *Okno"Root Locus Plant" a okno "Plant LTI".*

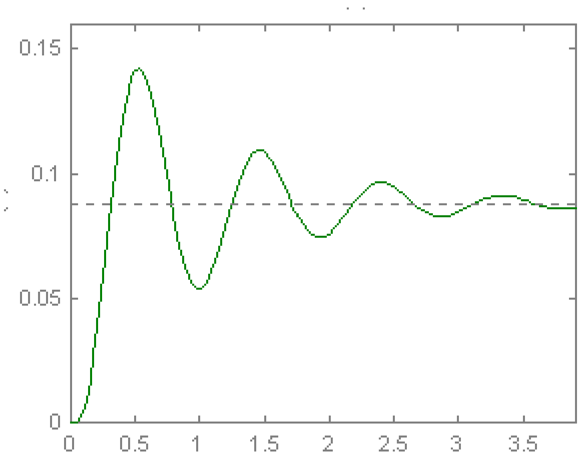
Obr.5.8.15b *Přechodová charakteristika*

Přechodová charakteristika regulované soustavy (přenos $F_U(s)$) je na obr.5.8.15b. Dominantním kořenem přenosu $F_U(s)$ je komplexně sdružený pól $s_{1,2} = -1{,}11 \pm 6{,}42$.

Geometrické místo kořenů uzavřeného obvodu se zesílením $K = 0{,}1$ je na obr.5.8.16a. a jeho přechodová charakteristika je na obr. 5.8.16b. Z průběhu geometrického místa kořenů je zřejmé, že zvyšování čistě proporcionálního zesílení vede k nestabilitě obvodu.

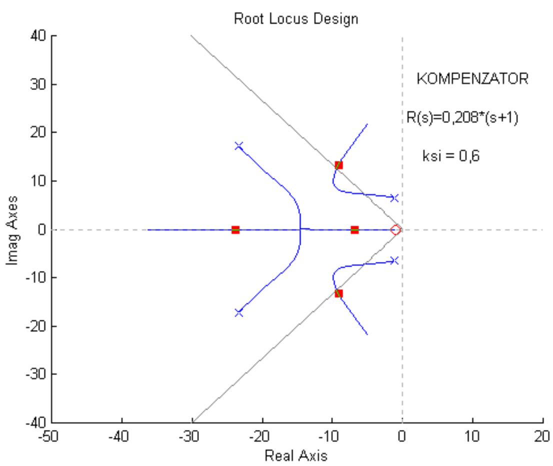
b) Stabilizaci můžeme zajistit připojením nuly ke kompensátoru (přidáním derivčního členu).

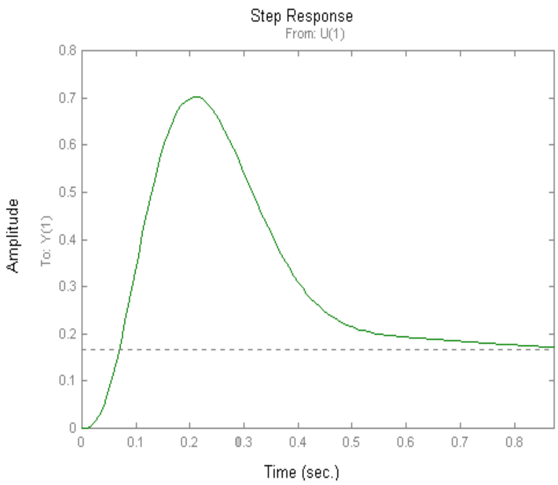




Obr.5.8.16a *Kořenový hodograf pro K=0,1* Obr.5.8.16b *Přechodová charakteristika*

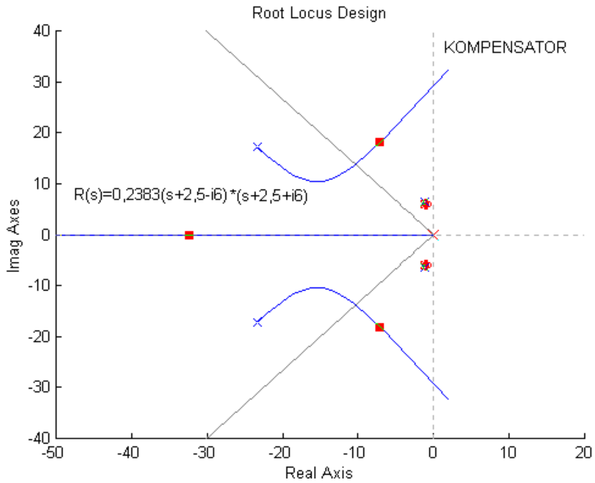
Pro získání orientačních bodů zadáme v okně "*Root Locus Design*" v menu "*Tool*" kliknutím na *"Edit Grid/Boundary"* relativní tlumení $\xi = 0,6$ a kliknutím na *"Edit Compensator"* otevřeme okno"*Edit Compesator"* ve kterém zadáme nulu $s_{B1} = -1$. Geometrické místo kořenů uzavřeného obvodu se zesílením $K = 0,208$ je na obr.5.8.17a a jeho přechodová charakteristika je na obr. 5.8.17b. Z průběhu geometrického místa kořenů je zřejmý stabilizační účinek přidaných nul.



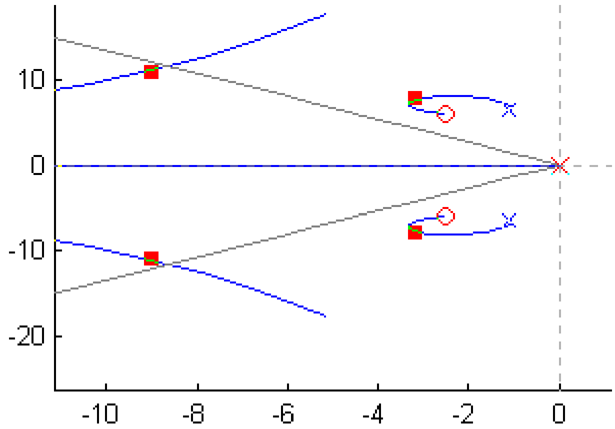


Obr.5.8.17a *Kořenový hodograf pro K=0,1* Obr.5.8.17b *Přechodová charakteristika*

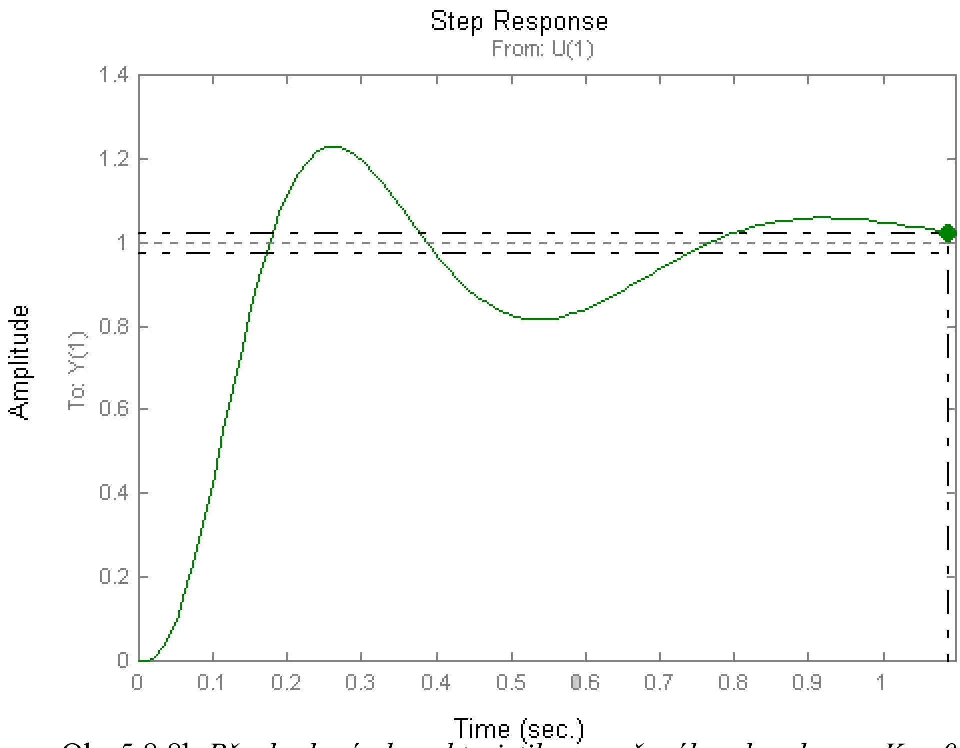
c) Aby byla zajištěna podmínka $e_w(\infty) = \lim_{t\to\infty} e_w(t) = 0$ je třeba připojit k otevřenému obvodu pól $s_{A1} = 0$. Stabilizace si vyžádá připojení další nuly. Nuly umístíme blízko dominantního pólu. Byly zvoleny $s_{B1,2} = -2,5 \pm i6$ viz obr.5.8.18a. Průběh trajektorie kolem dominantních pólů je na vidět obr. 5.8.18b. Pro zesílení $K = 0,2383$ bylo dosaženo odezvy uzavřeného obvodu ve tvaru přechodové charakteristiky dle obr.5.8.18c.



Obr.5.8.18a *Kořenový hodograf pro K=0,283*



Obr.5.8.18b *Detail hodografu*



Obr.5.8.8b *Přechodová charakteristika uzavřeného obvodu pro K = 0,283*

Konec příkladu