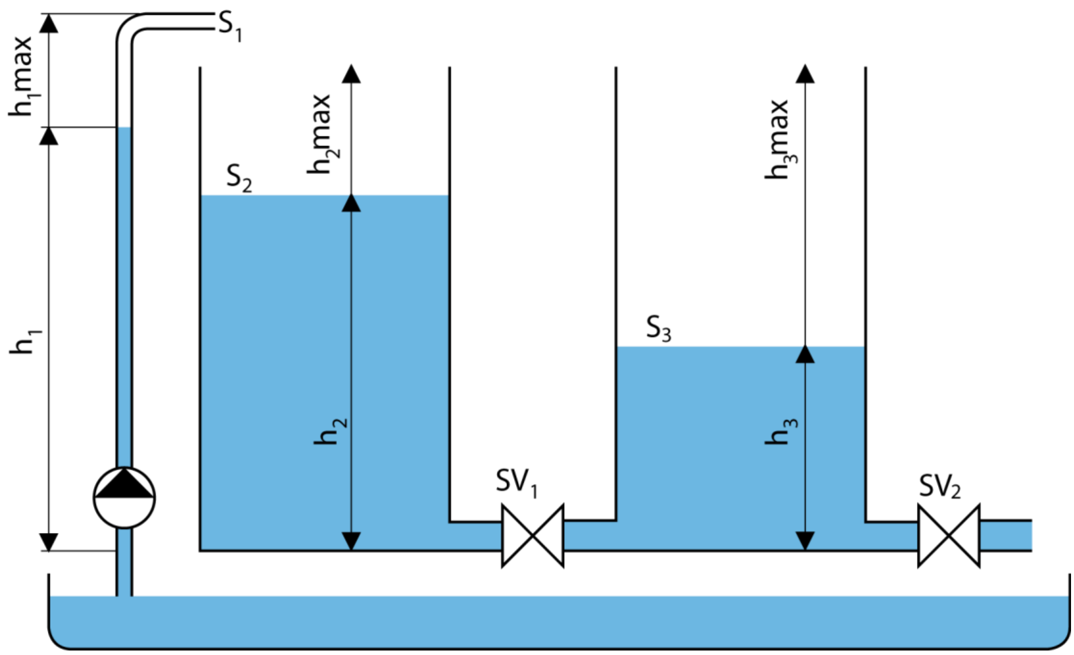
M6: Model "Hydraulický systém dvoch zásobníkov kvapaliny s interakciou"

Úlohy:

1. **Zostavte matematický popis modelu "Hydraulický systém"**
2. **Vytvorte simulačný model v jazyku:**
   a. **Matlab**
   b. **Simulink**
3. **Linearizujte nelineárny model "Hydraulický systém"**
4. **Simulujte dynamiku systému ako odozvu na rôzne vstupné signály**

Pre riešenie úloh uvažujeme nasledovné:



Obr. 1 Hydraulický systém

Fyzikálne veličiny:

$U_{mot}(t)$ – Napätie motora (akčný zásah)

$Q_c(t)$ – Prietok čerpadla

$h_1(t)$ – Výška hladiny v prívodnej trubici

$h_2(t)$ – Výška hladiny v prvej nádobe

$h_3(t)$ – Výška hladiny v druhej nádobe (regulovaná veličina)

Parametre:

S_1 – Prierez prívodnej trubice

S_2 – Prierez prvej nádoby

S_3 – Prierez druhej nádoby

S_C – Prierez netesnosti čerpadla

S_{V1} – Prierez ventilu č.1

S_{V2} – Prierez ventilu č.2

g – Gravitačné zrýchlenie

U_{necit} – Necitlivosť motora

k – konštanta motora

h_{1max} – Maximálna výška hladiny v prívodnej trubici

h_{2max} – Maximálna výška hladiny v prvej nádobe

h_{3max} – Maximálna výška hladiny v druhej nádobe

U_{max} – Maximálna hodnota napájacieho napätia

ρ – Hustota kvapaliny ($\rho = \rho_0 = \rho_1 = \rho_2 = \rho_3$)

Úloha č.1: Zostavte matematický popis modelu M5

Matematický opis dynamického modelu *Hydraulický systém* vychádza zo základných fyzikálnych princípov z oblasti hydrauliky, ako sú rovnica kontinuity $Q_m = S.v = konšt$, Torricelliho vzorec $v = \sqrt{2.g.h}$, či materiálová bilancia zásobníkov, ktorá je daná takto:

(súčet vstupujúcich tokov hmotnosti) - (súčet vystupujúcich tokov hmotnosti) = (rýchlosť akumulácie hmotnosti v systéme). (1)

Závislosť prietoku čerpadlom Q_C od veľkosti napájacieho napätia U_{mot} vyjadrujú rovnice (2) a (3).

$$Q_C = k(U_{mot} - U_{necit}), \qquad \text{pre } U_{mot} \geq U_{necit}, \tag{2}$$

$$Q_C = 0, \qquad \text{pre } U_{mot} < \mathrm{U}_{necit}. \tag{3}$$

Matematický opis dynamického modelu M5 pozostáva z nasledujúcich diferenciálnych rovníc 1. rádu:

$$\dot{h}_1(t) = \frac{1}{S_1}\left[k(U_{mot} - U_{necit}) - S_C\sqrt{2gh_1(t)}\right], \qquad \text{pre} \quad U_{mot} \geq U_{necit} \tag{4a}$$

$$\dot{h}_1(t) = \frac{1}{S_1}\left[0 - S_C\sqrt{2gh_1(t)}\right], \qquad \text{pre} \quad U_{mot} < \mathrm{U}_{necit}. \tag{4b}$$

$$\dot{h}_2(t) = \frac{1}{S_2}\left[k(U_{mot}(t) - U_{necit}) - S_C\sqrt{2gh_1(t)} - S_{V1}L_{V1}\sqrt{2g[h_2(t) - h_3(t)]}\right], \quad \text{ak} \quad h_1(t) \geq h_{1\max}, \tag{5a}$$

$$\dot{h}_2(t) = \frac{1}{S_2}\left[0 - S_C\sqrt{2gh_1(t)} - S_{V1}L_{V1}\sqrt{2g[h_2(t) - h_3(t)]}\right], \qquad \text{ak} \quad h_1(t) < h_{1\max}, \tag{5b}$$

$$\dot{h}_3(t) = \frac{1}{S_3}\left[S_{V1}L_{V1}\sqrt{2g[h_2(t) - h_3(t)]} - S_{V2}L_{V2}\sqrt{2gh_3(t)}\right], \tag{6}$$

Úloha č. 2: Vytvorte simulačný model v jazyku:

2.a Matlab

Naprogramujte simulačný model M5 v prostredí Matlab na základe matematického modelu (diferenciálne rovnice (4a), (4b), (5a), (5b), (6)) pri zadefinovaných vstupných parametrov modelu (zadá cvičiaci) a pri nasledujúcej voľbe stavových veličín:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= h_1(t), \\ x_2(t) &= h_2(t), \\ x_3(t) &= h_3(t), \end{aligned}} \qquad (7)$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \frac{1}{S_1}\left[k(U_{mot}(t)-U_{necit})-S_C\sqrt{2gx_1(t)}\right], && \text{pre} \quad U_{mot}(t)\geq U_{necit}, \\
\dot{x}_1(t) &= \frac{1}{S_1}\left[0-S_C\sqrt{2gx_1(t)}\right], && \text{pre} \quad \mathrm{U}_{\mathrm{mot}}(t)<\mathrm{U}_{\mathrm{necit}}, \\
\dot{x}_2(t) &= \frac{1}{S_2}\left[k(U_{mot}(t)-U_{necit})-S_C\sqrt{2gx_1(t)}-S_{V1}L_{V1}\sqrt{2g\left[x_2(t)-x_3(t)\right]}\right], && \text{ak} \quad h_1(t)\geq h_{1\max}, \\
\dot{x}_2(t) &= \frac{1}{S_2}\left[0-S_C\sqrt{2gx_1(t)}-S_{V1}L_{V1}\sqrt{2g\left[x_2(t)-x_3(t)\right]}\right], && \text{ak} \quad h_1(t)<h_{1\max}, \\
\dot{x}_3(t) &= \frac{1}{S_3}\left[S_{V1}.L_{V1}.\sqrt{2g\left[x_2(t)-x_3(t)\right]}-S_{V2}.L_{V2}.\sqrt{2gx_3(t)}\right].
\end{aligned} \qquad (8)$$

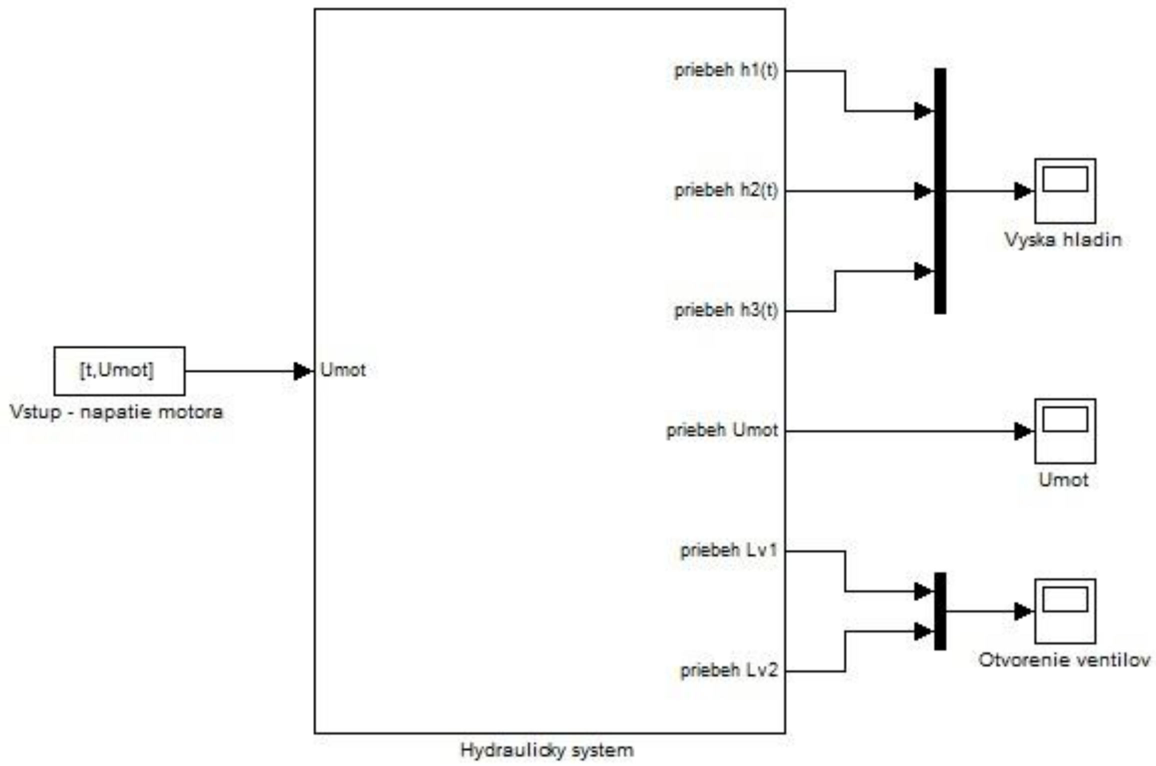
Úlohu riešte pomocou:

2.a.1 - existujúcej funkcie *ode45* v Matlabe

2.a.2 - vlastnej naprogramovanej funkcie Runge-Kutta 4.rádu.

2.b Simulink

Vytvorte nelineárny simulačný model M5, pomocou základných knižných blokov v prostredí Simulink, na základe matematického modelu (diferenciálne rovnice (4a), (4b), (5a), (5b), (6)) pri zadefinovaných vstupných parametrov modelu a pri uvažovaní fyzikálnych obmedzení systému (zadá cvičiaci).



Obr. 2 Schéma systému M5 v Simulinku

Úloha č.3: Linearizujte nelineárny model "Hydraulický systém"

Vytvorte lineárny matematický model modelu M5:

a) metódou rozvoja do Taylorovho radu
b) použitím Jacobiho matice.

3.a Linearizujte model M5 metódou rozvoja do Taylorovho radu

Lineárny matematický model zostavíme na základe nasledujúcich rovníc:

$$\Delta y = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n \tag{9}$$

kde $\Delta x_i = x_i - X_i$ predstavuje odchýlku od pracovného bodu.

Po dosadeni parametrov modelu do nelineárnych rovníc dostávame nasledujúce diferenciálne rovnice.

$$\dot{h}_2(t) = kU_{mot} - kU_{mot} - \frac{S_c}{S_2}\sqrt{2g}\sqrt{h_{1\max}} - \frac{S_{V1}}{S_2}\sqrt{2g}LV_1\sqrt{h_2(t) - h_3(t)}$$

$$\dot{h}_3(t) = \frac{S_{V1}}{S_3}\sqrt{2g}LV_1\sqrt{h_2(t) - h_3(t)} - \frac{S_{V2}}{S_3}LV_2\sqrt{h_3}$$

Majme dva pracovné body:

Pracovný bod A	Pracovný bod B
U_{mot} = 8 V	U_{mot} = 9 V
L_{V1} = 0.4	L_{V1} = 1
L_{V2} = 0.2	L_{V2} = 0.23
H_{20} = 0.33 m	H_{20} = 0.31 m
H_{30} = 0.26 m	H_{30} = 0.3 m

Vytvoríme odchýlkový model

$$\frac{d(H_{20}+\Delta h_2(t))}{dt} = k(U_{mot}+\Delta U) - kU_{nec} - \frac{S_c}{S_2}\sqrt{H10} -$$
$$- \frac{S_{V1}}{S_2}\sqrt{2g}LV_1\sqrt{H_{20}+\Delta h_2(t) - H_{30}+\Delta h_3(t)},$$
$$\frac{d(H_{30}+\Delta h_3(t))}{dt} = \frac{S_{V1}}{S_3}\sqrt{2g}LV_1\sqrt{H_{20}+\Delta h_2(t) - H_{30}+\Delta h_3(t)} - \frac{S_{V2}}{S_3}LV_2\sqrt{H_{30}+\Delta h_3(t)}.$$

Po úpravách a dosadení jednotlivých parametrov dostávame:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{h}_2(t) &= k\Delta U - a_{11}\Delta h_2(t) + a_{12}\Delta h_3(t) \\ \Delta\dot{h}_3(t) &= a_{21}\Delta h_2(t) - a_{22}\Delta h_3(t) \end{aligned} \qquad (10)$$

Z týchto rovníc si vytvoríme stavový opis systému:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta\dot{h}_2(t) \\ \Delta\dot{h}_3(t) \end{bmatrix} &= \overbrace{\begin{bmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} \Delta h_2(t) \\ \Delta h_3(t) \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{B}} \Delta U \\ \Delta y &= \underbrace{[0 \quad 1]}_{\boldsymbol{C}} \begin{bmatrix} \Delta h_2(t) \\ \Delta h_3(t) \end{bmatrix} + \mathrm{D}\Delta U \end{aligned} \qquad (11)$$

S využitím vzorca $F(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, pričom I je jednotková matica, môžeme opis systému v stavovom priestore prepísať na tvar obrazového prenosu. Získame tak obrazový prenos zlinearizovaného hydraulického systému vo zvolenom pracovnom bode.

$$F(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \qquad (12)$$

3.b Linearizujte model M5 využitím Jacobiho matice

Jacobiho matica má nasledujúci tvar:

$$A = J(x_s) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{x_s} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_{x_s} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\Big|_{x_s} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\Big|_{x_s} \end{pmatrix}_{x_s} \tag{13}$$

Funkcie f_1 a f_2 sú rovnice 5a a 6, ktoré je potrebné linearizovať v pracovnom bode x_s. Maticu B vypočítame nasledovne:

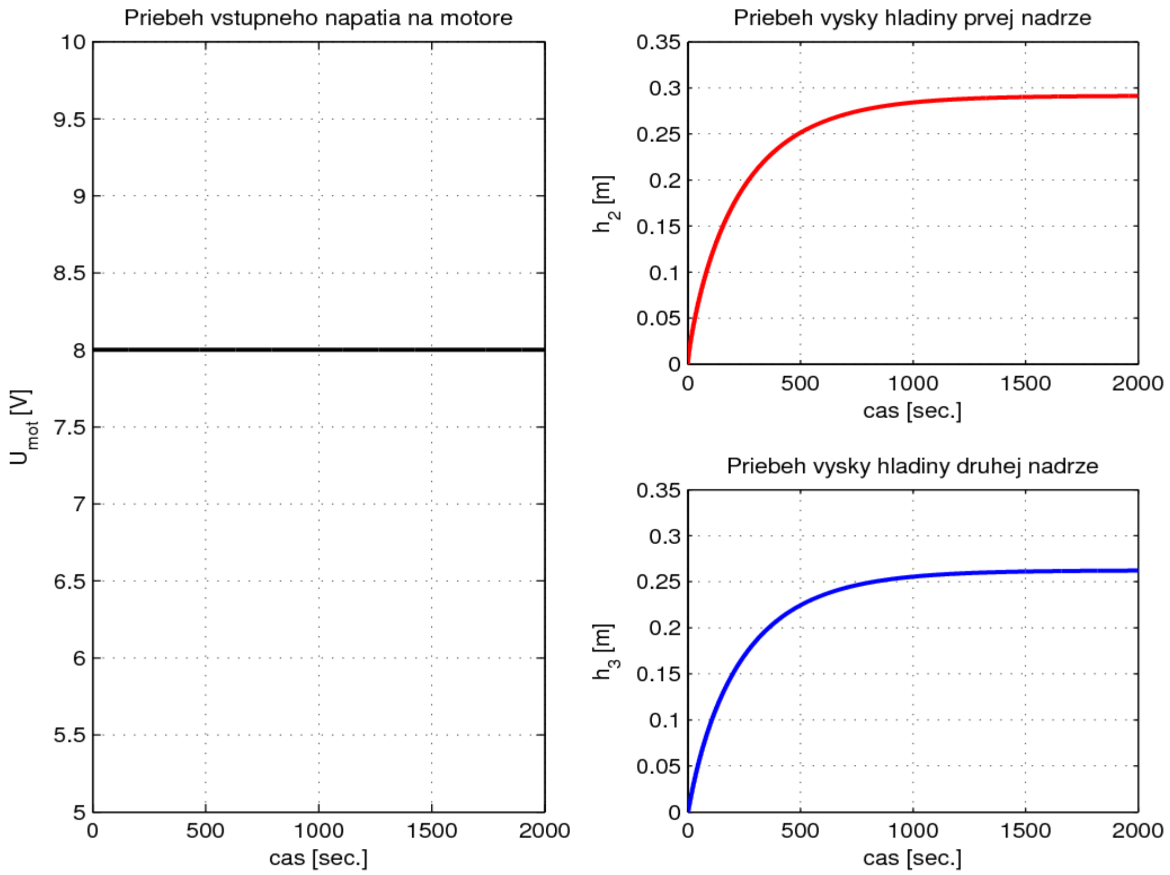
$$B = J(x_s) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u}\Big|_{x_s} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u}\Big|_{x_s} \end{pmatrix}_{x_s} \tag{14}$$

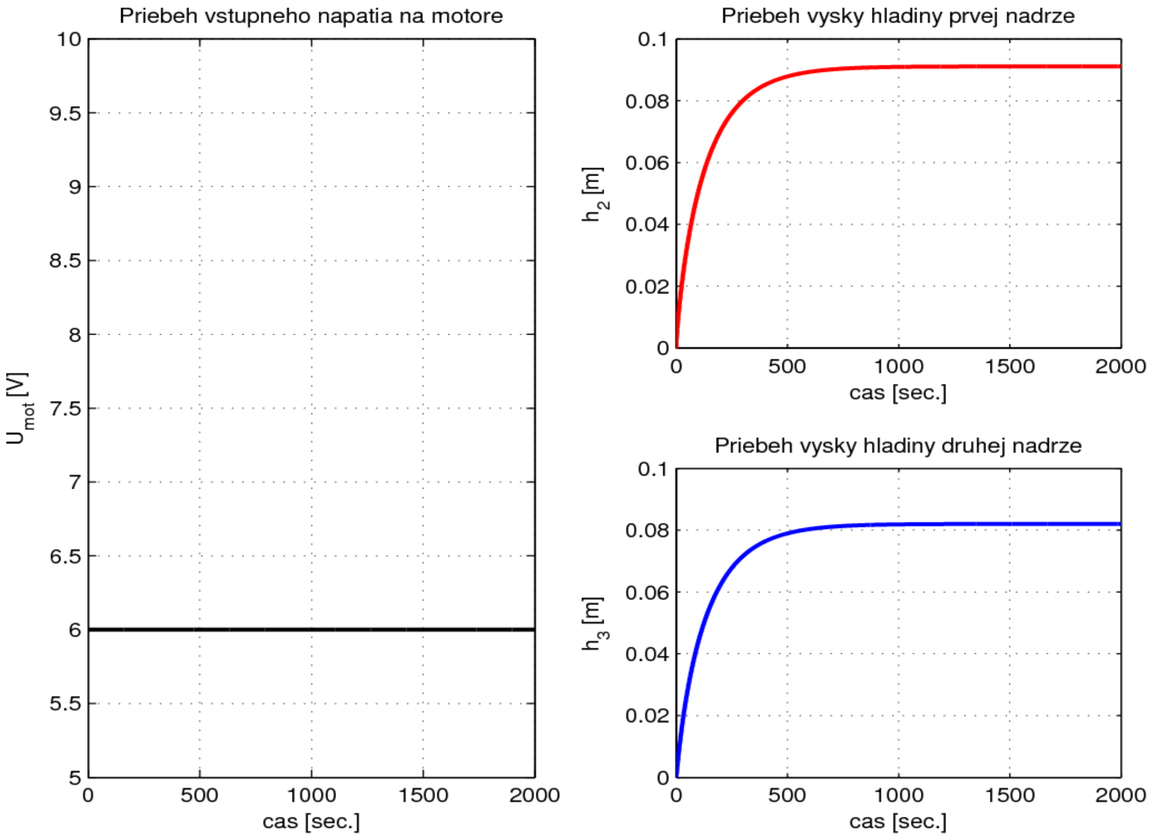
Úloha č. 4: **Simulujte dynamiku systému ako odozvu na rôzne vstupné signály**

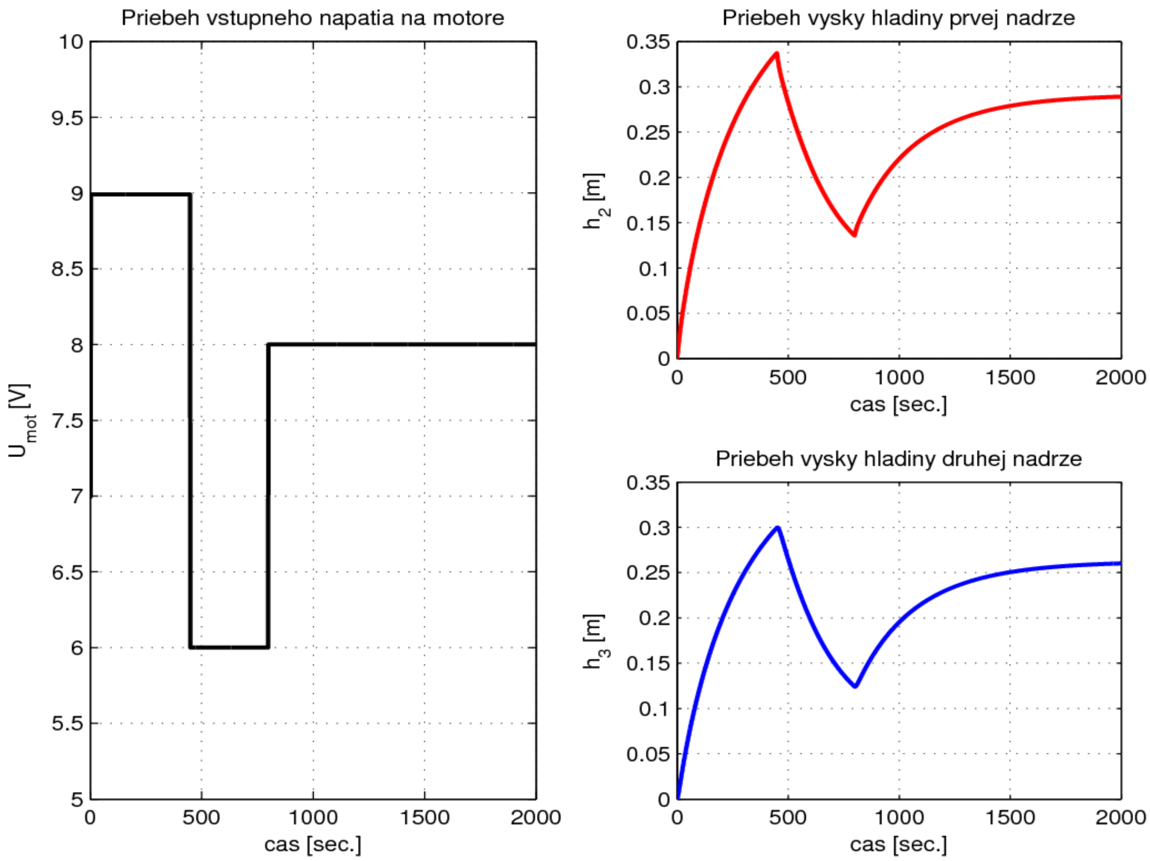
doba simulácie: *2000 s*

perióda vzorkovania: *1 s*

4.1 Verifikácia nelineárneho modelu M5




Priebeh vstupneho napatia na motore
U_mot [V]
cas [sec.]
Priebeh vysky hladiny prvej nadrze
h_2 [m]
cas [sec.]
Priebeh vysky hladiny druhej nadrze
h_3 [m]
cas [sec.]


Priebeh vstupneho napatia na motore
U_mot [V]
cas [sec.]
Priebeh vysky hladiny prvej nadrze
h_2 [m]
cas [sec.]
Priebeh vysky hladiny druhej nadrze
h_3 [m]
cas [sec.]

4.2 Verifikácia lineárneho odchýlkového modelu