Riadenie a Umelá Inteligencia

Cvičenie č. 2

doc. Ing. Anna Jadlovská, PhD.,

Katedra kybernetiky a umelej inteligencie
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Technická univerzita v Košiciach

LS 2015/2016

Diskrétne prenosové funkcie (DPF)

- opisujú vzťah medzi vstupnou a výstupnou veličinou diskrétneho systému so vzorkovaným vstupom a výstupom
- všeobecné vyjadrenie spojitého systému v tvare prenosu:

$$G(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n} = \frac{B(z)}{A(z)} \tag{1}$$

- alebo v tvare záporných mocnín:

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \tag{2}$$

DPF môžeme získať rôznymi spôsobmi:

- analyticky prepočtom zo spojitej prenosovej funkcie $G(s)$
- z diferenčnej rovnice, ktorá popisuje systém
- identifikáciou z nameranej postupnosti hodnôt vstupného a výstupného signálu

Prepočet z G(s) do G(z)

DPF je možné vypočítať dvoma spôsobmi:

1. bez tvarovacieho člena:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = Z\{g(kT)\}, \tag{3}$$

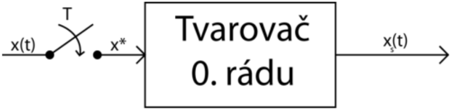
   kde diskrétnu impulznú funkciu $g(kT)$ získame pomocou $g(t)$

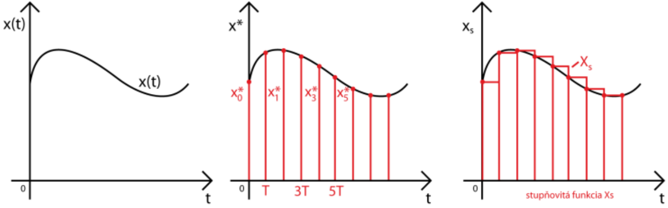
$$\begin{aligned} g(kT) &= [g(t)]_{t=kT} = [L^{-1}\{G(s)\}]_{t=kT} \\ G(z) &= Z\{[L^{-1}\{G(s)\}]_{t=kT}\} \end{aligned} \tag{4}$$

2. s tvarovacím členom: treba ho pri prepočte zahrnúť do spojitej časti obvodu

Tvarovač nultého rádu

drží okamžité hodnoty diskrétneho signálu, ktorý má na vstupe počas jednej periódy vzorkovania, na výstupe je stupňovitá funkcia:





Tvarovač nultého rádu

Stupňovitú funkciu $x_s(t)$ môžeme vyjadriť ako súčet posunutých obdĺžnikových pulzov:

$$x_s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)[1(t-kT) - 1(t-kT-T)] \tag{5}$$

po Laplaceovej transformácii dostaneme:

$$X_s(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\frac{1}{s}[e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}\frac{1}{s}[1 - e^{-Ts}] \tag{6}$$

Tvarovač nultého rádu

Laplaceov obraz vstupného signálu tvarovača:

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} \tag{7}$$

dosadíme do rovnice (6):

$$X_s(s) = X^*(s)\frac{1}{s}[1 - e^{-Ts}] \tag{8}$$

Následne vieme vyjadriť prenosovú funkciu tvarovača $G_{TC}(s)$:

$$G_{TC}(s) = \frac{X_s(s)}{X^*(s)} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \tag{9}$$

Prepočet G(s) na G(z) pomocou tvarovača 0. rádu

Postup je analogický ako pri prepočte bez tvarovacieho člena:

$$G(z) = Z\{g(kT)\} = Z\{L^{-1}\{G_{TC}(s)G(s)\}_{t=kT}\} =$$
$$= Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}G(s)\right\}_{t=kT}\right\} = (1-z^{-1})Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}_{t=kT}\right\} \tag{10}$$

Daný prepočet je možné realizovať v programovom prostredí MATLAB/Simulink pomocou príkazu:

c2d s parametrom 'zoh'

Prepočet G(s) na G(z), príklad 1

Zadanie úlohy:

Určte diskrétnu prenosovú funkciu $G(z)$ prenosovej funkcie $G(s)$ bez a s tvarovačom 0. rádu:

$$G_1(s) = \frac{K}{T_1 s + 1} \tag{11}$$

pri perióde $T = 0.5$

Riešenie bez tvarovača:

Najprv určíme impulznú funkciu $g_1(t)$:

$$g_1(t) = L^{-1}\{G_1(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{K/T_1}{s + 1/T_1}\right\} = \frac{K}{T_1}e^{-t/T_1} \tag{12}$$

Po označení $A = e^{-T/T_1}$ a dosadení $t = kT$ dostaneme:

$$g_1(kT) = \frac{K}{T_1}A^k \tag{13}$$

Prepočet G(s) na G(z), príklad 1

Po prepočte pomocou Z-transformácie vyjadríme diskrétnu prenosovú funkciu $G_1(z)$ ako:

$$G_1(z) = Z\left\{\frac{K}{T_1}A^k\right\} = \frac{K}{T_1}\frac{z}{z-A} = \frac{K/T_1 z}{z - e^{-T/T_1}} = \frac{K}{T_1}\frac{1}{1-Az^{-1}} \tag{14}$$

Pre konkrétne hodnoty $K = 4$ a $T_1 = 2$ dostaneme:

$$G_1(z) = \frac{4}{2}\frac{1}{1-e^{-0.5/2}z^{-1}} = \frac{2}{1-0.7788z^{-1}} \tag{15}$$

Prepočet G(s) na G(z), príklad 1

Riešenie s tvarovačom 0. rádu:
Najprv rozložíme $G_1(s)/s$ na parciálne zlomky a následne spätnou Laplaceovou transformáciou určíme prechodovú funkciu $v(t)$:

$$v(t) = L^{-1}\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{K}{s(T_1 s+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{A}{s} + \frac{B}{T_1 s + 1}\right\}, \tag{16}$$

kde $A = K$, $B = -KT_1$ a po spätnej Laplaceovej tranformácii dostaneme:

$$v(t) = K - Ke^{-t/T_1} \tag{17}$$

Prepočet G(s) na G(z), príklad 1

Po aplikovaní Z-transformácie na prechodovú funkciu $v(t)$

$$Z\left\{v(kT)\right\} = Z\left\{K\right\} - Z\left\{Ke^{-kT/T_1}\right\} = K\frac{z}{z-1} - K\frac{z}{z-e^{-T/T_1}} = \\ = \frac{K(1-e^{-T/T_1})z}{(z-1)(z-e^{-T/T_1})} \tag{18}$$

vyjadríme diskrétnu prenosovú funkciu $G_{11}(z)$ ako:

$$G_{11}(z) = (1-z^{-1})\frac{K(1-e^{-T/T_1})z}{(z-1)(z-e^{-T/T_1})} = \frac{K(1-e^{-T/T_1})}{z-e^{-T/T_1}} \\ = \frac{K(1-e^{-T/T_1})z^{-1}}{1-e^{-T/T_1}z^{-1}} = \frac{b_1 z^{-1}}{1+a_1 z^{-1}} \tag{19}$$

kde $b_1 = K(1-e^{-T/T_1})$, $a_1 = -e^{-T/T_1}$ a $b_0 = 0$

Prepočet G(s) na G(z), príklad 1

Z prenosu $G_{11}(z)$ môžeme určiť diferenčnú rovnicu vyjadrujúcu vstupno-výstupnú závislosť:

$$G_{11}(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \tag{20}$$

Jej roznásobením dostaneme:

$$\begin{aligned} b_1 z^{-1} U(z) &= 1 + a_1 z^{-1} Y(z) \\ b_1 u(k-1) &= y(k) + a_1 y(k-1) \\ y(k) &= b_1 u(k-1) - a_1 y(k-1) \end{aligned} \tag{21}$$

Algoritmus pre prepočet G(s) na G(z)

Všeobecný algoritmus prevodu prenosovej funkcie $G(s)$ na diskrétnu prenosovú funkciu $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$

1. $A(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - z_i)$, kde $z_i = exp(-\frac{T}{T_i})$, T_i - časová konštanta systému
2. Pre výpočet koeficientov čitateľa $B(z)$ s tvarovačom nultého rádu platí vzťah:

$$b_k = g(k) + a_1 g(k-1) + a_2 g(k-2) + \ldots + a_k g(0), \qquad (22)$$

kde

$$g(k) = v(kT) - v((k-1)T), \qquad (23)$$

$v(t)$ - prechodová funkcia systému $G(s)$

Prepočet G(s) na G(z), príklad 2

Zadanie úlohy:
Určte diskrétnu prenosovú funkciu $G(z)$ prenosovej funkcie $G(s)$ s tvarovačom 0. rádu:

$$G_2(s) = \frac{1}{(s+1)(2s+1)} \tag{24}$$

pri perióde $T = 0.5$

Riešenie:
Na riešenie využijeme všeobecný algoritmus prevodu prenosovej funkcie $G(s)$ na diskrétnu prenosovú funkciu $G(z)$
Časové konštanty systému sú $T_1 = 1$ a $T_2 = 2$. Pre menovateľ platí:

$$\begin{gathered} z_1 = e^{(-\frac{T}{T_1})} = e^{(-\frac{0.5}{1})} = 0.6065, \; z_2 = e^{(-\frac{T}{T_2})} = e^{(-\frac{0.5}{2})} = 0.7788 \\ A(z) = (z - z_1)(z - z_2) = z^2 - 1.3852z + 0.4724 \end{gathered} \tag{25}$$

Prepočet G(s) na G(z), príklad 2

Na určenie koeficientov čitateľa $B(z)$ diskrétnej prenosovej funkcie potrebujeme poznať prechodovú funkciu $v(t) = L^{-1}\{G(s)/s\}$:

$$v(t) = L^{-1}\left\{\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{2s+1}\right\} \tag{26}$$

Po vypočítaní koeficientov A,B a C a následnej spätnej Laplaceovej transformácii dostávame:

$$v(t) = 1 - 2e^{-0.5t} + e^{-t} \tag{27}$$

Prepočet G(s) na G(z), príklad 2

A pre koeficienty b_0, b_1 a b_2 platí:

1. **k = 0**, $\quad b_0 = g(0) + a_1 g(0-1) + \ldots = 0$
   $g(0) = v(0 * T) - v((0-1) * T) = 0$, $g(-k) = 0$
2. **k = 1**, $\quad b_1 = g(1) + a_1 g(0) = 0.0498291$
   $g(1) = v(T) - v(0 * T) = v(0.5) = 0.0498291$
3. **k = 2**, $\quad b_2 = g(2) + a_1 g(1) + g(0) = 0.03812$
   $g(2) = v(2 * T) - v(T) = v(1) - v(0.5) = 0.105981$

Výsledná diskrétna prenosová funkcia s tvarovačom má tvar:

$$G_2(z) = \frac{0.0498291z - 0.03812}{z^2 - 1.3853z + 0..47236} = \frac{0.0498291z^{-1} - 0.03812z^{-2}}{1 - 1.3853z^{-1} + 0..47236z^{-2}} \qquad (28)$$

Ak by sme danú úlohu riešili postupom uvedeným v prvom príklade, dospeli by sme k rovnakému riešeniu, avšak postup by bol zdĺhavejší a výpočtovo náročnejší.