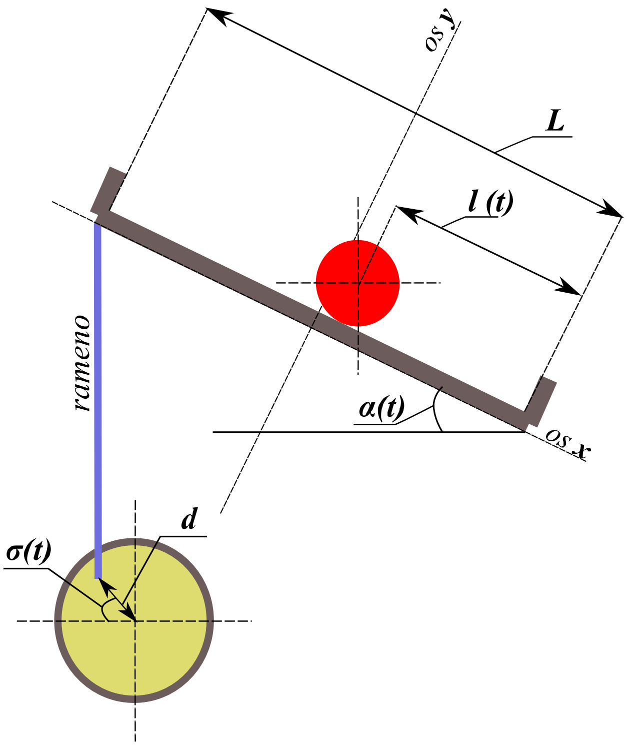
M1 Model "Guľôčka na tyči"

Úlohy:

1. **Zostavte matematický popis modelu M1**
2. **Vytvorte simulačný model v jazyku:**
   a. **Matlab**
      i. **riešenie funkciou ode45**
      ii. **riešenie naprogramovanou funkciou, ktorá využíva algoritmus metódy Runge Kutta**
   b. **Simulink**
      - **zostavenie programovej schémy metódou znižovania rádu derivácie**
   c. **Uvažujte, že vstupný uhol je riadený servomotorom**
3. **Simulujte dynamiku systému ako odozvu na rôzne vstupné signály**

Pre riešenie úloh uvažujeme nasledovné:



Parametre:

L - dĺžka tyče
d - polomer prevodového kolesa
m - hmotnosť guľôčky
R - polomer guľôčky
$J = \frac{2 \,.m\,.R^2}{5}$ - moment zotrvačnosti guľôčky
g - gravitačné zrýchlenie

Fyzikálne veličiny:

$x(t)$ - aktuálna poloha guľôčky
$\theta(t)$ - natočenie prevodového kolesa
$\alpha(t) = \frac{d}{L}\,.\,\theta(t)$ - uhol, ktorý zviera tyč s rovinou

Na zostavenie pohybových rovníc zložitejších mechanických systémov, tvorených sústavou hmotných bodov(napr. guľôčka, tyč), ktoré majú vzájomné väzby a pohybujú sa po priestore, slúžia *Langrangeove rovnice druhého druhu* (ďalej len Lagrangeova rovnica).

Základný tvar Langrangeovej rovnice je

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i \text{ , } pre\ i = 1, \dots, n \text{ ,}} \qquad (1.1)$$

kde i je stupeň voľnosti, q_i sú zovšeobecnené súradnice,

K je Lagrangeová funkcia, Q_i je zovšeobecnená sila.

Lagrangeova funkcia má tvar: $K = K(q, \dot{q}_i) = W_k(q_i, \dot{q}_i) - W_p(q_i),$ (1.2)

kde W_k je kinetická energia, W_p je potenciálna energia.

Na základe uvedených rovníc (1.1) a (1.2) vytvoríme matematický model M1, kde namiesto zovšeobecnenej súradnice q_i, uvažujeme aktuálnu polohu guľôčky $x(t)$, pričom výsledkom riešenia Lagrangeovej rovnice je diferenciálna rovnica, kde $Q_i = 0$, pretože na náš systém 1. stupňa voľnosti pôsobí len potenciálna (konzervatívna) sila.

$W_p\big(x(t)\big) = m\,.\,g\,.\,x(t).\,sin\,\alpha(t)$ - potenciálna energia guľôčky (1.3)

$W_k(x(t), \dot{x}(t)\,) = \frac{1}{2}\,.\,J\,.\,\omega^2(t) + \frac{1}{2}\,.\,m\,.\,v^2(t)$ - kinetická energia guľočky (1.4)

$$W_k(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{1}{2}\,.\,J\,.\left(\frac{\dot{x}(t)}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\,.\,m\,.\,\dot{x}^2(t) \qquad (1.5)$$

$$W_p(x(t)) = m\,.\,g\,.\,x(t).\,sin\,\alpha\,(t) \qquad (1.6)$$

$$K = \frac{1}{2}.\left(\frac{J}{R^2} + m\right).\,\dot{x}^2(t) - m.\,g.\,x(t).\,sin\,\alpha(t) \qquad (1.7)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{x}(t)} = \left(\frac{J}{R^2} + m\right).\,\dot{x}(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}(t)}\right) = \left(\frac{J}{R^2} + m\right).\,\ddot{x}(t) \qquad (1.8)$$

$$\frac{\partial K}{\partial x(t)} = m\,.\,g\,.\sin\alpha\,(t) \qquad (1.9)$$

Výsledná diferenciálna rovnica modelu:

$$\boldsymbol{\left(\frac{J}{R^2} + m\right).\,\ddot{x}(t) - m.\,g\,.\,sin\,\alpha(t) = 0} \qquad (1.10)$$

Úloha 2: Vytvorte simulačný model v jazyku:

Simulačný model vytvoríme úpravou matematického modelu (diferenciálna rovnica) na substitučný kanonický tvar:

$$x(t) = x_1(t) \qquad (2.1)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_1(t) = x_2(t) \qquad (2.2)$$

$$\boxed{\ddot{x}(t) = \dot{x}_2(t) = \frac{5}{7} \,.\, g \,.\, \sin\alpha\,(t)} \qquad (2.3)$$

a. Matlab

Pomocou rovníc (2.2) a (2.3) vytvoríme:

i) riešenie funkciou ode45:

[t,y]=ode45(funkcia,[doba simulácie],[počiatočné podmienky]);

ii) riešenie naprogramovanou funkciou, ktorá využíva algoritmus metódy Runge Kutta

Na základe numerickej metódy riešenia diferenciálnych rovníc Runge Kutta navrhnite algoritmus a implementujte ho v prostredí Matlab, pričom:

pomocné premenné:

i - počítadlo

t - hodnota času v danom kroku

y - hodnota funkcie v danom kroku

výstupné premenné:

t_{out} []- vektor času

y_{out} []- vektor výsledných hodnôt funkcie

vstupné premenné:

t_s - počiatočný čas

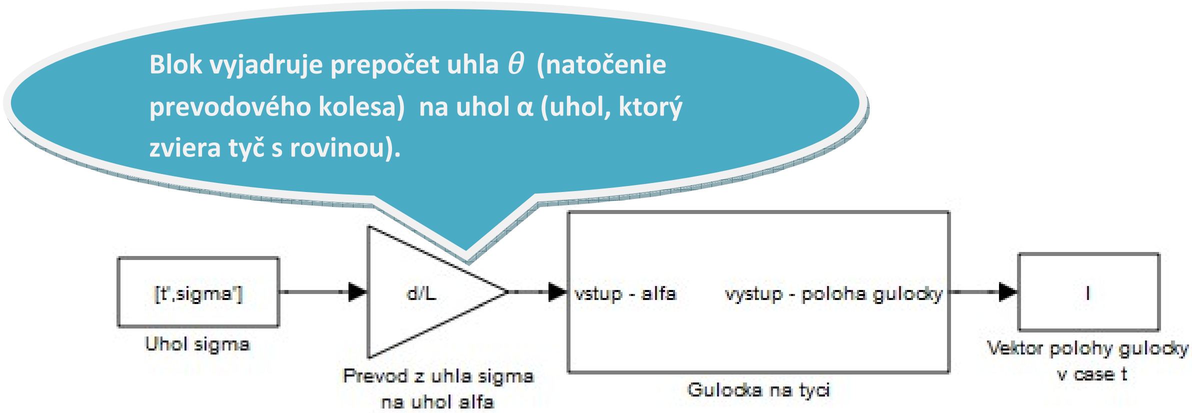
t_f - konečný čas

h - krok Runge Kutteho metódy

y_0 - počiatočná hodnota

b. Simulink

V jazyku Simulink realizujeme rovnicu (2.2) a (2.3) pomocou funkčných blokov.



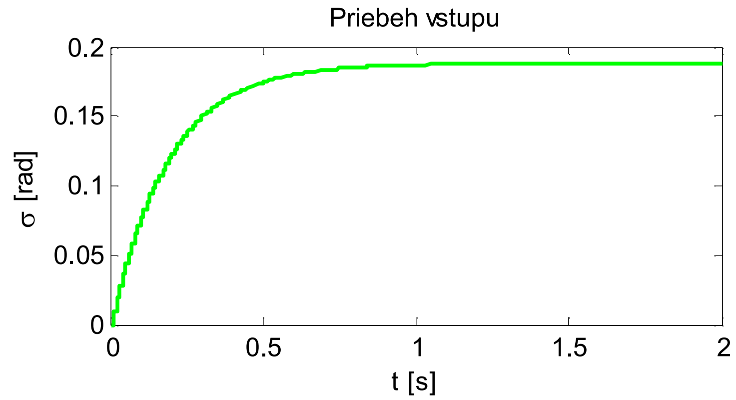
Obr. 1 Programová schéma M1 - Simulink

c. Uvažujte, že vstupný uhol je riadený servomotorom

Servomotor je radený pred uvažovaným systémom, napojený na prevodové koleso. Úlohou servomotora je meniť uhol σ a teda vstupom systému nie je uhol ale napájacie napätie servomotora U_s. Servomotor spôsobí zmenu dynamiky systému, preto uvažujeme servomotor s prenosovou funkciou

$$F(s) = \frac{0{,}1878}{0{,}1878s + 1}. \qquad (2.4)$$

Servomotor s prenosom (2.4) pri napájacom napätí $U_s = 1$ V má nasledujúcu odozvu:



Obr. 2 Časový priebeh uhla σ (odozva na 1(t))

Úloha 3: Simulujte dynamiku systému ako odozvu na rôzne vstupné signály

Parametre simulovaného modelu:

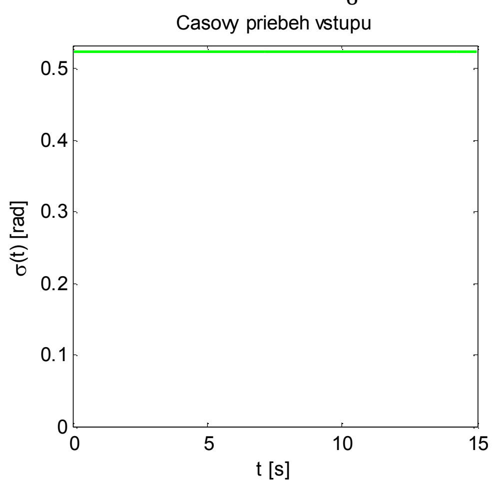
$L = 1$ m, $d = 0.03$ m, $m = 0.11$ kg, $R = 0.015$ m

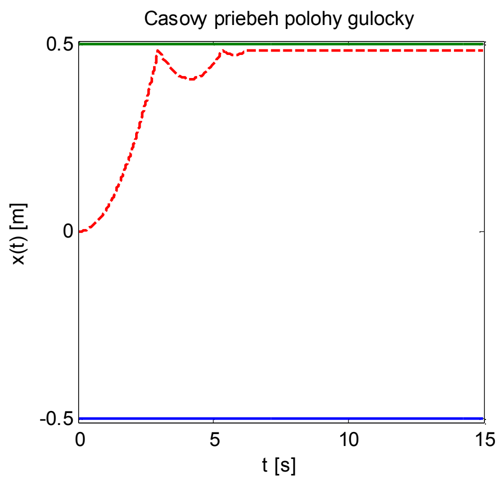
$T_{sim} = 15$ s, $dT = 0.01$ s

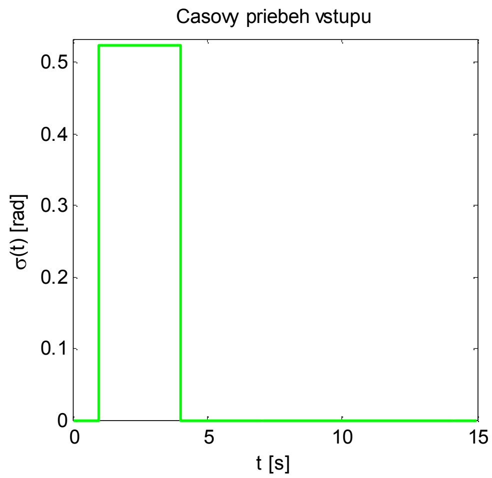
pozn.: V tomto modeli uvažujeme, že 2. počiatočná podmienka (počiatočná rýchlosť) je na začiatku simulácie rovná 0 !

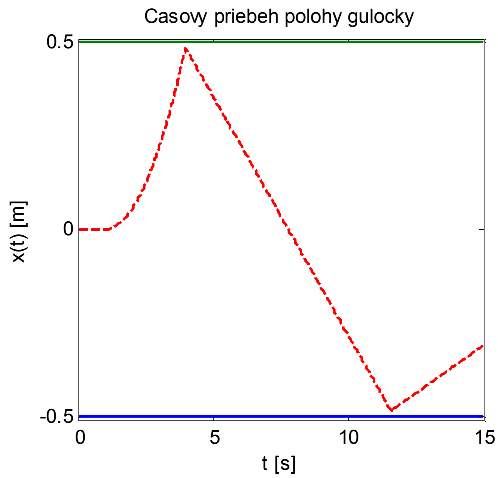
- **Simulačný model bez servomotora**

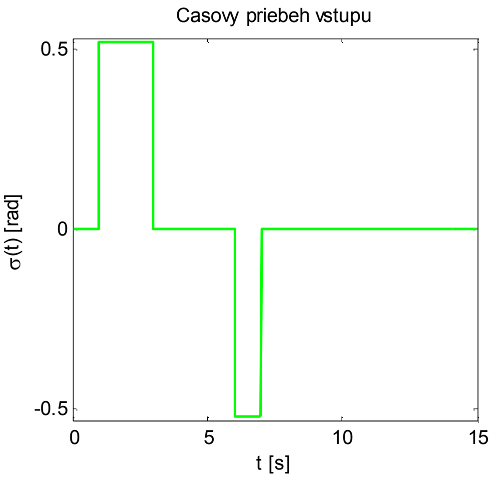
  $x(0) = x_1(0) = 0$ m, $\sigma = +\frac{\pi}{6}$

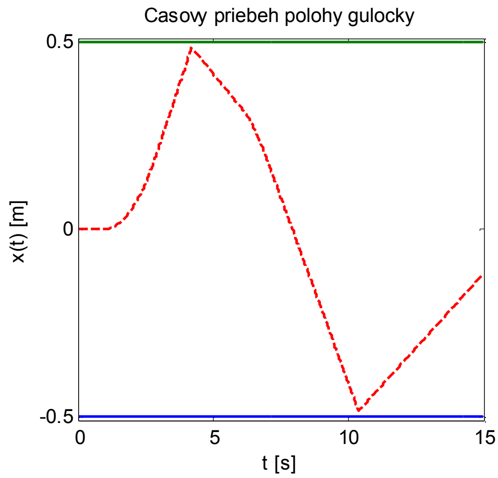






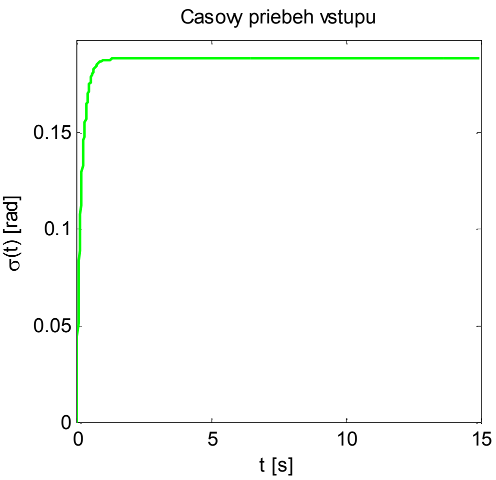


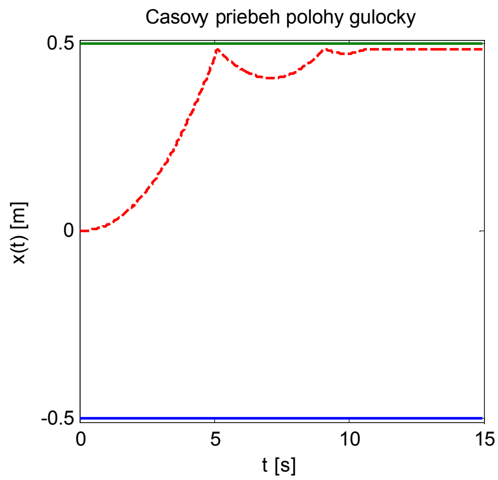


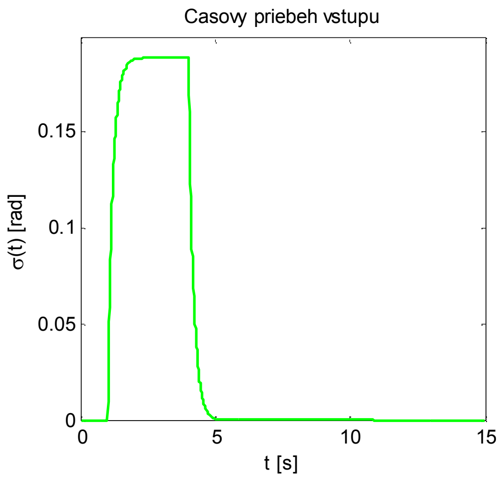


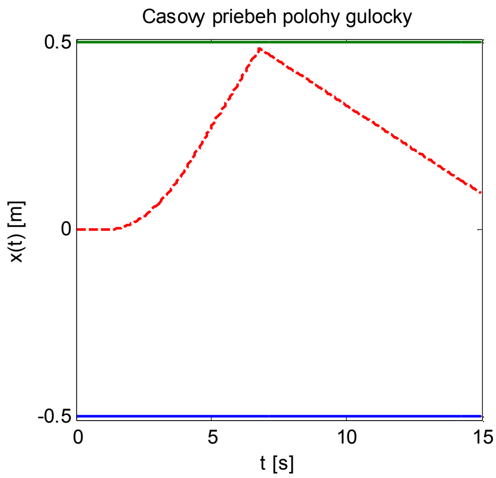
- **Simulačný model so servomotorom**

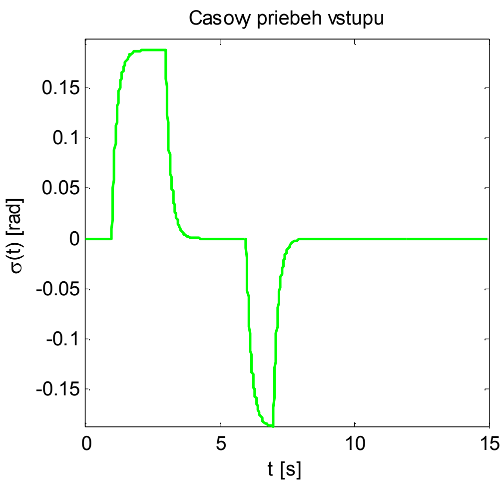
  $x(0) = x_1(0) = 0$ m, U_s=2V

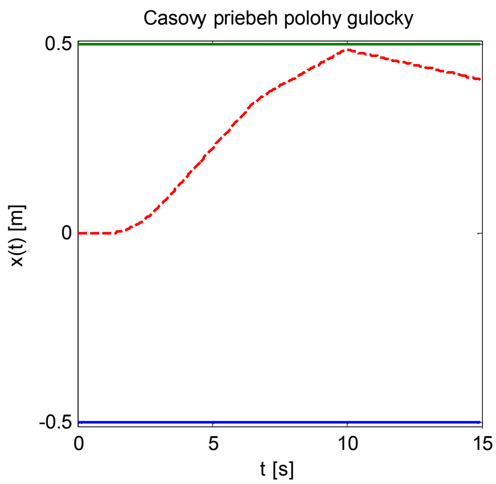





Casovy priebeh vstupu
σ(t) [rad]
0.15
0.1
0.05
0
0
5
10
15
t [s]


Casovy priebeh polohy gulocky
x(t) [m]
0.5
0
-0.5
0
5
10
15
t [s]


Casovy priebeh vstupu
σ(t) [rad]
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
0
5
10
15
t [s]


Casovy priebeh polohy gulocky
x(t) [m]
0.5
0
-0.5
0
5
10
15
t [s]