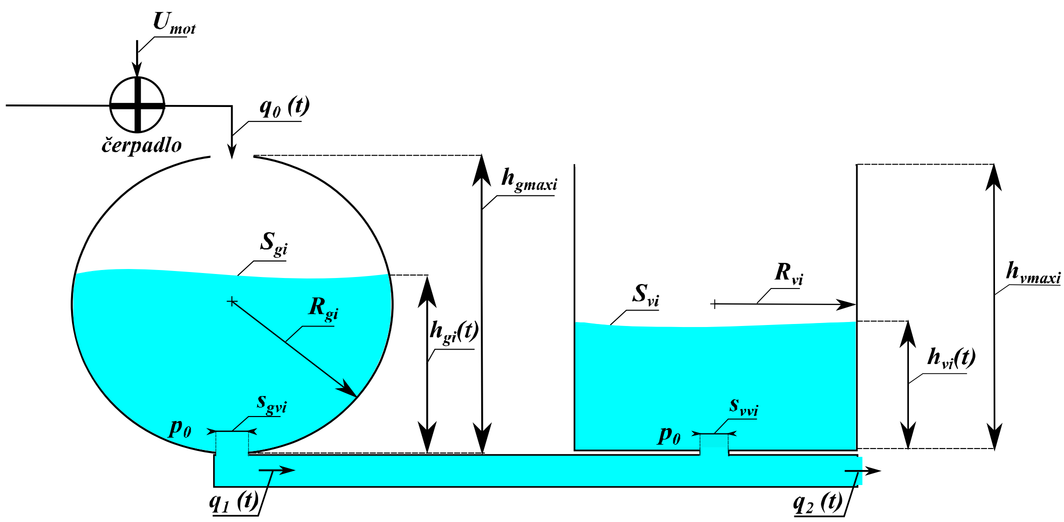
M4 Model "Guľová a valcová nádrž v interakcii"

Úlohy:

1. **Zostavte matematický popis modelu M4**
2. **Vytvorte simulačný model**
    a. **Matlab**
        i. **riešenie funkciou ode45**
        ii. **riešenie naprogramovanou funkciou, ktorá využíva algoritmus metódy Runge Kutta**
    b. **Simulink**
        - **zostavenie programovej schémy metódou znižovania rádu derivácie**
3. **Simulujte dynamiku systému ako odozvu na rôzne vstupné signály**

Pre riešenie úloh uvažujeme nasledovné:



Parametre:

R_{gi} - polomer guľovej nádoby
s_{gvi} - plocha výtokového otvoru guľovej nádoby
R_{vi} - polomer valcovej nádoby
s_{vvi} - plocha výtokového otvoru valcovej nádoby
S_{vi} - plocha hladiny vo valcovej nádrži
ρ - hustota kvapaliny
g - gravitačné zrýchlenie

Fyzikálne veličiny:

$q_0\,(t)$ - prítok do guľovej nádrže
$q_1\,(t)$ - voľný odtok z 1. nádrže
$q_2\,(t)$ - voľný odtok z 2. nádrže
$S_{gi}\,(h_{gi}(t))$ - plocha hladiny v guľovej nádrži
$v_g\,(t)$ - rýchlosť poklesu hladiny v guľovej nádrži
$v_1\,(t)$ - odtoková rýchlosť z guľovej nádrže
$v_v\,(t)$ - rýchlosť poklesu hladiny v guľovej nádrži
$v_2\,(t)$ - odtoková rýchlosť z guľovej nádrže
$h_{gi}\,(t)$ - výška hladiny v guľovej nádrži
$h_{vi}\,(t)$ - výška hladiny vo valcovej nádrži

pozn.:fyzikálne veličiny ďalej v texte sú uvedené nasledovne: $q_0\,(t) = q_0$, $q_1\,(t) = q_1$, $q_1\,(t) = q_1$, $S_{gi}\,(t) = S_{gi}$, $S_{vi}\,(t) = S_{vi}$, $v_g\,(t) = v_g$, $v_1\,(t) = v_1$, $v_v\,(t) = v_v$, $v_2\,(t) = v_2$

Úloha 1: Zostavte matematický popis modelu M4

Matematický popis uvažovaného hydraulického systému získame využitím rovnice kontinuity $Q_m = \rho . S . v = konšt.$ ($v\,(t) = v$ *- rýchlosť prúdenia kvapaliny)*, pre nestlačiteľnú kvapalinu:

$$Q_m = S_g . v_g = s_g . v_1 = S_v . v_v = s_v . v_2 = konšt., \qquad (1.1)$$

ktorá hovorí, že hmotnostný tok Q_m vyjadrujúci objem kvapaliny s hustotou ρ, ktorý pretečie potrubím s prierezom S rýchlosťou v za jednotku času, je v každom mieste potrubia konštantný. Pomocou modifikovaného Torriceliho vzorca

$$v = \sqrt{2 . g . |h_1 - h_2|}, \qquad (1.2)$$

ktorý platí pre rýchlosť odtoku v nádobách s interakciou, možno pre zmenu objemu kvapaliny v 1. nádrži písať:

$$S_{gi} . \frac{d\,h_{gi}(t)}{dt} = q_0(t) - q_1(t) \qquad (1.3)$$

(ďalej: $\frac{d\,h_{gi}(t)}{dt} = \dot{h}_{gi}(t)\,,\, q_0(t) = q_0,\ q_1(t) = q_1,$) ,

$$S_{gi} . \dot{h}_{gi}(t) = q_0 - s_{gi} . v_g \qquad (1.4)$$

a výsledná diferenciálna rovnica je:

$$S_{gi} . \dot{h}_{gi}(t) = q_0 - s_{gvi} . \sqrt{2 . g . \left[h_g(t) - h_v(t)\right]}. \qquad (1.5)$$

Pre S_{gi} platí:

$$S_{gi}(h_{gi}(t)) = \pi\,.\,(2\,.\,R_g\,.\,h_{gi}(t) - \, {h_{gi}}^2(t)). \qquad (1.6)$$

Analogicky pre zmenu objemu kvapaliny v druhej nádrži platí:

$$S_{vi}\,.\,\dot{h}_{vi}(t) = s_{gvi}.\sqrt{2\,.\,g\,.\,\left[h_g(t) - \, h_v(t)\right]} - \, s_{vvi}.\sqrt{2\,.\,g\,.\,h_{vi}(t)}. \qquad (1.7)$$

Úloha 2: Vytvorte simulačný model

Vstupný prietok je pri reálnych modeloch závislý od vstupného napätia čerpadla, pričom vzťah medzi napätím a prietokom ($\boldsymbol{q_0}$) je:

$$q_0 = a\,.\,U + b \qquad (2.1)$$

Vo vzorovom simulovanom modeli je $a = 2{,}5.\,10^{-4}, b = 0$.
Simulačný model vytvoríme úpravou matematického modelu (diferenciálna rovnica) na substitučný kanonický tvar:

$$\boldsymbol{h_{gi}(t) = x_1(t)} \qquad (2.2)$$

$$\boxed{\boldsymbol{h_{gi}(t) = \dot{x}_1(t) = \frac{q_0 - s_{gvi}\,.\sqrt{2.g.[x_1(t) - x_2(t)]}}{S_{gi}} = \frac{q_0 - s_{gi}.\sqrt{2.g.[x_1(t) - x_2(t)]}}{\pi\,.(2\,.R_{gi}\,.x_1(t) - {x_1}^2(t))}}} \qquad (2.3)$$

$$\boldsymbol{h_{vi}(t) = x_2(t)} \qquad (2.4)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\dot{h}_2(t) = \dot{x}_2(t) = \frac{s_{gvi}\,.\sqrt{2.g.[x_1(t) - x_2(t)]} - s_{vvi}\,.\sqrt{2.g.x_2(t)}}{S_{vi}}}} \qquad (2.5)$$

a. **Matlab**

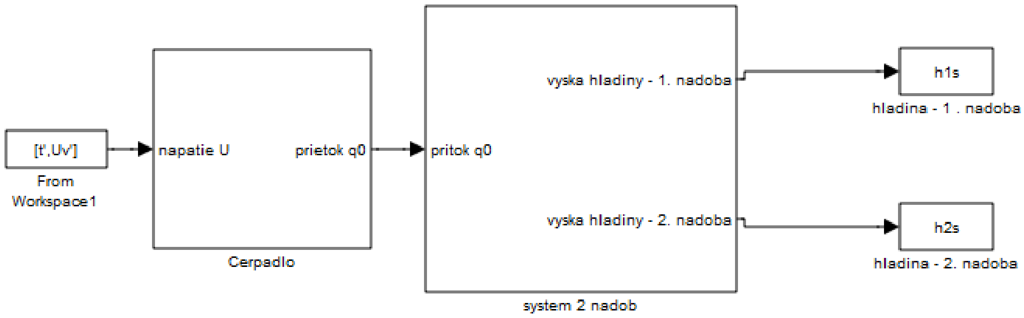
Na základe rovníc (2.1), (2.3) a (2.5) vytvoríme v Matlabe simulačný model ako:

i) **riešenie funkciou ode45:**
[t,y]=ode45(funkcia,[doba simulácie],[počiatočné podmienky]);

ii) **riešenie naprogramovanou funkciou, ktorá využíva algoritmus metódy Runge Kutta**
Na základe numerickej metódy riešenia diferenciálnych rovníc Runge Kutta navrhnite algoritmus a implementujte ho v prostredí Matlab, kde vstupom je počiatočná hodnota času t_0, počiatočné podmienky $h_{gi}(0)$, $h_{vi}(0)$ a krok k uvedenej metódy. Riešenie je možné realizovať ako 2 funkcie (funkcia pre guľovú nádobu a funkcia pre valcovú nádobu), kde návratová hodnota z oboch je priebeh výšky hladiny (ako vektor) alebo ako 1 funkcia, ktorej návratová hodnota je matica (2 x n, resp. n x 2, n ϵ N) obsahujúca v prvom riadku (resp. stĺpci) priebeh hladiny guľovej nádrže a v druhom priebeh valcovej nádrže.

b. Simulink - zostavenie programovej schémy metódou znižovania rádu derivácie

V jazyku Simulink vychádzame z rovnakých rovníc (2.1),(2.3),(2.5), ale rovnicu realizujeme pomocou funkčných blokov.



Obr. 1 Programová schéma M4 - Simulink

Úloha 3: Simulujte dynamiku systému ako odozvu na rôzne vstupné signály

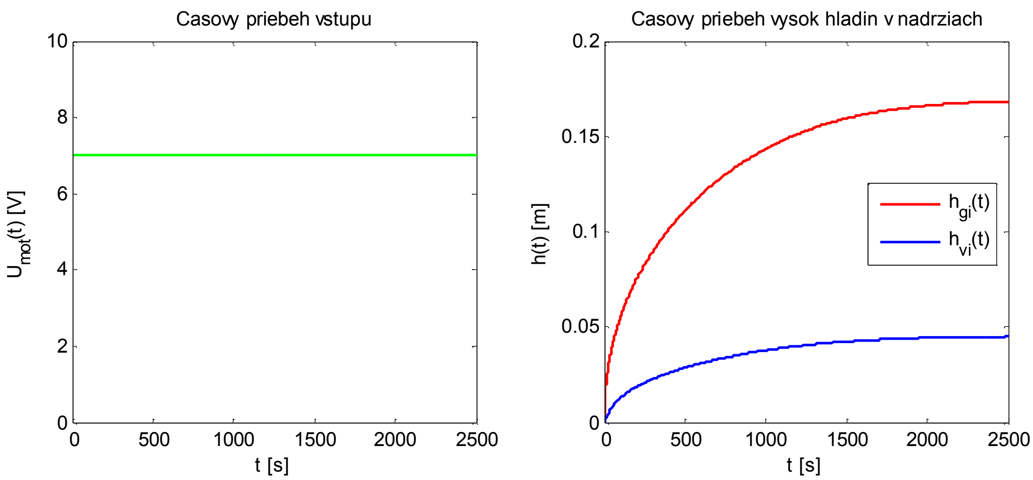
Parametre simulovaného modelu:

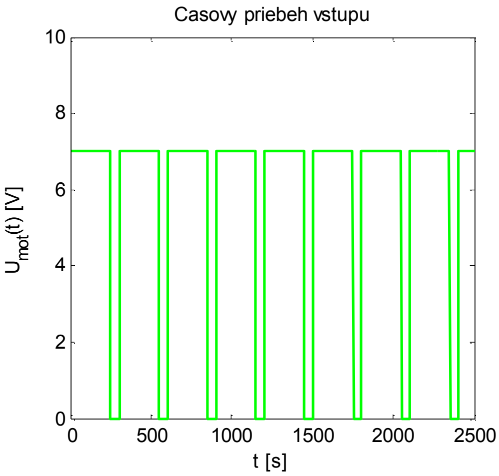
$R_g = 0.25$ m, $d_g = 0.02$ m , $f_g = \pi.(\frac{d}{2})^2 = 3.1416 \,.\, 10^{-4}$ m^2

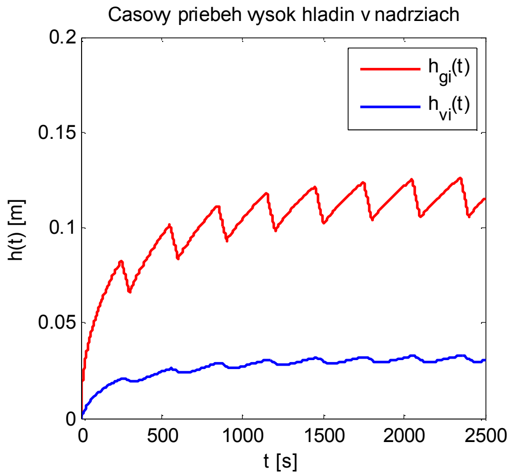
$R_v = 0.125$ m, $d_v = 0.01125$ m , $f_v = \pi.(\frac{d}{2})^2 = 3.9761 \,.\, 10^{-4}$ m^2

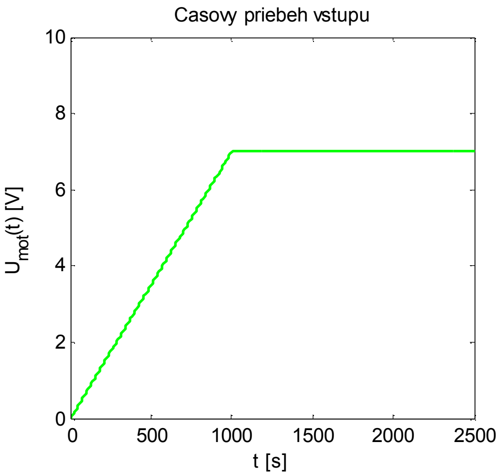
$T_{sim} = 2500$ s, $dT = 1$ s, $U_{mot} = 5$V

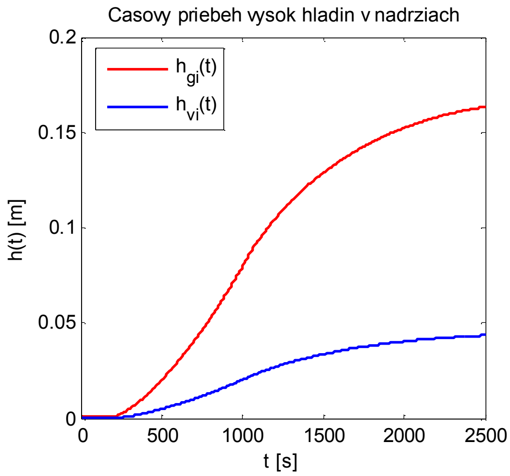
- **Simulačný model s počiatočnými podmienkami (počiatočnými výškami hladín): $h_{gi}(0) = 0$ m, $h_{vi}(0) = 0$ m**
  pozn.: minimálna výška hladiny začína na 0.01 m a maximálna končí na 0.49 m, pretože inak by došlo k deleniu 0 v prípade guľovej nádoby!



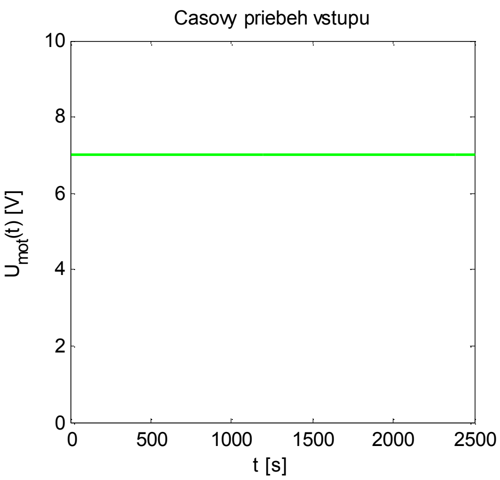


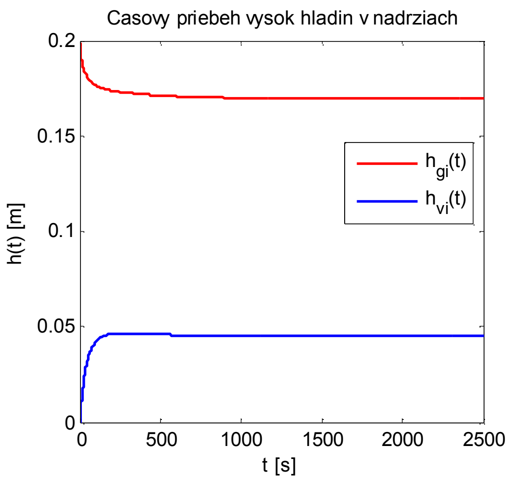


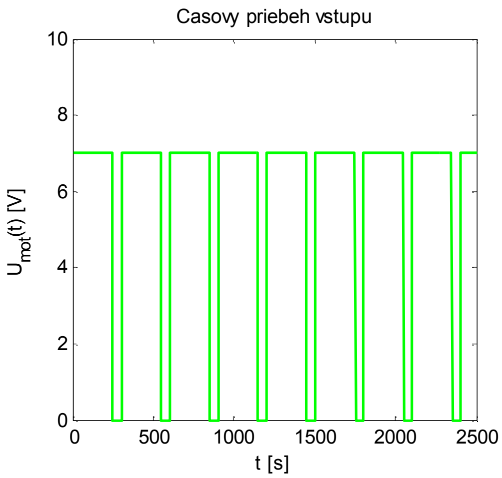


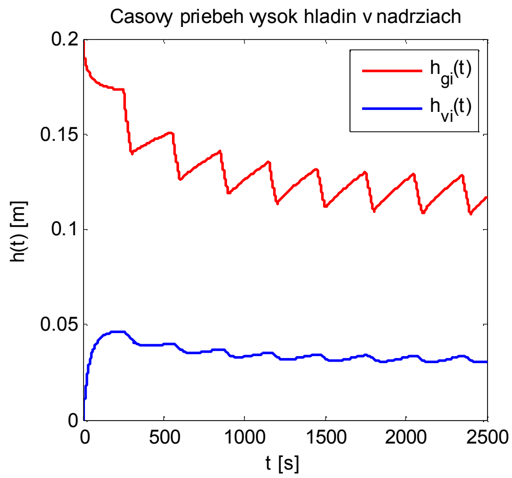


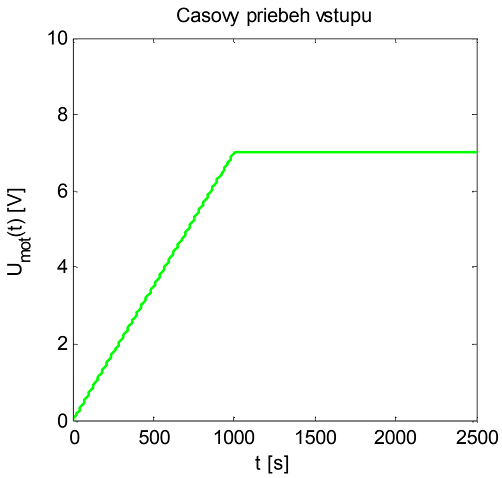
- **Simulačný model s počiatočnými podmienkami (počiatočnými výškami hladín):** $h_{gi}(0) = 0.2\ \mathrm{m}$, $h_{vi}(0) = 0\ \mathrm{m}$

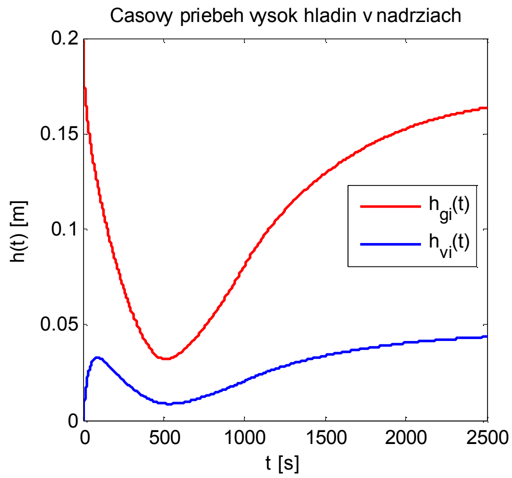





Casovy priebeh vstupu
$U_{mot}(t)$ [V]
t [s]


Casovy priebeh vysok hladin v nadrziach
h(t) [m]
t [s]
$h_{gi}(t)$
$h_{vi}(t)$


Casovy priebeh vstupu
$U_{mot}(t)$ [V]
t [s]


Casovy priebeh vysok hladin v nadrziach
h(t) [m]
t [s]
$h_{gi}(t)$
$h_{vi}(t)$