

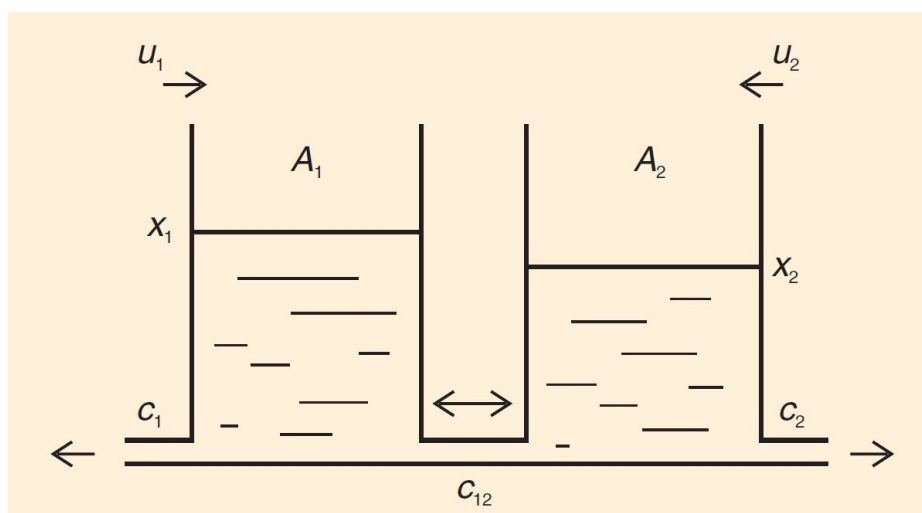
Programový modul pre modelovanie, riadenie a simuláciu

MIMO hydraulického systému

Hydraulika je témou v aplikovanej vede a technike zaoberajúcej sa mechanickými vlastnosťami tekutín. Na veľmi základnej úrovni sú hydraulické systémy kvapalnou verziou pneumatických systémov. Mechanika tekutín poskytuje teoretický základ pre hydrauliku, ktorá sa v strojárstve zameriava na využitie vlastností tekutiny. V hydromechanike je hydraulika využívaná pre generovanie, riadenie a prenos sily za použitia kvapalín pod tlakom. Oblasť hydraulických systémov siaha do väčšiny prírodovedných a technických odborov. Patria sem problematiky ako návrh priehrad, čerpadiel, výpočet dynamiky tekutín, meranie prietoku a správanie riečnych kanálov.

1. Charakteristika modelu MIMO hydraulického systému

Tento model reprezentuje tzv. *square systems* ("štvorcový systém"), ktoré majú zhodný počet vstupov a výstupov. Hydraulický model s dvomi vstupmi a výstupmi je uvedený na Obr. 1. Výstupom sú výšky hladín x_1 , x_2 v nádobách a vstupom sú prítoky u_1 , u_2 do nádob s prierezmi A_1 , A_2 . Medzi nádobami je potrubie s konštantným prietokom c_{12} a z nádob vyteká kvapalina cez potrubia s konštantnými prietokmi c_1 , c_2 .



Obr. 1: MIMO hydraulický model

2. Matematicko – fyzikálny opis systému

Kedže problematika riadenia hydraulického systému je učebnicovým príkladom, nie je nutné detailne vysvetľovať spôsob opisu systému rovnicami v stavovom priestore. Poznamenajme len, že rovnice sa zostavujú na základe zákona zachovania hmoty. V našom prípade to znamená, že rozdiel medzi tým, čo do nádoby vteká a tým, čo z nej vyteká, je to, čo sa v nádobe hromadí. Pričom to, čo z nádoby vyteká je, v prípade voľného odtoku, dané odmocninovou závislosťou od výšky hladiny v nádobe resp. rozdielu hladín v nádobách. Preto ak označíme symbolmi x_1 a x_2 výšky hladín v nádobách a symbolmi u_1 a u_2 vstupne prietoky (Obr. 1), rovnice zvlášť pre každú nádobu zostavíme tak, že jednoducho sčítame všetky prítoky a odtoky, s príslušnými znamienkami. To znamená:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{A_1} u_1 - c_1 \sqrt{x_1} - \text{sign}(x_1 - x_2) c_{12} \sqrt{|x_1 - x_2|} \quad , \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{A_2} u_2 - c_2 \sqrt{x_2} + \text{sign}(x_1 - x_2) c_{12} \sqrt{|x_1 - x_2|} \quad . \end{aligned} \quad (1)$$

3. Nelineárny simulačný model

Úloha 3.1:

Na základe rovníc (1) a blokovej schémy modelu MIMO hydraulického systému (Obr. 1) vytvorte simulačný model v programovom prostredí MatLab/Simulink.

Úloha 3.2:

Otestujte model v otvorenej slučke na tieto signály

- pulzný signál,
- sínusoidný signál

a výsledky graficky zobrazte. Nezabúdajte, že vstup u privádzaný na hydraulický model musí byť v rozsahu $(0, 0.05)m^3/s$.

4. Lineárna syntéza

Úloha 4.1:

Určte ustálenú hodnotu výšok hladín v nádobách z rovníc (1) na základe zvoleného vstupného prietoku alebo na základe zvolených výšok hladín v ustálenom stave.

Úloha 4.2:

Rozvojom nelineárneho modelu (1) do Taylorovho radu v pracovnom bode $x = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}$ získajte lineárny model v stavovom priestore v tvare

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2)$$

Úloha 4.3:

Na lineárny model (15) navrhnete stavové LQ riadenie do ustáleného stavu (stavová spätná väzba K , zosilnenie riadiacej veličiny N), s využitím funkcie *lqr* v MatLab-e. Cieľom riadenia nech je sledovanie referenčnej trajektórie. Overte navrhnuté algoritmy riadenia na nelineárnom simulačnom modeli.

Úloha 4.4:

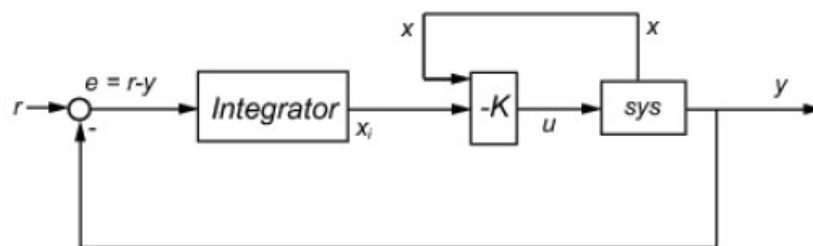
Na lineárny model (2) navrhnete stavové riadenie s integračnou zložkou (LQI). Najskôr je potrebné rozšíriť stavový opis lineárneho modelu (2) o ďalší stav (odchýlku e výstupu y od požadovanej hodnoty r), ktorý je definovaný

$$e = r - y \quad (3)$$

Vektor x tak nadobudne 4. stav, a lineárny stavový model použitý pre návrh stavového LQI riadenia tak nadobudne tvar

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A \\ 0 \dots 0 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u_{MU} \\ y_{MU} &= (C \ 0) \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

Na lineárny model (4) navrhnete stavové riadenie s integračnou zložkou (LQI) do ustáleného stavu (stavová spätná väzba K , zosilnenie riadiacej veličiny N), s využitím funkcie *lqi* v MatLab-e. Cieľom riadenia nech je sledovanie referenčnej trajektórie. Overte navrhnuté algoritmy riadenia na nelineárnom simulačnom modeli v riadiacej štruktúre podľa Obr. 2.



Obr. 2 Schéma zapojenia LQI stavového regulátora

5. MIMO systémy linearizovateľné statickou spätnou väzbou

V tejto časti si popíšeme návrh statickej spätnej väzby na báze spätoväzobnej exaktnej linearizácie pre tzv. "štvorcové systémy".

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g_1(x)u_1 + \dots + g_p(x)u_p \\ y_1 &= h_1(x) \\ &\vdots \\ y_p &= h_p(x)\end{aligned}\quad (5)$$

Za predpokladu, že funkcie f, g_i sú hladké vektorové polia a h_j sú hladké funkcie.

Táto metóda spočíva vo výpočte Lie derivácií, avšak najskôr si zadefinujeme niektoré základné pojmy. Pre skalárnu funkciu $\lambda(x) = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorovej premennej $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ a n -rozmernú vektorovú funkciu

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

definujeme novú skalárnu funkciu premennej x nazývanú Lieho operátor, ktorá sa zvyčajne označuje $L_f \lambda(x)$, pričom

$$L_f \lambda(x) = L_f \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (7)$$

Po označení $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}, \frac{\partial \lambda}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} \right)$ možno funkciu $L_f \lambda(x)$ jednoducho vyjadriť

ako

$$L_f \lambda(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} f(x). \quad (8)$$

Nová funkcia $L_f \lambda(x)$ sa nazýva aj derivácia $\lambda(x)$ pozdĺž $f(x)$. Možné je aj opakované použitie tejto operácie. Napríklad derivovaním $\lambda(x)$ najskôr pozdĺž $f(x)$ a potom pozdĺž $g(x)$ je možné skonštruovať funkciu

$$L_g L_f \lambda(x) = \frac{\partial L_f \lambda}{\partial x} g(x). \quad (9)$$

Derivovaním $\lambda(x)$ k -krát pozdĺž $f(x)$ môžeme rekurzívne definovať funkciu

$$L_f^k \lambda(x) = \frac{\partial L_f^{k-1} \lambda}{\partial x} f(x). \quad (10)$$

Začneme derivovaním j -teho výstupu nelineárneho systému (5) v čase a dostaneme

$$\dot{y}_j = L_f h_j + \sum_{i=1}^p (L_{g_i} h_j) u_i. \quad (11)$$

V rovnici (11) si všimnime, že ak platí pre všetky $L_{g_i} h_j = 0$, potom sa žiaden zo vstupov neobjaví v rovnici. Definujme y_j ako najmenšie celé číslo, pri ktorom sa aspoň jeden zo vstupov objaví v

$$\dot{y}_j^{y_j} = L_f h_j + \sum_{i=1}^p L_{g_i} (L_f^{y_j-1} h_j) u_i \quad (12)$$

s aspoň jedným z $L_{g_i} (L_f^{y_j-1} h_j) \neq 0$, pre určité x . Definujme $p \times p$ maticu $A(x)$ nasledovne

$$A(x) = \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{y_1-1} h_1 & \dots & L_{g_1} L_f^{y_p-1} h_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_p} L_f^{y_1-1} h_1 & \dots & L_{g_p} L_f^{y_p-1} h_p \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Pomocou týchto definícií, môžeme zdefinovať vektor relatívnych rádov. Nelineárny systém (5) má vektor relatívnych rádov y_1, y_2, \dots, y_p v bode x_0 ak platí

$$L_{g_i} L_f^k h_i(x) = 0, \quad 0 \leq k \leq y_i - 2 \quad (14)$$

pre $i=1, \dots, p$ a matica $A(x_0)$ nie je singulárnou maticou.

Ak má systém správne určený vektor relatívnych rádov, potom môžeme sústavu rovníc (12) zapísať v tvare

$$\begin{pmatrix} y_1^{y_1} \\ \vdots \\ y_p^{y_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_f^{y_1} h_1 \\ \vdots \\ L_f^{y_p} h_p \end{pmatrix} + A(x) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Keďže matica $A(x_0)$ nie je singulárna, potom $A(x) \in R^{p \times p}$ je ohraničené od nesingularity pre $x \in U$, kde U je blízke okolie bodu x_0 . Z toho plynie, že $A^{-1}(x)$ má ohraničenú normu U na množine. Potom statický spätnoväzobný zákon riadenia

$$u = -A^{-1}(x) \begin{pmatrix} L_f^{y_1} h_1 \\ \vdots \\ L_f^{y_p} h_p \end{pmatrix} + A^{-1}(x) v \quad (16)$$

transformuje nelineárny systém (5) na lineárny spätnoväzobný systém v tvare

$$\begin{pmatrix} y_1^{y_1} \\ \vdots \\ y_p^{y_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Všimnime si, že lineárny systém (17) je dekomponovaný, čo znamená, že dekompozícia je v tomto prípade vedľajším produktom linearizácie. Šťastnou náhodou je fakt, že veľký počet výsledkov zahrňujúcich SISO nelineárne systémy môže byť veľmi jednoducho rozšírených na tzv. MIMO "štvorcové systémy".

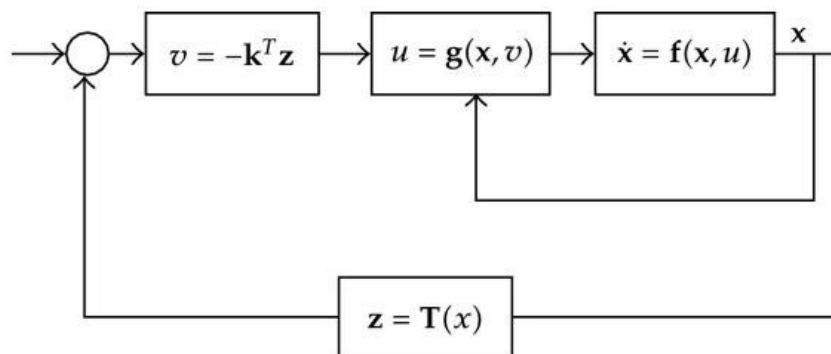
5.1 Implementácia statickej spätnej väzby

Na získanie lineárnej formy nelineárneho systému je potrebné vyrátať vstup u do modelu na základe rovnice (16), kde v predstavuje nový vstup do systému opísaného sústavou rovníc (17). Transformovaný lineárny systém vieme zapísať tiež v stavovom priestore

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} v.$$

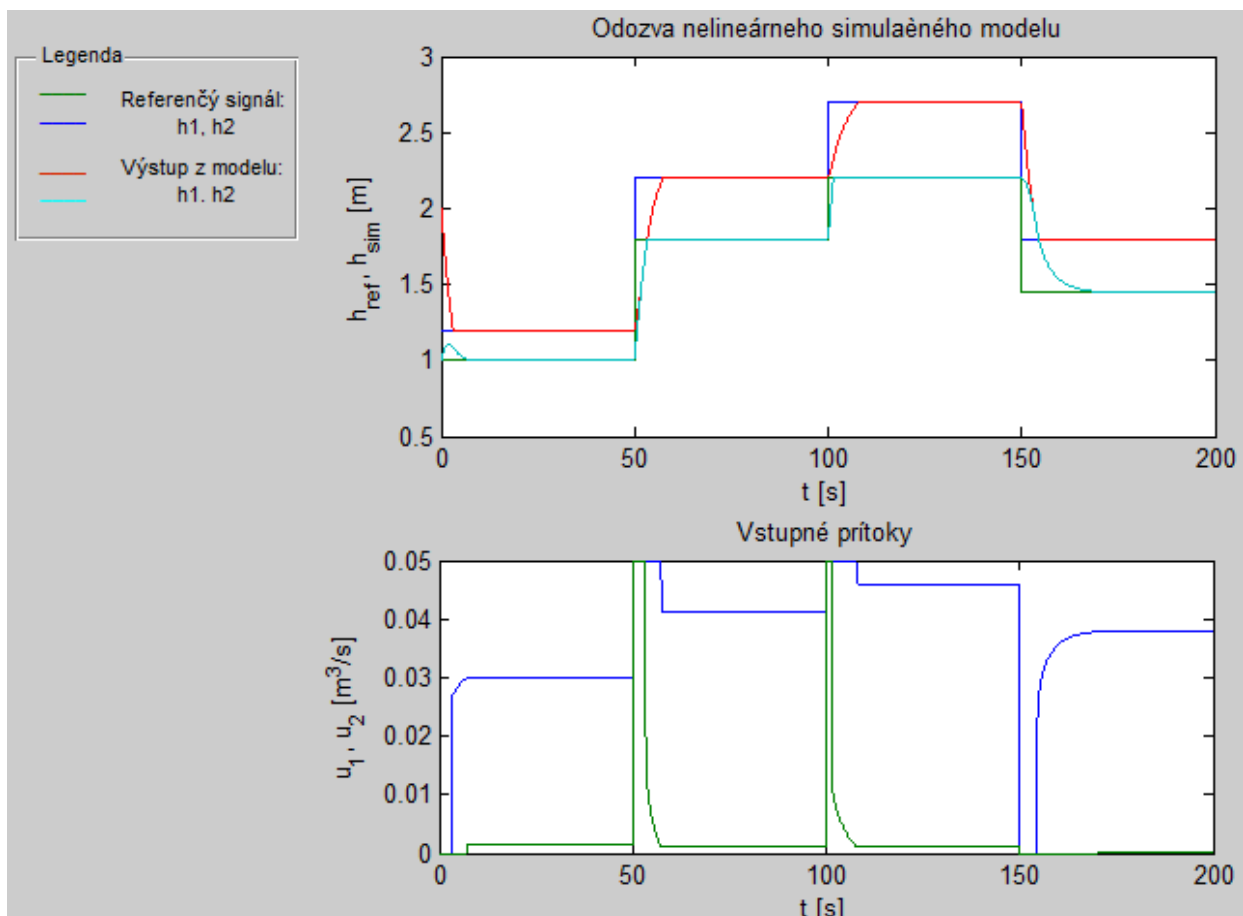
$$y = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} z. \quad (18)$$

Na lineárny riaditeľný systém v tvare (18) môžeme aplikovať metódy lineárnej syntézy, ako sú napríklad stavové LQ, LQI riadenie, metóda umiestnenia pólov apod. Výsledky spätnoväzobnej linearizácie a následný návrh lineárnej spätnej väzby implementujeme do riadiacej štruktúry podľa Obr. 3.

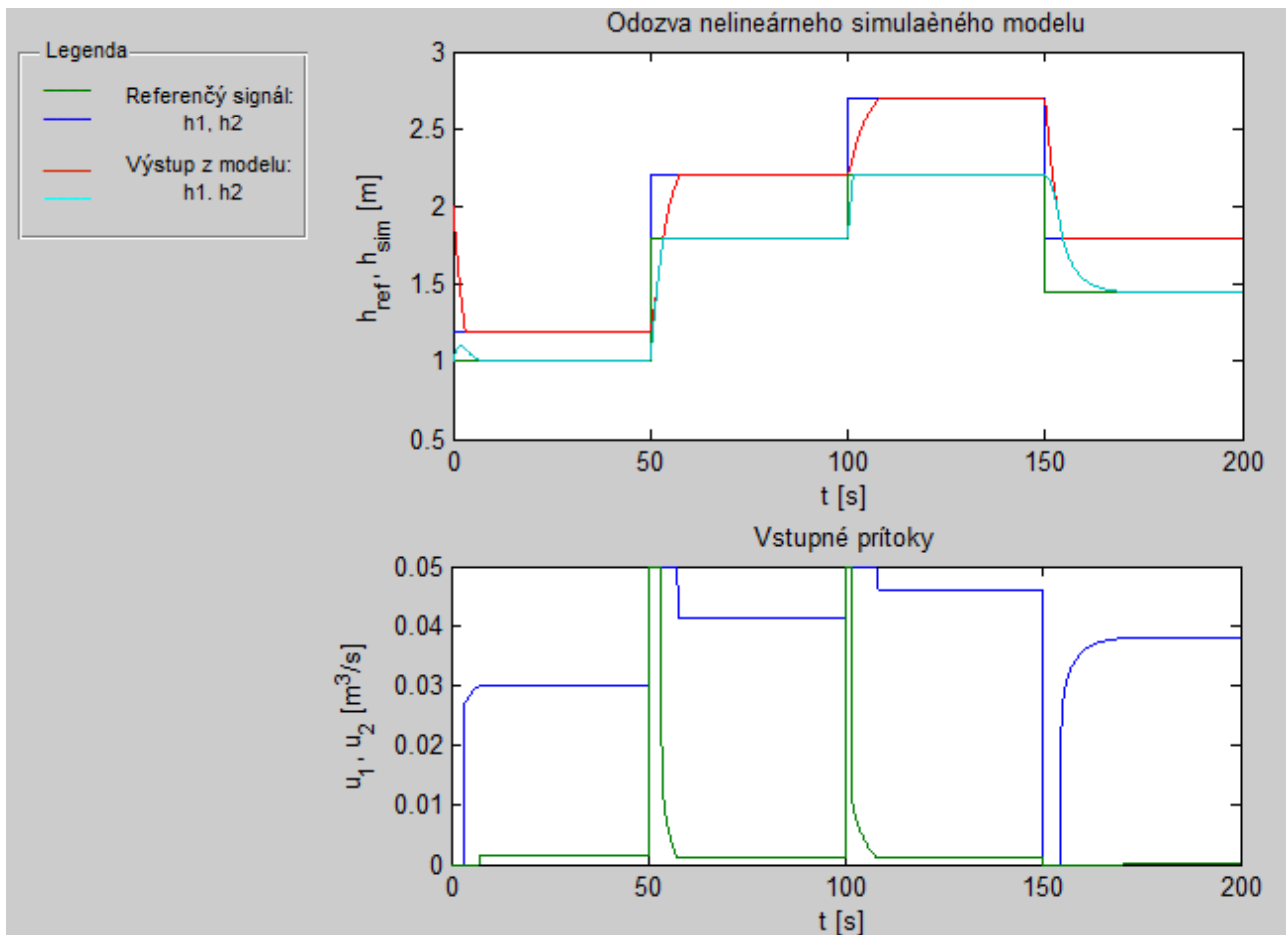


Obr. 3 Implementácia spätnoväzobnej exaktnej linearizácie v riadiacej štruktúre

Lineárne stavové LQR, LQI regulátory navrhujeme rovnakým spôsobom ako na lineárny systém získaný rozvojom do Taylorovho radu avšak na systém popísaný rovnicami (18). Pokiaľ boli nelineárna syntéza, LQR a LQI stavové riadenia transformovaného systému navrhnuté správne, výstup nelineárneho systému bude verne sledovať referenčnú trajektóriu. Na Obr. 4 je znázornený grafický výsledok simulácie riadenia lineárneho systému (18) LQR regulátorom a na Obr. 5 je zobrazený výsledok simulácie riadenia lineárneho systému (18) LQI regulátorom.



Obr. 4: Výsledok simulácie riadenia metódou exaktnej linearizácie spolu so stavovým LQR regulátorom



Obr. 5: Výsledok simulácie riadenia metódou exaktnej linearizácie spolu so stavovým LQI regulátorom