TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Hálkova 6, 461 17 Liberec 1, CZ

Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií

Teorie automatického řízení I.

LAPLACEOVA TRANSFORMACE

Studijní materiály

Doc. Ing. Osvald Modrlák, CSc.

Katedra řídicí techniky

Obsah

1. LAPLACEOVA TRANSFORMACE

DEFINICE LAPLACEOVY TRANSFORMACE

Laplaceova transformace patří do skupiny integrálních transformací a je základním matematickým aparátem v teorii lineární regulace a řízení. Používá se především pro řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty a ale tento postup pak následně umožňuje:

- nalezení homogenního a partikulárního řešení v jednom kroku,
- převádí diferenciální rovnice na algebraické rovnice, jejichž řešení v s- rovině je již známé a jednoduché,
- umožňuje zavést ***obrazový přenos, blokovou algebru, frekvenční přenos*** atd., což pak nachází široké uplatnění v analýze a syntéze řízení

Definiční vztahy Laplaceovy transformace

$$L\{y(t)\} = \int_0^\infty y(t)e^{-st}\,dt = Y(s), \qquad (P2-1)$$

kde je *y(t)* je obecně komplexní funkce reálné proměnn *t*, která splňuje následující podmínky

a) je po částech spojitá pro $t \geq 0$

b) $y(t) = 0$ pro $t < 0$

c) *y(t)* je exponenciálního řádu. Funkce reálné proměnné *t* se nazývá exponenciálního řádu, jestliže existuje takové reálné číslo "c" (*index růstu*), že platí $\lim_{t\to\infty}\left|y(t)e^{-ct}\right| = 0$

Poznámka: Funkce vyhovující podmínkám a), b), c) se nazývá ***předmět standardního typu.***

s je komplexní proměnná

Y(s) je Laplaceův obraz - komplexní funkce proměnné *s*

Definiční vztah inverzní (zpětné) Laplaceovy transformace

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y(s)e^{st}\,ds = L^{-1}\{Y(s)\} \square\, y(t) = \sum res\left[Y(s)e^{st}\right]_{s=s_k}, \qquad (P2-2)$$

kde je *i* imaginární jednotka, pro kterou platí $i^2 = -1$,

c index růstu

Y(s) je Laplaceův obraz - komplexní funkce proměnné *s*

Ve většině aplikací je funkce *y(t)* reálná funkce proměnné *t*. Pro výpočet L-obrazu se zpravidla nepoužívá definiční integrál (P2 – 1) ale využívá se vlastností L transformace nebo se pracuje se slovníkem L-transformace. Podobně výpočet předmětu z obrazu není zpravidla nutno řešit definičním integrálem inverzní transformace (P2 – 2), ale využívá se rozkladu na parciální zlomky. Použití definičního integrálu pro výpočet L-obrazu je demonstrováno na následujícím příkladě.

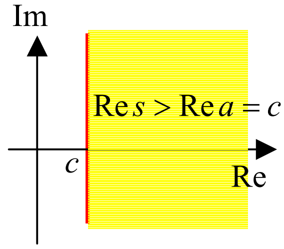
Příklad P2.1 Nalezněte L-obraz funkce $y(t)=e^{at}$.

Řešení: Podle definice (P2 - 1) platí

$$Y(s)=L\{e^{at}\}=\int_0^{\infty} e^{at}\cdot e^{-st}\cdot dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^{t} e^{t(a-s)}\cdot dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1-e^{(a-s)T}}{s-a}=\frac{1}{s-a};$$

$$pro\ \mathrm{Re}\,s\geq a\quad je\ \lim_{T\to\infty} e^{(a-s)T}=0$$

$$\boxed{\exp(at)\cdot 1(t)=1(t)e^{at}\ \hat{=}\ \frac{1}{s-a};}\qquad (\text{P2}-3)$$



Obr.1 *Oblast konvergence*

L-obraz je funkce analytickou v polorovině $\mathrm{Re}\,s>\mathrm{Re}\,a=c$.

Konec příkladu

1.1 VLASTNOSTI LAPLACEOVY TRANSFORMACE

Abychom mohli účinně využívat v analýze a syntéze dynamických systémů všech možností, které nabízí L-transformace, je nutné se seznámit s vlastnostmi L-transformace. Důkaz jednotlivých vět nebude vždy proveden, pouze tam, kde je to vhodné, bude naznačen. Vlastnosti budou demonstrovány na jednoduchých příkladech.

1) Věta o linearitě

Nechť C_1, C_2 jsou libovolné komplexní konstanty a funkce $y_1(t)$, $y_2(t)$ mají L-obraz $Y_1(s)$, $Y_2(s)$ pak platí

$$\boxed{L\{C_1\cdot y_1(t)+C_2\cdot y_2(t)\}=C_1\cdot Y_1(s)+C_2\cdot Y_2(s)},\qquad (\text{P2}-4)$$

Odvození (P2 – 4): Z definice L-transformace plyne

$$L\{C_1\cdot y_1(t)+C_2\cdot y_2(t)\}=\int_0^{\infty} C_1 y_1(t)\cdot e^{-st}dt+\int_0^{\infty} C_2 y_2(t)\cdot e^{-st}dt=$$

$$=C_1\int_0^{\infty} y_1(t)\cdot e^{-st}dt+C_2\int_0^{\infty} y_2(t)\cdot e^{-st}dt=C_1\cdot Y_1(s)+C_2\cdot Y_2(s),$$

kde $Y_1(s)=\int_0^{\infty} y_1(t)\cdot e^{-st}dt,\ Y_2(s)=\int_0^{\infty} y_2(t)\cdot e^{-st}dt.$

Příklad P2.2

Nalezněte L-obraz funkce $\sin \omega t$ a $\cos \omega t$

Řešení:

Funkci $\sin \omega t, \cos \omega t$ vyjádříme ve tvaru $\sin \omega t = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$; $\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$.
Použitím věty o linearitě dostaneme

$$\boxed{L\{\sin \omega t\} = L\left\{\frac{1}{2i}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})\right\} = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s+i\omega} + \frac{1}{s-i\omega}\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2},} \quad (P2-5a)$$

$$\boxed{L\{\cos \omega t\} = L\left\{\frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s+i\omega} + \frac{1}{s-i\omega}\right] = \frac{s}{s^2+\omega^2}.} \quad (P2-5b)$$

Konec příkladu

2) Věta o obrazu derivace předmětu

Nechť funkce *y(t)* je spojitá na otevřeném intervalu $(0, +\infty)$ a nechť existuje obraz její derivace *y'(t)*, potom platí

$$\boxed{L\{y(t)'\} = sY(s) - y(0+),} \quad (P2-6)$$

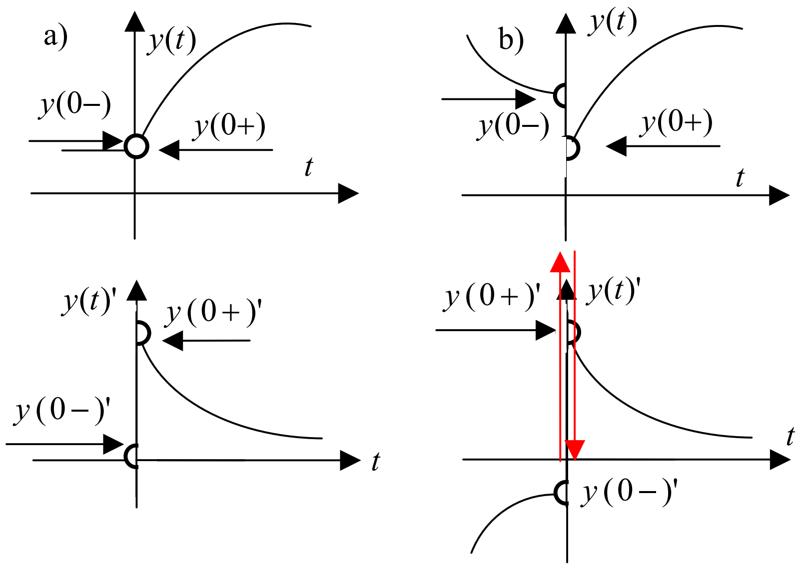
kde $y(0+) = \lim_{t\to 0+} y(t)$ je počáteční podmínka zprava.

Pro funkci *y(t)* může být počáteční podmínka zprava *y(0+)* a zleva *y(0-)* stejná, nebo se mohou lišit viz obr.P2.2

Významný jev nastává tehdy, jestliže funkce má rozdílné derivace zprava a zleva pro *t = 0*, protože v tomto případě derivace podle času $\frac{dy}{dt}$ vyvolá Diracův impuls viz obr. P2.2b.
Rovnici (P2 – 4) je možno modifikovat do tvaru

$$\boxed{L_{+}\{y(t)'\} = sY(s) - y(0+),}$$

$$\boxed{L_{-}\{y(t)'\} = sY(s) - y(0-),}$$



Obr.P2.2 *Počáteční podmínky zleva a zprava*

Odvození (P2 – 6):

Odvození (P2 – 6) se opírá o integraci per partes $\int uv' = uv - \int u'v$. Platí

$$\int_0^\infty y(t)e^{-st}dt = y(t)\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{d}{dt}y(t)\frac{e^{-st}}{-s}dt$$

Z této rovnosti plyne pak vztah (P2 – 4)

$$Y(s) = \frac{y(0)}{s} + \frac{1}{s}L\left\{\frac{d}{dt}\cdot y(t)\right\} \quad \to \quad L\left\{\frac{d}{dt}\cdot y(t)\right\} = sY(s) - y(0)\,.$$

Podobně lze odvodit formule pro L-obraz druhé derivace

$$\boxed{L\left\{\frac{d}{dt}\cdot y(t)\right\} = s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0)}. \qquad \text{(P2 – 7)}$$

L-obraz *n-té* derivace *y(t)*, za předpokladu, že všechny derivace $y'(t), y''(t), \cdots, y^{(n)}(t)$ mají L-obrazy, je definován

$$\boxed{L\left\{\frac{d^n}{dt^n}\cdot y(t)\right\} = s^nY(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y^{(1)}(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)}. \qquad \text{(P2 – 8)}$$

Je-li třeba vyjádřit L_+ nebo L_- pak se provede substituce $t = 0+$ nebo $t = 0-$ v derivacích $y(t), y^{(1)}(t), y^{(2)}(t), \cdots, y^{(n-1)}(t)$ podle toho, který L-obraz se vyžaduje.

Příklad P2.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $2y' + y = 3u,\ \ y(0+) = 2,\ u = 1(t)$

Řešení:

$$L\{2y' + y\} = L\{3u\} \quad y(0+) = 2,\ u = 1(t)$$

$$2[sY(s) - y(0+)] + Y(s) = 3U(s)$$

$$[2s+1]Y(s) = 3U(s) + 2y(0+); \to Y(s) = \frac{3}{2s+1}U(s) + \frac{2y(0+)}{2s+1}$$

Jestliže L-obraz jednotkového skoku je $\frac{1}{s}$ a $y(0+) = 2$ pak dostaneme

$$Y(s) = \frac{3}{2s+1}U(s) + \frac{2y(0+)}{2s+1} = \frac{3}{s(2s+1)} + \frac{4}{2s+1} = Y_U(s) + Y_P(s).$$

L-obraz byl rozdělen na část, jejíž L-obraz odpovídá buzení $Y_U(s)$ a na část $Y_P(s)$, která respektuje nenulové počáteční podmínky. Předmět k L-obrazu *Y(s)* je možno určit pomocí definičního integrálu zpětné transformace nebo rozkladem na parciální zlomky viz Příloha P3. Podle (P2 – 3) je předmět k $Y_P(s)$ přímo roven

$$Y_P(s) = \frac{4}{2s+1} = \frac{2}{s+0{,}5} \risingdotseq 2\cdot e^{-0{,}5t} = y_P(t)\,.$$

Předmět $Y_U(s)$ určíme pomocí rozkladu na parciální zlomky viz (P3 – 2) a koeficienty A_1, A_2 určíme podle (P3 – 3)

$$Y_U(s) = \frac{3}{s(2s+1)} = \frac{1{,}5}{s(s+0{,}5)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s+0{,}5)} = \frac{3}{s} - \frac{3}{(s+0{,}5)} \mathrel{\hat{=}} 3(1-e^{-0{,}5t}) = y_U(t).$$

Odezva $y(t)$ je dána součtem

$$y(t) = y_U(t) + y_P(t) = 3(1-e^{-0{,}5t}) + 2e^{-0{,}5t} = 3 - e^{-0{,}5t}$$

Kontrola počátečních podmínek:

$$y_P(0+) = 2, \quad y_U(0+) = 0, \quad y(0+) = y_P(0+) + y_U(0+) = 2.$$

Konec příkladu

1.2 PŘEPOČET POČÁTEČNÍCH PODMÍNEK

Uvažujme diferenciální rovnici ve tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \cdots + b_1 u^{(1)} + b_0 u, \; pro \; m \le n\,.$$

Bude-li budící funkce $u(t)$ nespojitá pro $t = 0$, pak pro počáteční podmínky zleva a zprava platí:

$$\begin{array}{l} y^{(j)}(0-) = y^{(j)}(0+) \text{ pro } j = 0, 1, \ldots, n-m-1 \\ y^{(k)}(0-) \neq y^{(k)}(0+) \text{ pro } k = n-m, \ldots, n-1 \end{array} \qquad \text{(P2 – 9)}$$

Vlastní přepočet je založen na postupné n-násobné integraci kolem ε okolí v počátku $\langle \varepsilon+, \varepsilon- \rangle$. Postupnou integrací získáme n-rovnic a následným limitním přechodem pro $\varepsilon \to 0$ dostaneme hledané přepočítávací vztahy. Postup ukážeme na následujícím příkladě.

Příklad P2.4

Uvažujte dynamický systém popsaný diferenciální rovnicí $y''+3y'+2y = u + 2u'$ a) $y(0-) = 1;\; y'(0-) = -1;\; u = 1(t)$.
b) $y(0-) = 0;\; y'(0-) = 0;\; u = 1(t)$

Nalezněte počáteční podmínky $y(0+) = ?$ a $y'(0+) = ?$

Řešení: Provedeme integraci diferenciální rovnice kolem počátku a dostaneme

$$\int_{\varepsilon-}^{\varepsilon} (y''+3y'+2y)dt = \int_{\varepsilon-}^{\varepsilon} (u + 2u')dt \to y'\Big|_{\varepsilon-}^{\varepsilon} + 3y\Big|_{\varepsilon-}^{\varepsilon} + 2\int_{\varepsilon-}^{\varepsilon} ydt\,,$$

$$y'(\varepsilon+) - y'(\varepsilon-) + 3\big[y(\varepsilon+) - y(\varepsilon-)\big] + \int_{\varepsilon-}^{+\varepsilon} ydt = \int_{\varepsilon-}^{+\varepsilon} udt + 2\big[u(\varepsilon+) - u(\varepsilon-)\big].$$

Limitním přechodem $\lim \varepsilon \to 0$ pak dostáváme první vazební podmínku mezi počátečními podmínkami zprava a zleva.

$$\boxed{y'(0+) - y'(0-) + 3\left[y(0+) - y(0-)\right] = +2\left[u(0+) - u(0-)\right]}, \qquad (1)$$

za předpokladu že platí $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon-}^{+\varepsilon} y dt = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon-}^{+\varepsilon} u dt = 0$.

Provedeme-li druhou integraci dostaneme

$$\iint\limits_{\varepsilon-} (y''+3y'+2y)dt^2 = \int\limits_{\varepsilon-}^{+\varepsilon} \int\limits_{\varepsilon-}^{\varepsilon} (u + 2u')dt \to$$

$$y(t)\Big|_{\varepsilon-}^{\varepsilon+} + 3\int\limits_{\varepsilon-}^{\varepsilon+} y(t)dt + 2\int\limits_{\varepsilon-}^{\varepsilon+} \int\limits_{\varepsilon-}^{\varepsilon+} y(t)dt^2 = \int\limits_{\varepsilon-}^{\varepsilon+} \int\limits_{\varepsilon-}^{\varepsilon+} u(t)dt^2 + 2\int\limits_{\varepsilon-}^{\varepsilon+} y(t)dt.$$

Integrální rovnici je možno rozepsat do tvaru

$$y(\varepsilon+) - y(\varepsilon-) + 3\int\limits_{\varepsilon-}^{\varepsilon+} y(t)dt + 2\int\limits_{\varepsilon-}^{\varepsilon+} \int\limits_{\varepsilon-}^{\varepsilon+} y(t)dt^2 = \int\limits_{\varepsilon-}^{\varepsilon+} \int\limits_{\varepsilon-}^{\varepsilon+} u(t)dt^2 + 2\int\limits_{\varepsilon-}^{\varepsilon+} y(t)dt.$$

a limitním přechodem $\lim \varepsilon \to 0$ dostaneme

$$\boxed{y(0+) - y(0-) = 0}, \qquad (2)$$

přičemž $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon-}^{\varepsilon+} y dt = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon-}^{\varepsilon+} \int\limits_{\varepsilon-}^{\varepsilon+} y dt^{2} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon-}^{\varepsilon+} u dt = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon-}^{\varepsilon+} \int\limits_{\varepsilon-}^{\varepsilon+} u dt^{2} = 0$

Platí: a) $y(0-) = 1;\ y'(0-) = -1;\ u = 1(t)$

$y(0+) = y(0-)$, $u(0+) = 1, u(0-) = 0,$ $\qquad y(0+) = 1$

$y'(+0) = y'(0-) - 3\left[y(0+) - y(0-)\right] = +2\left[u(0+) - u(0-)\right] \to y'(0+) = 1$

b) $y(0-) = 0;\ y'(0-) = 0;\ u = 1(t)$

$y(0+) = y(0-) = 0$ $\qquad y(0+) = 0$

$y'(0+) = y'(0-) - 3\left[y(0+) - y(0-)\right] = +2\left[u(0+) - u(0-)\right] \to y'(0+) = 2$

Prosím, porovnejte výsledky. Zajímavý je určitě případ b), kdy počáteční podmínky zleva jsou nulové, a zprava pro derivaci *y'(0+)* vycházejí nenulové. Proto v definici obrazového přenosu se požadují počáteční podmínky zleva nulové!

Konec příkladu

3) Věta o obrazu integraci předmětu

Nechť funkce *y(t)* je předmětem standardního typu, pak je jím i její integrál a platí

$$L\left\{\int_0^t y(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\cdot Y(s) \qquad \text{(P2 – 10)}$$

Příklad P2.5

Nalezněte L-obraz $L\left\{\int_0^t 1(\tau)d\tau\right\}$

Řešení: L-obraz jednotkového skoku určíme z L-obrazu exponenciální funkce tak, že dosadíme za

$$1(t)e^{at}\Big|_{a=0} \;\hat{=}\; \frac{1}{s-a}\Big|_{a=0} = \frac{1}{s}; \qquad \text{(P2 – 11a)}$$

a následně pak

$$L\left\{\int_0^t 1(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\cdot L\{1(t)\} = \frac{1}{s^2} \;\hat{=}\; t. \qquad \text{(P2 – 11b)}$$

Konec příkladu

4) Věta o obrazu konvoluce

Nechť funkce *u(t)*, *g(t)* jsou předměty standardního typu, mající L-obrazy *U(s), G(s)* pak platí

$$L\{y(t)\} = L\{u(t)*g(t)\} = L\{\int_0^t u(\tau)g(t-\tau)d\tau\} = L\{\int_0^t u(t-\tau)g(\tau)d\tau\} = G(s)U(s) = Y(s)$$

(P2 – 12)

Laplaceův obraz konvoluce je dán prostým součinem jejich L-obrazů G(s) a U(s).

Odvození (P2 – 12): Odvození věty o konvoluci vychází z definice L-transformace, tedy musí platit

$$L\{y(t)\} = L\{u(t)*g(t)\} = L\{\int_0^t u(t-\tau)\cdot 1(t-\tau)\cdot g(\tau)d\tau\} = \int_0^\infty e^{-st}[\int_0^t u(t-\tau)1(t-\tau)g(\tau)d\tau]dt$$

Funkce $u(t-\tau)\cdot 1(t-\tau)$ je nulová pro $t<\tau$. Substitucí $x = t-\tau$

$$L\{y(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}[\int_0^t u(t-\tau)1(t-\tau)g(\tau)d\tau]dt = \int_0^\infty e^{-s(x+\tau)}[\int_{-\tau}^{x+\tau} u(x)1(x)g(\tau)d\tau]dx$$

Výraz můžeme upravit do tvaru

$$L\{y(t)\} = \int_0^\infty e^{-s(x+\tau)}[\int_{-\tau}^{x+\tau} u(x)1(x)g(\tau)d\tau]dx = \int_0^\infty e^{-s(x+\tau)}[\int_0^x u(x)1(x)dx \cdot \int_0^\infty g(\tau)d\tau] =$$

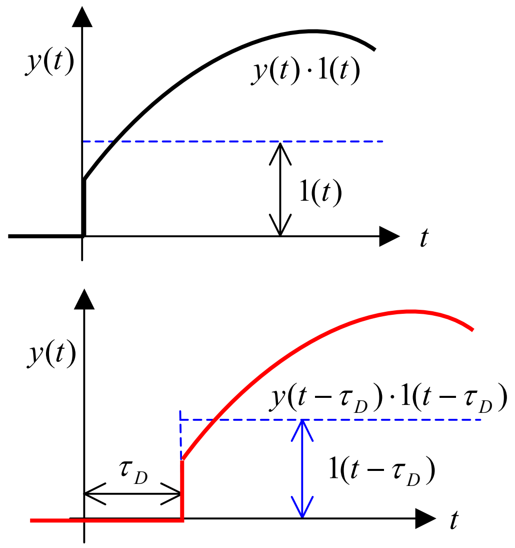
$$= \int_0^\infty u(x)1(x)e^{-sx}dx \int_0^\infty g(\tau)e^{-s\tau}d\tau = U(s)\cdot G(s)\,.$$

5) Věta o posunutí (o translaci)

Nechť *y(t)* je předmět standardního typu, který má L-obraz *Y(s)*. Pak funkce posunutá vpravo $y(t-\tau_D)*1(t-\tau_D)$ o $\tau_D \geq 0$ má L-obraz a platí

$$\boxed{L\{y(t-\tau_D)*1(t-\tau_D)\} = Y(s)\cdot e^{-STD}} \quad \text{(P2 – 13)}$$

Posunutí předmětu o τ_D doprava odpovídá násobení obrazu $e^{-s\tau_D}$



Obr.P2.3 *Funkce posunutá vpravo*

Odvození (P2 – 13): Při odvození vyjdeme z definičního integrálu L- transformace. Platí

$$L\{y(t-\tau_D)*1(t-\tau_D)\} = \int_0^\infty y(t-\tau_D)*1(t-\tau_D)e^{-st}dt = \int_{\tau D}^\infty y(t-\tau_D)*1(t-\tau_D)e^{-st}dt\,,$$

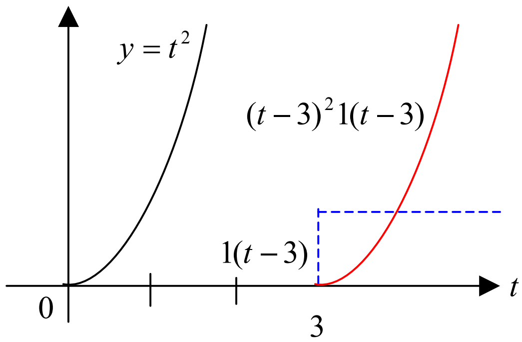
protože na intervalu (0, τ_D) je integrovaná funkce rovna nule. Zavedeme-li substituci $x = t - \tau_D$ pak dostaneme

$$\int_{\tau D}^\infty y(t-\tau_D)*1(t-\tau_D)e^{-st}dt = \int_0^\infty y(x)*1(x)e^{-s(x+\tau D)}dx = e^{-s\tau D}\int_0^\infty y(x)*1(x)e^{-sx}dx = e^{-s\tau D}Y(s)$$

Integrál na pravé straně je právě *Y(s)*, takže platí

$$y(t-\tau_D)*1(t-\tau_D) \mathrel{\hat{=}} e^{-s\tau D}Y(s)$$

Příklad P2.6a Nalezněte L-obraz paraboly $y = t^2$ posunuté vpravo o $\tau_D = 3\,\text{sec}$.



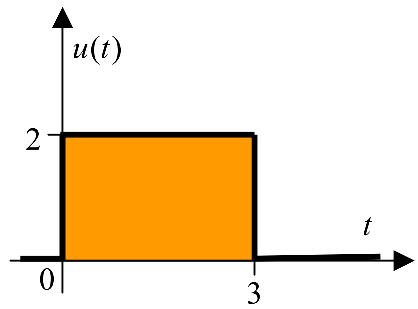
Řešení: $L\{t^2 \cdot 1(t)\} = \dfrac{2}{s^3}$, podle věty o translaci platí

$$L\{(t-3)^2 \cdot 1(t-3)\} = \frac{2}{s^3} e^{-3s}.$$

Konec příkladu

Příklad P2.6b

Nalezněte L-obraz pulsu dle obrázku.



Řešení: Puls vytvoříme ze skokové funkce výšky 2 od kterého odečteme v časovém okamžiku t = 3 skok posunutý o 3 sekundy doprava.

$$u(t) = 2 \cdot 1(t) - 2 \cdot 1(t-3) \doteq \frac{2}{s} - \frac{2}{s} e^{-3s} = \frac{2}{s}(1 - e^{-3s}).-$$

Konec příkladu

Příklad P2.7

Nalezněte L-obraz Diracova impulsu násobeného vahou S.

Řešení:

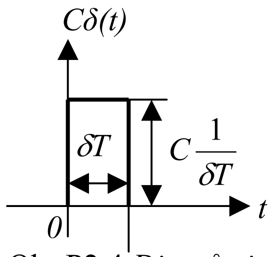
Podle definice (3 – 2) platí $\delta = \delta(t) = 0,\ pro\ t \neq 0;\quad \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)dt = 1 \to \lim\limits_{\delta T \to 0} \dfrac{1}{\delta T} \cdot \delta T = 1$.

Diracův impuls vynásobený vahou *S*, bude splňovat podmínku

$$S\delta(t) = 0, \text{ pro } t \neq 0; \quad \lim_{\varepsilon \to 0} S \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)dt = S \to \lim_{\delta T \to 0} \frac{S}{\delta T} \cdot \delta T = S$$

a jeho aproximace je na obr.P2.4.

Laplaceova transformace je pak rovna L-obrazu impulsu na obr P2.4 s limitním přechodem $\delta T \to 0$. Při výpočtu limitního přechodu použijeme L´hospitalova pravidla a dostaneme L-obraz ve tvaru



Obr.P2.4 *Diracův impuls*

$$\boxed{L\{S \cdot \delta(t)\} = \lim_{\delta T \to 0}\left[\frac{S}{s \cdot \delta T}(1 - e^{-\delta T s})\right] = \lim_{\delta T \to 0} \frac{\dfrac{d}{\delta T}\left[S(1 - e^{-\delta T s})\right]}{\dfrac{d}{\delta T} \cdot s\delta T} = \frac{S \cdot s}{s} = S}. \qquad (P2-14)$$

Je-li *S = 1*, pak získáme L-obraz Diracova impulsu a platí

$$\boxed{L\{\delta(t)\}=1}. \qquad \text{(P2 – 15)}$$

Diracův impuls můžeme také vyjádřit jako derivaci jednotkového skoku

$$\boxed{\delta(t)=\frac{d}{dt}1(t).} \qquad \text{(P2 – 16)}$$

Konec příkladu

6. Věta o tlumení (substituci v obraze)

Nechť *a* je libovolná komplexní konstanta a nechť *y(t)* je předmět k L – obrazu *Y(s)*, potom platí

$$\boxed{L\{e^{at}y(t)\}=Y(s-a)}, \qquad \text{(P2 – 17)}$$

což znamená, že násobení předmětu *y(t)* funkcí e^{at} vede k substituci v obraze nezávisle proměnné *s*.

Odvození (P2 – 17): Důkaz věty o tlumení vyplývá přímo z definičního integrálu L-transformace:

$$L\{e^{at}y(t)\}=\int_0^\infty e^{at}y(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty y(t)e^{-(s-a)t}dt=Y(s-a).$$

Příklad P2.8

Nalezněte L-obraz funkcí $e^{-at}\cos\omega t,\ e^{-at}\sin\omega t$.

Řešení: Podle (P2 – 5a,b) jsou L-obrazy funkcí $\cos\omega t, \sin\omega t$ rovny

$$L\{\cos\omega t\}=\frac{s}{s^2+\omega^2}=Y_1(s),\quad L\{\sin\omega t\}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=Y_2(s).$$

Podle (P2 – 17) dostaneme

$$\boxed{L\{e^{-at}\cos\omega t\}=Y_1(s+a)=\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}}, \qquad \text{(P2 – 18b)}$$

$$\boxed{L\{e^{-at}\sin\omega t\}=Y_2(s+a)=\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}}. \qquad \text{(P2 – 18a)}$$

Konec příkladu

7. Věta o derivaci obrazu (substituci v obraze)

Nechť funkce *y(t)* má L-obraz *Y(s)*, potom

$$\boxed{L\{t\cdot y(t)\}=-\frac{d}{ds}Y(s)}. \qquad \text{(P2 – 19)}$$

Obecně platí

$$\boxed{L\{t^n\cdot y(t)\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}Y(s),\ n=1,2,3,\dots} \qquad \text{(P2 – 20)}$$

K odvození rovnosti (P2 – 19) použijeme definičního integrálu

$$L\{t \cdot y(t)\} = \int_0^\infty t \cdot y(t) e^{-st} dt = -\int_0^\infty y(t) \frac{d}{ds} e^{-st} dt = -\frac{d}{ds} \int_0^\infty y(t) e^{-st} dt = -\frac{d}{ds} Y(s).$$

Zavedeme-li substituci $x(t) = t \cdot y(t)$ a pak pro $n = 2$ dostaneme

$$L\{t \cdot x(t)\} = \int_0^\infty t \cdot x(t) e^{-st} dt = -\int_0^\infty x(t) \frac{d}{ds} e^{-st} dt = -\frac{d}{ds} X(s) = -\frac{d}{ds}\left[-\frac{d}{ds} Y(s)\right] = \frac{d^2}{ds^2}.Y(s).$$

Vícenásobným použitím tohoto postupu a věty (P2 – 19) můžeme odvodit L-obrazy pro libovolnou mocninu n funkce „*t*“.

Příklad P2.9

Nalezněte L-obraz rampové funkce $y(t) = t \cdot 1(t)$..

Řešení: Z funkce $y(t) = t \cdot 1(t)$ je zřejmé, že ji můžeme pokládat za součin funkce „t“ a jednotkového skoku. L – obraz $L\{1(t)\} = \dfrac{1}{s}$ roven, takže podle (P2 – 19) platí

$$\boxed{L\{t \cdot 1(t)\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}}. \qquad \text{(P2 – 21)}$$

Konec příkladu

8. Věta o násobení předmětů (konvoluce obrazů)

Nechť funkce $y_1(t)$, $y_2(t)$ mají L-obrazy $Y_1(s)$, $Y_2(s)$ pak

$$\boxed{L\{y_1(t) \cdot y_2(t) \cdot 1(t)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y_1(z) Y_2(s-z) dz = \sum_{j=1}^{n} \underset{z \to zj}{res}\{Y_1(z) Y_2(s-z)\}} \qquad \text{(P2 – 22)}$$

kde $Y_1(z), Y_2(z)$ jsou analytické funkce pro $\operatorname{Re} z > \alpha$

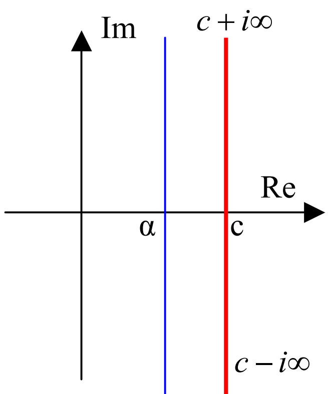
α je index růstu funkcí $Y_1(z), Y_2(z)$

integrační cesta je vertikální přímka $\operatorname{Re} z = c > \alpha$,

s je komplexní proměnná $\operatorname{Re} s > c + \alpha$

c splňuje podmínku $\operatorname{Re} z = c > \alpha$,

n počet pólů.



Obr.P2.5 *Integrační cesta*

Poznámka:

Funkce $Y_2(z\text{-}s)$ je analytická pro $\operatorname{Re} z < c$, *jestliže s je pevné a splňuje podmínku* $\operatorname{Re} s > c + \alpha$, *protože pak platí* $\operatorname{Re}(s - z) > \operatorname{Re}(s - c) > \alpha$.

Z toho vyplývá, že pro dostatečně veliké „ Re s“ integrační cesta odděluje singulární body funkce $Y_1(z)$ a $Y_2(z\text{-}s)$: první leží vlevo od této přímky, druhé leží vpravo

Konec poznámky.

Odvození (P2 – 22): Naznačíme pouze odvození rovnosti (P2 – 22). Z uvedených podmínek vyplývá, že z obrazu $Y_2(z)$ je možno pomocí definičního integrálu zpětné transformace (P2 – 2) určit $y_2(t)$

$$y_1(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y_1(z)e^{zt}dz = L^{-1}\{Y_1(z)\}, \tag{1}$$

kde $c > \alpha$,

α poloměr konvergence funkce $Y_2(z)$.

Dosazením (1) do (P2 – 22) dostaneme

$$L\{y_1(t)\cdot y_2(t)\cdot 1(t)\} = \int_0^\infty y_1(t)\cdot y_2(t)\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty y_2(t)\cdot\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y_1(z)e^{zt}dz\right]\cdot e^{-st}dt \tag{2}$$

Z rozboru proměnných v rovnosti (2) vyplývá, že je možno provést následující úpravu

$$\int_0^\infty y_1(t)\cdot y_2(t)\cdot e^{-st}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y_1(z)[\int_0^\infty y_2(t)e^{-(s-z)t}dt]dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y_1(z)Y_2(s-z)dz\ ,$$

kde $\int_0^\infty y_2(t)e^{-(s-z)t}dt = Y_2(s-z)$.

Příklad P2.10

Nalezněte L-obraz funkce $y(t) = y_1(t)\cdot y_2(t) = t\cdot e^{-t}$ pomocí věty o L-obrazu součinu dvou předmětů.

Řešení:

Funkce $y_1(t) = t\cdot 1(t);\ a\ y_2(t) = e^{-t}\cdot 1(t)$ jsou předměty standardního typu, mající L-obrazy

$$Y_1(s) = \frac{1}{s^2};\quad Y_2(s) = \frac{1}{(s+1)};$$

Podle věty (P2 – 24) platí

$$L\{y_1(t)\cdot y_2(t)\cdot 1(t)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y_1(z)Y_2(s-z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{s-z+1}dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{1}{(s-z)^2}\cdot\frac{1}{z+1}dz.$$

Integrály řešíme pomocí věty o residuí (P1 – 19,20). Integrační uzavřenou křivku volíme tak, aby obsahovala póly $s_{11} = s_{12} = 0; s_{21} = -1.$

a) Pro $z \to 0$ platí

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c F(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{s-z+1}dz = \sum_{j=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=zj} F(z) = \lim_{\lim z\to 0}\left\{\frac{d}{dz}\left[z^2\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{s-z+1}\right]\right\} =$$

$$= \lim_{\lim z\to 0}\frac{1}{(s-z+1)^2} = \frac{1}{(s+1)^2} = Y(s).$$

b) Pro $z \to -1$ platí

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{1}{(s-z)^2}\cdot\frac{1}{z+1}dz = \lim_{z\to -1}\left\{(z+1)\frac{1}{z+1}\cdot\frac{1}{(s-z)^2}\right\} = \lim_{z\to -1}.\frac{1}{(s-z)^2} = \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Můžeme se lehce přesvědčit, že oba dva postupy dávají shodné výsledky. Závěr je

$$L\{y_1(t)\cdot y_2(t)\cdot 1(t)\} = L\{t\cdot e^{-t}\cdot 1(t)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}Y_1(z)Y_2(s-z)dz = \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Výsledek je možno ověřit pomocí věty o derivaci obrazu (P2-19)

$$L\{t\cdot y(t)\} = -\frac{d}{ds}Y(s) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Konec příkladu

1.3 LIMITNÍ VĚTY

9. Věta o počáteční hodnotě

Nechť funkce *y(t)* má L-obraz *Y(s)* a $\lim_{t\to 0+} y(t) = y(0+)$, pak platí

$$\boxed{\lim_{\operatorname{Re} s\to +\infty} sY(s) = \lim_{t\to 0+} y(t) = y(0+)}. \qquad (P2-23)$$

Odvození (P2 – 23): Abychom ukázali odvození věty (P2 – 23) použijeme věty o obrazu derivace (P2 – 6)

$$L\left\{\frac{d}{dt}y(t)\right\} = sY(s) - y(0+).$$

Na časovém intervalu $0+ \le t \le \infty$ funkce $e^{-st} \to 0$, jestliže $\operatorname{Re} s \to \infty$, takže platí

$$\lim_{\operatorname{Re} s\to\infty}\int_0^\infty \frac{d}{dt}y(t)e^{-st}dt = \lim_{\operatorname{Re} s\to\infty}[sY(s) - y(0+)] = 0,$$

a z této rovnice pak dostaneme

$$\lim_{\mathrm{Re}\, s \to \infty} sY(s) = y(0+).$$

Příklad P2.11

L-obraz funkce je $Y(s) = \dfrac{s-2}{s(s+1)}$. Určete $y(0+)$!

Řešení:

Podle (P2 – 23) platí $\lim\limits_{\mathrm{Re}\, s \to +\infty} sY(s) = \lim\limits_{\mathrm{Re}\, s \to +\infty} s \cdot \dfrac{s-2}{s(s+1)} = 1 = y(0+)$.

Konec příkladu

10) Věta o konečné hodnotě

Nechť *y(t)* je předmětem standardního typu a nechť dále ***existuje konečná*** limita $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = y(\infty)$ pak platí:

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s)} \qquad \text{(P2 – 24)}$$

Poznámka: *Limitu v (P2 – 24) chápeme jako* $\lim\limits_{\substack{\mathrm{Re}\, s \to 0 \\ Arg\, s < \pi/2}} sY(s)$. *Podmínka existence konečné limity je, že póly leží v levé části roviny s.*

Odvození (P2 – 24): Abychom ukázali odvození věty (P2 – 24) provedeme limitní přechod

$$\lim_{\mathrm{Re}\, s \to 0} \int_0^\infty \frac{d}{dt} y(t) e^{-st} dt = \lim_{\mathrm{Re}\, s \to 0} \left[sY(s) - y(0+) \right]$$

Protože $\lim\limits_{s \to 0} e^{-st} = 1$ dostaneme

$$\lim_{\mathrm{Re}\, s \to 0} \int_0^\infty \frac{d}{dt} y(t) dt = y(t) \Big|_0^\infty = y(\infty) - y(0) = \lim_{s \to 0} \left[sY(s) - y(0+) \right].$$

Porovnáním pak dostaneme $y(\infty) = \lim\limits_{s \to 0} sY(s)$.

Příklad P2.12

L-obraz funkce je $Y(s) = \dfrac{s-2}{s(s+1)}$. Určete $y(\infty)$!

Řešení:

Podle (P2 - 24) platí $\lim\limits_{\mathrm{Re}\, s \to 0} sY(s) = \lim\limits_{\mathrm{Re}\, s \to 0} s \cdot \dfrac{s-2}{s(s+1)} = -2 = y(\infty)$.

Konec příkladu

Příklad P2.13

Vypočtěte hodnotu kvadratického funkcionálu $J_2 = \int\limits_0^\infty y^2(t) dt;\ y(t) = e^{-t}$.

Řešení: Hodnotu funkcionálu vypočteme v obraze a provedeme ho v těchto krocích:

1) Nalezení L-obrazu funkce $L\{y^2(t)\cdot 1(t)\}$; $y(t)=e^{-t}$.

Podle věty o násobení předmětů (P2 – 22) platí

$$L\{y^2(t)\cdot 1(t)\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}Y(z)Y(s-z)dz=\underset{z\to -1}{res}\left\{(z+1)\frac{1}{z+1}\cdot\frac{1}{s-z+1}\right\}=\frac{1}{s+2}.$$

2) Integrál $\int_0^t y^2(t)dt$; $y(t)=e^{-t}$. určíme podle věty o obrazu integrace předmětu (P2 – 9)

$$L\left\{\int_0^t y^2(t)dt\right\}=\frac{1}{s}\cdot L\{y^2(t)\cdot 1(t)\}=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+2}.$$

3) Hodnotu funkcionálu pak v obraze vypočteme pomocí věty o konečné hodnotě (P2 – 24) . Platí

$$J_2=\lim_{t\to\infty}\int_0^t y^2(\tau)d\tau=\lim_{s\to 0}sL\left\{\int_0^t y^2(\tau)d\tau\right\}=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{s(s+2)}=\frac{1}{2}.$$

Hodnota kvadratického funkcionálu je rovna $J_2=\int_0^\infty y^2(t)dt=\frac{1}{2}$.

Konec příkladu

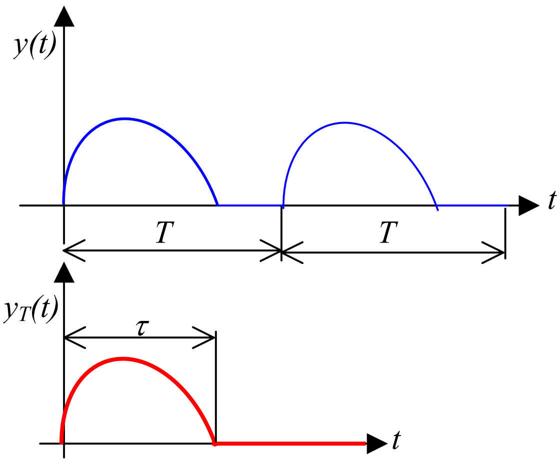
2. LAPLACEOVA TRANSFORMACE PERIODICKÉ FUNKCE

Uvažujme periodickou funkci $y(t)=y(t+T)$, kde T je perioda viz obr.P2.6.

Funkce $y_T(t)$ se nazývá ***vytvářející impuls,*** který splňuje tyto podmínky

$$y_T(t)=\begin{cases}0 \text{ pro } t<0,\\ y(t) \text{ pro } 0\le t\le\tau,\\ 0 \text{ pro } t\ge 0.\end{cases}$$

Předpokládejme dále, že vytvářející impuls $y_T(t)$ má L-obraz $Y_T(s)$. Pak L-obraz periodické funkce $y(t)$ je roven



Obr.P2.6*Periodická funkce*

$$\boxed{Y(s)=\frac{Y_T(s)}{1-e^{-sT}};T>0,}\qquad\text{(P2 – 25)}$$

kde $L\{y(t)\}=Y(s)$; $L\{y_T(t)\}=Y_T(s)$.

Odvození (P2 – 25): Provedeme součet L-obrazů posunutých funkcí $y_T(t)$ vždy o periodu opakování T. Platí

$$\begin{aligned} L\{y(t)\} &= L\{y_T(t)\cdot 1(t)\} + L\{y_T(t-T)\cdot 1(t-T)\} + L\{y_T(t-2T)\cdot 1(t-2T)\} + \cdots = \\ &= Y_T(s) + Y_T(s)e^{-Ts} + Y_T(s)e^{-2Ts} + Y_T(s)e^{-3Ts} + \cdots = \\ &= Y_T(s)[1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + e^{-3sT} + \cdots]. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že součet $\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} = 1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + e^{-3sT} + \cdots$ je součtem geometrické řady,je roven

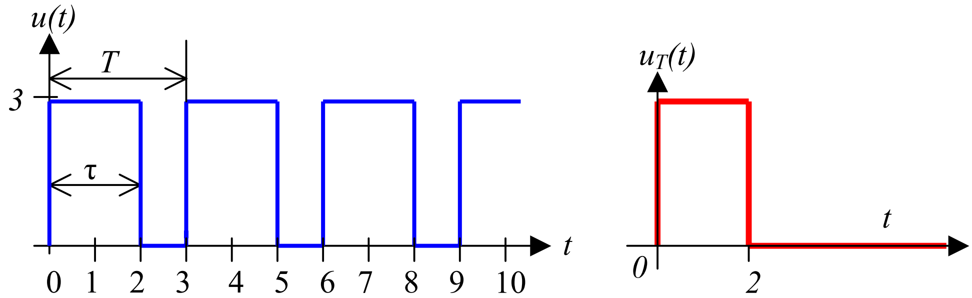
$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} = \frac{1}{1-e^{-Ts}};\ pro\ \left|e^{-Ts}\right| < 1.$$

Z toho pak plyne $Y(s) = Y_T(s)\dfrac{1}{1-e^{-Ts}}$.

Příklad P2.14

Určete L-obraz periodické funkce *u(t)* dle obr.P2.6

Řešení:



Obr.P2.6 *Periodická vstupní funkce u(t)*

L-obraz vytvářejícího impulsu

$$Y_T(s) = \frac{3}{s}(1-e^{-2s}).$$

L-obraz periodické funkce s periodou $T = 3\sec$ podle (P2 – 25) je

$$U(s) = \frac{U_T(s)}{1-e^{-3s}} = \frac{3(1-e^{-2s})}{s(1-e^{-3s})}.$$

Konec příkladu

2.1 ODEZVA SOUSTAVY NA PERIODICKÝ VSTUPNÍ SIGNÁL

V této kapitole bude diskutován problém výpočtu odezvy dynamického systému, který je popsán obrazovým přenosem *F(s)* a jeho vstupem je obecný periodický signál. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že obrazový přenos má pouze póly reálné různé, tedy je možno provést rozklad

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{a_n(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{s-s_i}.$$

L-obraz obecné periodické funkce $u(t) = u(t+T)$ s periodou T je

$$U(s) = \frac{U_T(s)}{1-e^{-sT}}.$$

Výstup z takto buzeného systému musí být opět periodická funkce $y(t) = y(t+T)$ s periodou T, kterou můžeme vyjádřit jako součet periodické funkce výstupu *y(t)* a účinku rozvážení ve tvaru

$$\boxed{Y(s) = F(s) \cdot \frac{U_T(s)}{1-e^{-sT}} = \frac{Y_T(s)}{1-e^{-sT}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{s-s_i}.} \qquad \text{(P2 – 26)}$$

Metodika výpočtu odezvy bude demonstrována na následujícím příkladě.

Příklad P2.15 Dynamika systému je vyjádřena obrazovým přenosem $F(s) = \dfrac{10}{5s+1}$.

L-obraz vstupního periodického signál je $U(s) = \dfrac{U_T(s)}{1-e^{-3s}} = \dfrac{3(1-e^{-2s})}{s(1-e^{-3s})}$.

Určete analyticky odezvu *y(t)* = ?

Řešení:

F(s) má jeden pól $s_1 = 0{,}2$ a je možno ho zapsat do tvaru $F(s) = \dfrac{10}{5s+1} = \dfrac{2}{s+0{,}2}$.

Podle (P2 - 26) je L-obraz výstupu roven

$$Y(s) = F(s) \cdot \frac{U_T(s)}{1-e^{-sT}} = \frac{Y_T(s)}{1-e^{-sT}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{s-s_i}. \rightarrow \frac{2}{s+0{,}2} \cdot \frac{3(1-e^{-2s})}{s(1-e^{-3s})} = \frac{Y_T(s)}{1-e^{-s3}} + \frac{A_i}{s+0.2}. \qquad (1)$$

Vynásobíme-li rovnici (1) členem *(1 - e^{-3s})* a provedeme-li na levé straně rozklad členu $\dfrac{6}{s(s+0{,}2)}$ na parciální zlomky, je možno tuto rovnici přepsat do tvaru

$$\left(\frac{B}{s} + \frac{C}{s+0{,}2}\right) \cdot \left(1-e^{-2s}\right) = Y_T(s) + A\frac{\left(1-e^{-3s}\right)}{s+0.2}. \qquad (2)$$

Koeficienty jsou B = 30, C = -30. Převedeme-li rovnost (2) do časové oblasti, dostaneme

$$30 \cdot [1(t) - 1(t-2)] - 30 \cdot [e^{-0{,}2t} 1(t) - e^{-0{,}2(t-2)} 1(t-2)] = A[e^{-0{,}2t} 1(t) - e^{-0{,}2(t-3)} 1(t-3)] + y_T(t). \qquad (3)$$

Nyní je třeba určit konstantu A a vytvářející výstupní impuls $y_T(t)$.

1) Pro interval $t \geq 3$ je

$$1(t) = 1(t-2) = 1(t-3) = 1 \tag{4}$$

a vytvářející impuls výstupní funkce $y_T(t) = 0$.

Dosadíme-li pro (4) do (3) a vykrátíme-li funkci $e^{-0,2t}$ dostaneme

$$-30(1-e^{0,4}) = A(1-e^{0,6}) \rightarrow A = -30 \cdot \frac{1-e^{0,4}}{1-e^{0,6}} = -17{,}943. \tag{5}$$

2) Pro časový interval $2 \le t < 3$ platí: $1(t) = 1(t-2) = 1$, (6)

$$1(t-3) = 0\,. \tag{7}$$

Dosadíme-li (6,7) do (3) dostaneme

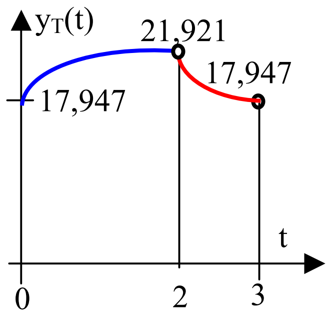
$$30 \cdot e^{-0,2t}(1-e^{0,4)}) = Ae^{-0,2t} + y_T(t) \rightarrow y_T(t) = 30 \cdot e^{-0,2t}(1-e^{0,4)} - \frac{1}{30}A).$$

Dosadíme-li za A z (5) bude vytvářející impuls $y_T(t)$ v tomto intervalu roven

$$y_T(t) = 30 \cdot e^{-0,2t}\,\frac{e^{0,6}-e}{1-e^{0,6}}. \tag{8}$$

a) Pro $t = 2$ je $y_T(t)$ roven $y_T(t) = 30 \cdot e^{-0,2\cdot 2}\,\frac{e^{0,6}-e}{1-e^{0,6}} = 21{,}921.$

b) Pro $t = 3$ je $y_T(t)$ roven $y_T(t) = 30 \cdot e^{-0,2\cdot 3}\,\frac{e^{0,6}-e}{1-e^{0,6}} = 17{,}947.$



Obr.P2.7 *Vytvářející impuls $y_T(t)$*

3) Pro časový interval $0 \le t < 2$ platí: $1(t) = 1$, (9)

$$1(t-2) = 1(t-3) = 0\,. \tag{10}$$

Dosadíme-li (9,10) do (3) dostaneme

$$30 - 30 \cdot e^{-0,2t} = Ae^{-0,2t} + y_T(t) \rightarrow y_T(t) = 30(1-e^{-0,2t}(1-A)) = 30(1-0{,}40176 \cdot e^{-0,2t}).$$

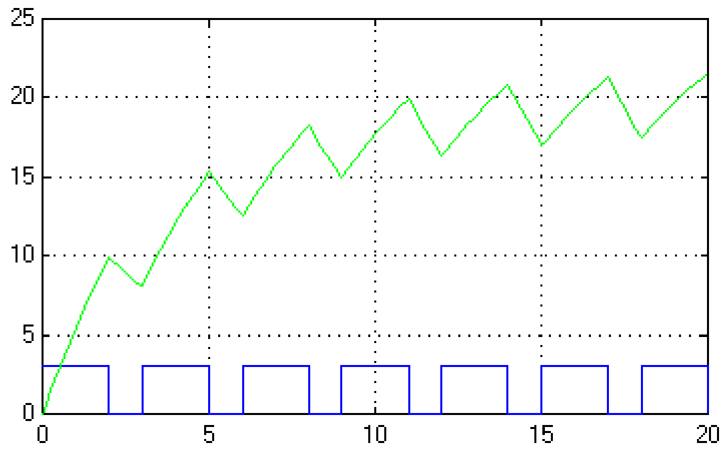
a) Pro $t = 0$; $y_T(0) = 17{,}947$.

b) Pro $t = 2$; $y_T(2) = 21{,}921$.

Průběh funkce $y_T(t)$ je na obr.P2.7. Odezva systému na periodickou funkci je rovna

$$y(t) = y_T(t) + A \cdot e^{-0,2t} =$$
$$= y_T(t) - 17{,}947 \cdot e^{-0,2t}.$$

Průběh odezvy je na obr.P2.8.



Obr.P2.8 *Průběh odezvy na periodický signál*

3. ZPĚTNÁ L-TRANSFORMACE PODLE DEFINIČNÍHO INTEGRÁLU

Podle definice zpětné L-transformace platí

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y(s)e^{st}\,ds = L^{-1}\{Y(s)\} \Rightarrow y(t) = \sum res\left[Y(s)e^{st}\right]_{s=s_k}}.$$

Postup bude demonstrován na následujících příkladech.

Příklad P2.16

Nalezněte předmět k L-obrazu $Y(s) = \dfrac{2}{s(s+1)(s+2)}$.

Řešení:
Podle (P2 – 2) platí:

$$y(t) = \sum res\left[Y(s)e^{st}\right]_{s=s_k} = \operatorname*{res}_{s=0}\left\{s\frac{2e^{st}}{s(s+1)(s+2)}\right\} + \operatorname*{res}_{s=-1}\left\{(s+1)\frac{2e^{st}}{s(s+1)(s+2)}\right\} +$$
$$+ \operatorname*{res}_{s=-2}\left\{(s+2)\frac{2e^{st}}{s(s+1)(s+2)}\right\} = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}.$$

Konec příkladu

Příklad P2.17

Nalezněte předmět k L-obrazu $Y(s) = \dfrac{2}{s(s+1)^3}$.

Řešení: Podle (P2 – 2) platí:

$$y(t) = \sum res\left[Y(s)e^{st}\right]_{s=s_k} = \operatorname*{res}_{s=0}\left\{s\frac{2e^{st}}{s(s+1)^2}\right\} + \operatorname*{res}_{s=-1}\left\{\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3\frac{2e^{st}}{s(s+1)^3}\right]\right\} =$$
$$= 2 + \frac{1}{2}\left\{\lim_{s\to-1}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{2e^{st}}{s}\right]\right\} = 2 + \lim_{s\to-1}\frac{d}{ds}\left[\frac{ste^{st} - e^{st}}{s^2}\right] = 2 + \lim_{s\to-1}\frac{s^2t^2e^{st} - 2s(ste^{st} - e^{st})}{s^4}.$$

Konec příkladu

$$y(t) = 2 + t^2e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t}.$$

SLOVNÍK L- A Z-TRANSFORMACE

1	e^{-tmT}	$\delta(t-mT)$	z^{-m}
2	$\frac{1}{s}$	$\eta = \langle \begin{matrix} 0, t<0 \\ 1, t \geq 0 \end{matrix}$	$\frac{z}{z-1}$
3	$\frac{1!}{s^2}$	t	$\frac{z\varepsilon T}{z-1}+\frac{zT}{(z-1)^2}$
4	$\frac{2!}{s^3}$	t^2	$T^2\left[\frac{z\varepsilon^2}{z-1}+\frac{z(2\varepsilon+1)}{(z-1)^2}+\frac{2z}{(z-1)^3}\right]$
5	$\frac{3!}{s^4}$	t^3	$T^3\left[\frac{z\varepsilon^3}{z-1}+\frac{z(3\varepsilon^2+3\varepsilon+1)}{(z-1)^2}+\frac{z(6\varepsilon+6)}{(z-1)^3}+\frac{6z}{(z-1)^4}\right]$
6	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n $n = 1, 2, 3, \ldots$	$\lim\limits_{a\to 0}(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left[\frac{ze^{-aT\varepsilon}}{(z-e^{-aT})}\right]$
7	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{ze^{-aT\varepsilon}}{z-e^{-aT}}$; *a* je obecné komplexní číslo
8	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$Te^{-aT\varepsilon}\left[\frac{z\varepsilon}{z-e^{-aT}}+\frac{ze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}\right]$
9	$\frac{2!}{(s+a)^3}$	t^2e^{-at}	$T^2e^{-aT\varepsilon}\left[\frac{z\varepsilon^2}{z-e^{-aT}}+\frac{z(2\varepsilon+1)e^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}+\frac{z2e^{-2aT}}{(z-e^{-aT})^3}\right]$
10	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	t^ne^{-at}	$\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left[\frac{ze^{-aT\varepsilon}}{(z-e^{-aT})}\right]$
11	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{a}\left[\frac{z}{z-1}-\frac{ze^{-aT\varepsilon}}{z-e^{-aT}}\right]$
12	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z^2\sin\omega T\varepsilon+z\sin\omega T(1-\varepsilon)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
13	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z^2\cos\omega T\varepsilon-z\cos\omega T(1-\varepsilon)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
14	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$e^{-\varepsilon a a T}\frac{z^2\sin\omega T\varepsilon+ze^{-aT}\sin\omega T(1-\varepsilon)}{z^2-2ze^{-\varepsilon aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
15	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$e^{-\varepsilon a a T}\frac{z^2\cos\omega T\varepsilon+ze^{-aT}\cos\omega T(1-\varepsilon)}{z^2-2ze^{-\varepsilon aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
16		$\frac{D^{t/T}}{D^{n-1}}\binom{t/T}{n-1}$	$\frac{z}{(z-D)^n}$ *D* ... obec. komplex. číslo $D \neq 0$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\varepsilon = 0$
17		$\binom{t/T}{n-1}$	$\frac{z}{(z-1)^n}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\varepsilon = 0$

LITERATURA

[1] Pírko, Z., Veit, J.: Laplaceova transformace. Základy teorie a užití v elektrotechnice. SNTL, Praha, 1970.
[2] Mačák, K., Tumajer, F., Zelinka, B.: Matamatika III. (Matematická analýza). Skripta, VŠST Liberec, 1978.
[3] Aramanovič, I, G., Lunc, G., L., Elsgolz, L., E.: Funkce komplexnej premenej, operátorový počet – teória stability. ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1973.