TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Hálkova 6, 461 17 Liberec 1, CZ

Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií

Číslicové řízení

Modelování a diskrétní identifikace

Studijní materiály

Doc. Ing. Osvald Modrlák, CSc.

KATEDRA ŘÍDICÍ TECHNIKY

Katedra řídicí techniky

Obsah

1 Úvod ... 3
2 Průchod stacionárního náhodného signálu lineární t-invariantní soustavou ... 3
3 Model náhodného diskrétního stacionárního procesu ... 7
4 Diskrétní model systému při působení stochastického stacionárního signálu ... 8
4.1 Struktura modelu ... 8
4.2 Chyby modelu ... 10
4.3 Struktura diskrétních modelů ... 11
4.4 Predikce výstupu ... 13
5 Odhad parametrů modelu ARX metodou nejmenších čtverců ... 14
5.1 Metoda nejmenších čtverců ... 14
5.2 Vlastnosti odhadů ... 16
5.3 Odhad vektoru parametrů pomocí korelačních funkcí ... 18
6 Softwarová podpora diskrétní parametrické identifikace ... 20
7 Literatura ... 31

Předkládaný studijní materiál seznamuje čtenáře v základních rysech s diskrétním modelováním dynamických procesů při působení stochastických stacionárních signálů. Zavádí modely typu ARX, ARMAX, BJ a ukazuje požití metody nejmenších čtverců pro odhad parametrů modelu ARX. Popisuje základní identifikační funkce softwarové podpory „Toolbox Identification Toolbox“ z MATLABu. Hlubší pochopení problematiky vyžaduje podrobné studium v uvedené literatuře.

1 ÚVOD

Odhad parametrů diskrétního modelu systému z měření, struktura matematického modelu systému, parazitní šumové signály, náhodný proces a jeho statistické charakteristiky, volba prediktoru, struktura modelů , ARMAX a BJ, odhad jejich parametrů. Rekurzivní metody výpočtu.

2 PRŮCHOD STACIONÁRNÍHO NÁHODNÉHO SIGNÁLU LINEÁRNÍ T-INVARIANTNÍ SOUSTAVOU

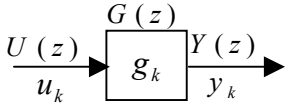
Uvažujme spojitou soustavu, jejíž dynamické účinky jsou aproximovány diskrétním modelem pomocí Z-přenosu *G(z).* Zvolená perioda vzorkování je T_s. Podle definice Z-transformace platí

$$G(z)=\sum_{0}^{\infty} g_k z^{-k}\text{, kde } \quad g_k=0,\ pro\ k<0\,,\ \sum_{k=0}^{\infty} g_k = K\,, \qquad (1\text{ - }1)$$

kde je g_k ⋯ diskrétní hodnota váhové funkce,

z^{-k} ⋯ operátor Z-transfornace,

K ⋯ je zesílení soustavy.



Obr. X.1*Diskrétní model*

Diskrétní hodnota výstupu na obecný vstupní signál je dána konvolutorním součtem

$$y_k=\sum_{j=0}^{k} g_j u_{k-j}\,, \qquad (1\text{ - }2)$$

kde je y_k ⋯ diskrétní hodnota výstupu

g_k ⋯ diskrétní hodnota váhové funkce,

u_{k-j} ⋯ diskrétní hodnota akční veličiny.

Uvažujme, že budícím signálem diskrétního modelu dle obr.1.1 je stacionární šum u_k. Střední hodnota u_k je rovna

$$\bar{u}=\mathrm{E}\{u_k\}=\lim_{N\to\infty}=\frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N} u_j\,. \qquad (1\text{ - }3)$$

Střední hodnota výstupního signálu y_k

$$\bar{y}_k=\mathrm{E}\{y_k\}=\mathrm{E}\left\{\sum_{j=0}^{\infty} g_j u_{k-j}\right\}=\sum_{j=0}^{\infty} g_j \mathrm{E}\{u_{k-j}\}=\sum_{j=0}^{\infty} g_j \bar{u}_{k-j}\,,$$

kde je $\bar{u}_k=\mathrm{E}\{u_{k-j}\}$.

Je-li stochastický signál u_k stacionární, pak platí $\bar{u}_k=\mathrm{E}\{u_{k-j}\}=\bar{u}$ a střední hodnota výstupního signálu y_k bude rovna

$$\bar{y}_k=\sum_{j=0}^{\infty} g_j \bar{u}=K\cdot\bar{u}=\bar{y}\,. \qquad (1\text{ - }4)$$

Podle definice je autokovariační funkce vstupního signálu u_k rovna

$$\bar{c}_{uu}(k) = \mathrm{E}\{\bar{u}_k \bar{u}_{k+s}\} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^{N} \bar{u}_s \bar{u}_{s+k} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^{N} (u_s - \bar{u})(u_{s+k} - \bar{u}). \qquad (1\text{ - }5)$$

Autokorelační funkce výstupu

$$\bar{c}_{yy}(k) = \mathrm{E}\{\bar{y}_i \bar{y}_{i+k}\} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^{N} \bar{y}_i \bar{y}_{i+k} \qquad (1\text{-}6)$$

Vyjádříme-li $\bar{y}_i$, $\bar{y}_{i+k}$ pomocí diskrétní váhové funkce, dostaneme

$$\bar{y}_i = \sum_{j=0}^{\infty} g_j \bar{u}_{i-j} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j \bar{u}_{i-j} \qquad (1)$$

$$\bar{y}_{i+k} = \sum_{l=0}^{\infty} g_l \bar{u}_{+k-l} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l \bar{u}_{+k-l} \ . \qquad (2)$$

Dosazením (1, 2) do (1-6) dostaneme

$$\bar{c}_{yy}(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^{N} \bar{y}_i \bar{y}_{i+k} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^{N} \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j \bar{u}_{i-j} \right] \cdot \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l \bar{u}_{i+k-l} \right] =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l \cdot \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^{N} \bar{u}_{i-j} \cdot \bar{u}_{i+k-l}.$$

Označíme-li $s = i - j \to i = s + j$ a index $i + k - l = s + j + k - l$, pak je možno autokorelační funkci zapsat ve tvaru

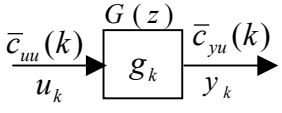
$$\bar{c}_{yy}(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l \cdot c_{uu}(k + j - l). \qquad (1\text{-}6)$$

Vzájemná korelační funkce $\bar{c}_{uy}(k)$ je rovna

$$\bar{c}_{uy}(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^{N} \bar{u}_i \bar{y}_{i+k} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^{N} \bar{u}_{i-j} \cdot \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l \bar{u}_{i+k-l} \right] =$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l \cdot \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^{N} \bar{u}_{i-j} \cdot \bar{u}_{i+k-l} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l \cdot \bar{c}_{uu}(k-l). \qquad (1\text{-}7)$$

Uvažujme diskrétní model dynamického systému dle obr.1.2, jehož vstupem je náhodný stacionární signál u_k, který je popsán podle (1-5) autokorelační funkcí $\bar{c}_{uu}(k)$. Výstupní signál je možno podle (1-6) a (1-7) popsat autokorelační funkcí výstupu $\bar{c}_{yy}(k)$ a vzájemnou korelační funkcí $\bar{c}_{uy}(k)$.



Obr. X.2*Diskrétní model*

Výkonovou spektrální hustotu je možno vyjádřit

$$S_{uu}(\omega) = S_{uu}(z) = S_{uu}(e^{j\omega Ts}) \quad pro\ z = e^{j\omega Ts} \rightarrow \quad S_{uu}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{uu}(k) z^{-k}$$

$$S_{yy}(\omega) = S_{yy}(z) = S_{yy}(e^{j\omega Ts}) \quad pro\ z = e^{j\omega Ts} \rightarrow \quad S_{yy}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{yy}(k) z^{-k}$$

$$S_{yu}(\omega) = S_{yu}(z) = S_{yu}(e^{j\omega Ts}) \quad pro\ z = e^{j\omega Ts} \rightarrow \quad S_{yu}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{yu}(k) z^{-k}$$

Z-obraz výkonové spektrální hodnoty $S_{yu}(z)$ je roven

$$S_{yu}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{yu}(k) z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} g_j \cdot \bar{c}_{uu}(k-j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} z^{-k} \cdot g_j \cdot \bar{c}_{uu}(k-j) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j} \cdot g_j \cdot z^{-(k-j)} \cdot \bar{c}_{uu}(k-j) = \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j} \cdot g_j \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-(k-j)} \cdot \bar{c}_{uu}(k-j) = \qquad (1\text{-}7)$$

$$= G(z) \cdot S_{uu}(z),$$

kde je $G(z) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j z^{-j}$ … diskrétní přenos dynamického systému ,

$S_{uu}(z) = \sum_{k='-\infty}^{\infty} z^{-k} c_{uu}(k)$ … Z-obraz výkonové spektrální hustoty vstupního signálu.

Z-obraz výkonové spektrální hustoty $S_{yy}(z)$ je tedy roven

$$\boxed{S_{yu}(z) = G(z) \cdot S_{uu}(z) \rightarrow S_{yu}(\omega) = G(e^{j\omega Ts}) \cdot S_{uu}(\omega).} \qquad (1\text{-}8)$$

$$\boxed{S_{uy}(z) = S_{uu}(z) \cdot \overline{G}(z) \rightarrow S_{uy}(\omega) = S_{uu}(\omega) \cdot G(e^{-j\omega Ts}).} \qquad (1\text{-}9)$$

Z-obraz výkonové spektrální hustoty výstupu je podle definice roven $S_{yy}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{yy}(k) z^{-k}$.

Vyjádříme-li autokovariační funkci $\bar{c}_{yy}(k)$ signálu pomocí (1-6), dostaneme

$$S_{yy}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{yy}(k) z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k} \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l \cdot \bar{c}_{uu}(k+j-l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} z^{-k} \cdot g_j \cdot g_l \cdot \bar{c}_{uu}(k+j-l) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} z^{-j} \cdot g_j \cdot z^{+l} g_l \cdot z^{-(k+j-l)} \bar{c}_{uu}(k+j-l) =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} z^{-j} g_j \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-(k+j-l)} \bar{c}_{uu}(k+j-l) \sum_{l=-\infty}^{\infty} z^{+l} g_l = \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j} g_j \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-(k+j-l)} \bar{c}_{uu}(k+j-l) \sum_{l=0}^{\infty} z^{+l} g_l .$$

Jednotlivé součty jsou rovny

$$\sum_{0}^{\infty} z^{-j} g_j = G(z), \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-(k+j-l)} c_{uu}(k+j-l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-s} \bar{c}_{uu}(s) = S(z),$$

$$\sum_{0}^{\infty} z^{+l} g_l = \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{-l} g_l = G\left(\frac{1}{z}\right) = \overline{G}(z) .$$

Budiž zdůrazněno, pruh nad Z-přenosem neoznačuje střední hodnotu!!! Pro tato označení je pak možno autokovariční funkci $\overline{c}_{yy}(k)$ vyjádřit ve tvaru

$$S_{yy}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{c}_{yy}(k) z^{-k} = G(z) \cdot S_{uu}(z) \cdot \overline{G}(z) \qquad (1\text{-}10)$$

Ve frekvenční oblasti pak platí

$$S_{yy}(\omega) = \left|G(e^{-j\omega Ts})\right|^2 \cdot S_{uu}(\omega), \qquad (1\text{-}11)$$

kde je $\left|G(e^{-j\omega Ts})\right|^2 = G(e^{j\omega Ts}) \cdot G(e^{-j\omega Ts})$.

Je-li vstupujícím signálem bílý šum, pak platí

$$\overline{c}_{uu}(k) = \delta(k) = \delta(0) , \; S_{uu}(z) = \sum \overline{c}_{uu}(k) z^{-k} = z^0 = 1 \rightarrow S_{uu}(\omega) = 1$$

Vzájemná kovariační funkce $\overline{c}_{yu}(k)$ je rovna

$$\overline{c}_{yu}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l \cdot \overline{c}_{uu}(k-l) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l \cdot \delta(k-l) = g_k$$

Vzájemná výkonová spektrální hustota $S_{yu}(\omega)$ je rovna

$$S_{yu}(\omega) = G(e^{j\omega Ts}) \cdot S_{uu}(\omega) = G(e^{j\omega Ts}) \cdot 1 = G(e^{j\omega Ts})$$

Vstupuje-li do dynamického systému dle obr.X.2 bílý šum, pak
- vzájemná kovariační funkce $\overline{c}_{yu}(k)$ je přímo rovna diskrétní impulzní charakteristice
- vzájemná spektrální hustota $S_{yu}(\omega)$ je rovna jeho frekvenčnímu přenosu

Věta o realizaci

Pro každou racionální spektrální hustotu $S_{yy}(\omega) \geq 0$ existuje právě jeden dynamický systém s přenosem G(z) který má jednotkový koeficient u nejvyšší mocniny *z* a má všechny póly a nuly uvnitř jednotkové kružnice nebo na jednotkové kružnici, takový, že stacionární proces s danou spektrální hustotou můžeme získat jako výstup z tohoto systému , je-li na vstupu bílý šum.

3 MODEL NÁHODNÉHO DISKRÉTNÍHO STACIONÁRNÍHO PROCESU

Modelování náhodných stacionárních procesů je založeno na průchodu bílého šumu $\nu_k = \nu(k)$ lineární diskrétní soustavou - filtrem. Stacionární stochastický proces $y_F(k)$ který vzniká průchodem bílého šumu $\nu(k)$ diskrétním filtrem můžeme popsat pomocí **stochastické diferenční rovnice**

$$y_F(k) + d_1 y_F(k-1) + ... + d_n y_F(k-n) = c_0\nu(k) + c_1\nu(k-1) + .. + c_m\nu(k-m) \quad , \quad (2-1)$$

kde … $y_F(k)$ je výstupní stacionární stochastický signál (šedý,barevný)

$\nu(k)$ je diskrétní bílý šum, pro který platí $E\{\nu(k)\nu(k+i)\} = \begin{cases} \sigma^2 ; \text{ pro } i = 0 \\ 0; \quad \text{pro } i \neq 0 \end{cases}$

d_i, c_j jsou koeficienty diferenční rovnice filtru.

Diskrétní přenos filtru je pak ve tvaru

$$G_F(z) = \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + ...c_m z^{-m}}{1 + d_1 z^{-1} + ...d_n z^{-n}} = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} = \frac{C}{D} \qquad (2-2)$$

Poznámka: Je třeba si uvědomit, že vstupní signál $\nu(k)$ je diskrétní náhodný signál - bílý šum. Proto i výstupní signál $y_F(k)$ je náhodným signálem. Výstup $y_F(k)$ je funkcí bílého šumu $\nu(k)$ a nemůže proto také býti bílým šumem. Průchodem lineární soustavou se vytvoří stacionární stochastický signál, který se často označuje jako šum barevný - šedý.

Stochastickou diferenční rovnici (2 – 1) je možno ještě modifikovat. Dostáváme tak speciální modely, které mají při analýze stochastických systémů veliký význam. Jsou to:

1) Model stochastického procesu, který se označuje jako **autoregresní** proces řádu n, jehož matematický model značíme zkratkou **AR** (**A**uto**R**egresiv). Je popsán rovnicí

$$y_F(k) + d_1 y_F(k-1) + ... + d_n y_F(k-n) = c_0\nu(k) \, . \qquad (2-3)$$

Diskrétní hodnoty $y_F(k)$ závisí na okamžité hodnotě bílého šumu $\nu(k)$ a na minulých hodnotách výstupu $y_F(k-1)$, $y_F(k-2)$, ..., které jsou váženy koeficienty d_i, $i = 1,2,3,....$ Odtud název autoregresní.

Přenos filtru je $G_F(z^{-1}) = \frac{c_0}{D(z^{-1})}$, $y_F(k) = \frac{c_0}{D}\nu_k$. $\qquad (2-4)$

2) Model náhodného procesu s **klouzavým průměrem MA** (**M**oving **A**verage) má diferenční rovnici

$$y_F(k) = c_0\nu(k) + c_1\nu(k-1) + ... + c_m\nu(k-m) \, . \qquad (2-5)$$

Pravou stranu představuje vážený součet hodnot bílého šumu $\nu(k)$, $\nu(k-1)$, $\nu(k-2)$, ..., což lze chápat jako časově závislou střední hodnotu.

Přenos filtru je: $G_F(z^{-1}) = C(z^{-1}) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + ... + c_m z^{-m}$. $\qquad (2-6)$

3) Použijeme-li pro model stochastickou diferenční rovnici, nebo též kombinaci obou modelů **AR** a **MA** pak je tento model označován jako **ARMA** model (**A**uto**R**egresiv **M**oving **A**verage). Jeho diferenční rovnice je

$$y_F(k) + d_1 y_F(k-1) + ... + d_n y_F(k-n) = c_0 \nu(k) + c_1 \nu(k-1) + ... + c_m \nu(k-m)$$

Můžeme zkráceně psát

$$y_F(k) * D = C * \nu(k) \rightarrow y_F(k) = \frac{C}{D} * \nu(k) . \qquad (2-7)$$

4 DISKRÉTNÍ MODEL SYSTÉMU PŘI PŮSOBENÍ STOCHASTICKÉHO STACIONÁRNÍHO SIGNÁLU

Odezva identifikovaného dynamického systému *y(k)* obsahuje podle (1 – 7) složku deterministickou $y_u(k)$ a stochastickou $y_v(k)$. Podle předpokladů (1 – 7) je $y_v(k)$ stacionární stochastický signál. Platí rovnost pro $y_d(t) = \chi(t) = \lambda(t) = 0$

$$y(k) = y_u(k) + y_v(k) . \qquad (3-1)$$

Pro obě složky výstupu je třeba nalézt vhodný matematický popis, což je ukázáno v následujících kapitolách.

4.1 STRUKTURA MODELU

Diskrétní popis tohoto systému pak musí také obsahovat jak deterministickou, tak stochastickou část modelu. Deterministická část modelu je zřejmě dána diskrétním přenosem (1 – 4) a za předpokladu, že operátor z^{-1} chápeme jako operátor posunu $y(k - 1) = z^{-1}y(k)$, můžeme psát

$$G_U(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{B}{A} \rightarrow y_u(k) = \frac{B}{A} u(k) \qquad (3-2)$$

kde $A = A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + ... + a_n z^{-n}$

$B = B(z^{-1}) = z^{-\nu}(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + ... + b_{m\,n} z^{-m})$,

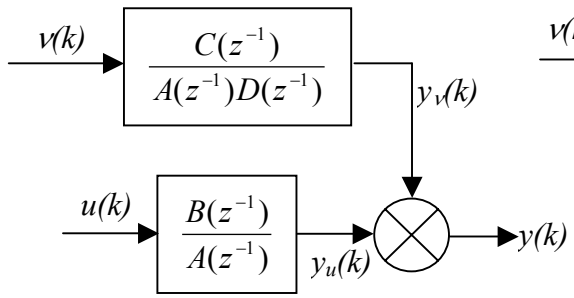
n, m ,ν … jsou stupně polynomů, které je **třeba zvolit**.

Stochastický signál $y_v(k)$ je třeba v stochastické části modelu aproximovat průchodem bílého šumu vhodným diskrétním přenosem. Základem stochastické části modelu může být diskrétní přenos (2 – 2), který popisuje dynamické vlastnosti lineárního diskrétního filtru, jestliže na vstupu filtru je bílý šum $\nu(k)$. Na přednáškách z Teorie řízení I (Struktura regulačního obvodu s měřenými i neměřenými poruchami) byl diskutován problém aproximace dynamických účinků poruch pomocí obrazových přenosů $F_d(s)$ a $F_m(s)$. Bylo ukázáno, že je-li možno dynamický systém popsat stavovou rovnicí, pak jmenovatele obrazových přenosů $F_u(s)$, $F_d(s)$ a $F_m(s)$ obsahují stejný polynom, který je charakteristickým

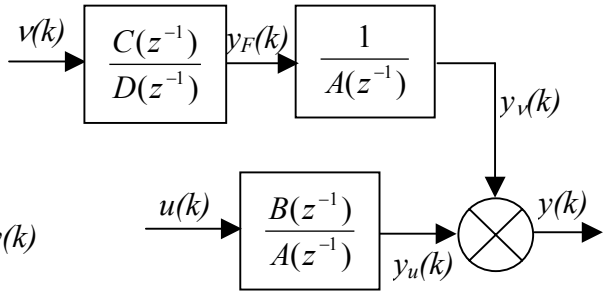
polynomem přenosové matice. Proto obrazový přenos stochastické části modelu zvolíme ve tvaru

$$G_v(z^{-1}) = \frac{1}{A(z^{-1})} G_F(z^{-1}) = \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})D(z^{-1})} \rightarrow y_v(k) = \frac{C}{A} * \frac{1}{D} * \nu(k) \qquad (3-3)$$

Blokové schéma tohoto modelu je na obr.3.1a. Je zřejmé, že tento model má dva vstupy, jeden pro determinovaný vstup *u(k)* a druhý pro speciální stochastický signál - bílý šum *ν(k)*, který prochází přes lineární filtr $G_F = C/D$, jehož výstupem je stacionární stochastický signál $y_F(k)$, viz obr.3.1b.



Obr.3.1a *Blokové schéma modelu*



Obr.3.1b *Blokové schéma modelu se signálem*

Dosazením (3 – 2) a (3 – 3) do (3 – 1) dostaneme

$$y(k) = y_u(k) + y_v(k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k) + G_F(z^{-1})\frac{1}{A(z^{-1})}\nu(k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})D(z^{-1})}\nu(k) \qquad (3-4)$$

Vynásobíme-li rovnici (3 – 4) polynomem $A(z^{-1})$, můžeme diskrétní model přepsat do tvaru

$$y(k)A(z^{-1}) - B(z^{-1})u(k) = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}\nu(k) = G_F(z^{-1})\nu(k) \qquad (3-5)$$

Rovnost (3 – 5) je možno vyjádřit ve tvaru diferenční rovnice

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \ldots + a_n y(k-n) - [b_0 u(k-1) + b_1 u(k-2) + \ldots + b_m u(k-m)] = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}\nu(k),$$

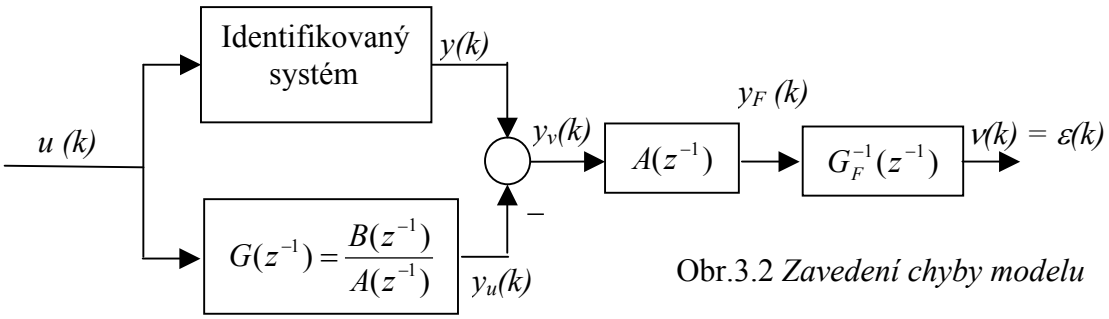
zkráceně pak ve tvaru

$$\boxed{y(k)A(z^{-1}) - B(z^{-1})u(k) = G_F(z^{-1})\nu(k)}. \qquad (3-6)$$

4.2 CHYBY MODELU

Připomeneme si nyní, že hledaný model má sloužit k identifikaci dynamických systémů. Bude nás tedy určitě zajímat, jaké chyby je možno s požadovaným modelem dosáhnout. Pro vyjádření chyby existuje více možností.

a) Jedna z možných struktur chyb je zobrazena na obr.3.2. Pro posouzení vlastností chyby modelů budeme uvažovat ideální situaci, kdy se předpokládá, že odhady parametrů polynomů A, B, C, D jsou rovny skutečným parametrům. Určíme rozdíl $y(k) - y_u(k) = y_v(k)$



Obr.3.2 *Zavedení chyby modelu*

Na základě předpokladů o odhadech parametrů platí $\Delta(k) = y(k) - y_u(k) = y_v k)$. Vyjádříme-li $\Delta(k) = y_v(k)$ pomocí rovnice (3 – 4) pak platí

$$\Delta(k) = A(z^{-1})G_F^{-1}(z^{-1})\varepsilon(k) \rightarrow y_v(k) = A(z^{-1})G^{-1}{}_F(z^{-1})\nu(k)\,. \qquad (3-7)$$

Chyba výstupu modelu je rovna

$$\varepsilon(k) = A(z^{-1})G_F^{-1}(z^{-1})\Delta(k) = A(z^{-1})G_F^{-1}(z^{-1})[y(k) - \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k)] = \nu(k)\,, \quad (3-8a)$$

kde $\varepsilon(k)$ je **chyba výstupu modelu**.

Z rovnosti (3 – 8a) vyplývá, že chyba modelu, jsou li odhady parametrů polynomů A, B, C, D rovny skutečným parametrům, je rovna právě diskrétním hodnotám bílého šumu $\varepsilon(k) = \nu(k)$.

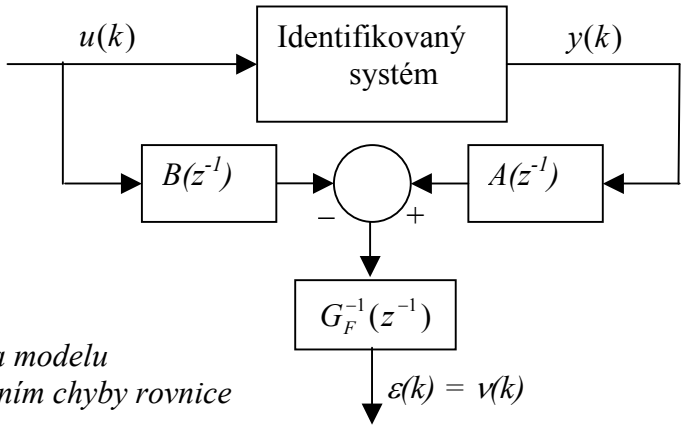
b) Budeme-li vycházet z diferenční rovnice (3 – 6) pak pro chybu platí

$$y(k)A(z^{-1}) - B(z^{-1})u(k) = G_F(z^{-1})\varepsilon(k)\,.$$

S využitím (2 – 7) můžeme chybu $\varepsilon(k)$ vyjádřit rovností

$$\varepsilon(k) = G_F^{-1}(z^{-1})[y(k)A(z^{-1}) - B(z^{-1})u(k)] = \nu(k) \qquad (3-8b)$$

Takto zavedená chyba se označuje jako **chyba rovnice** a její struktura je na obr.3.3.

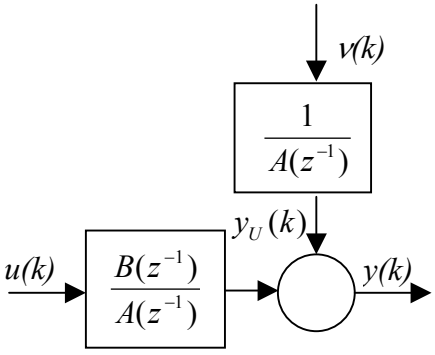


Obr.3.3 *Struktura modelu se zavedením chyby rovnice*

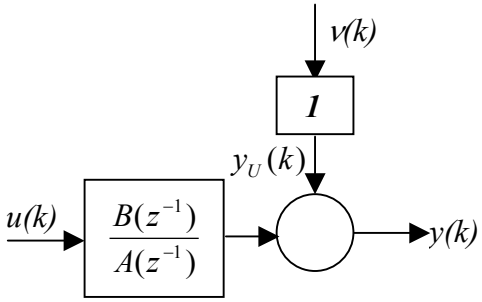
4.3 STRUKTURA DISKRÉTNÍCH MODELŮ

Při identifikaci se používají různé struktury modelů, které vycházejí z rovnosti (3 – 8b) a podle konkrétního šumového signálu se volí přenos $G_F(z^{-1})$.

1) Zvolíme-li $G_F(z^{-1}) = 1$, pak dostaneme blokové schéma modelu dynamické soustavy dle obr.3.4, který se označuje zkratkou model **ARX** (**A**uto-**R**egresiv with e**X**ogenous variable).



Obr.3.4 *Struktura ARX modelu*



Obr.3.5 *Struktura OE modelu*

Výstup modelu lze vyjádřit rovností

$$y(k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k) + \frac{1}{A(z^{-1})}v(k) \qquad (3-9)$$

Diferenční rovnice modelu ARX je

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \ldots - a_n y(k-n) + b_0 u(k-1) + \ldots + b_m u(k-m) + v(k) \qquad (3-10)$$

2) Zvolíme-li $G_F(z^{-1}) = A(z^{-1})$, pak výstup modelu je roven

$$y(k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k) + v(k)\,. \qquad (3-11)$$

Diferenční rovnice má tvar

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \ldots - a_n y(k-n) + b_0 u(k-1) + \ldots + b_m u(k-m) +$$
$$+ v(k) + a_1 v(k-1) + \ldots + a_n v(k-n)$$

Tento model se označuje zkratkou **OE** (**O**utput **E**rror) a jeho blokové schéma je na obr.3.5.

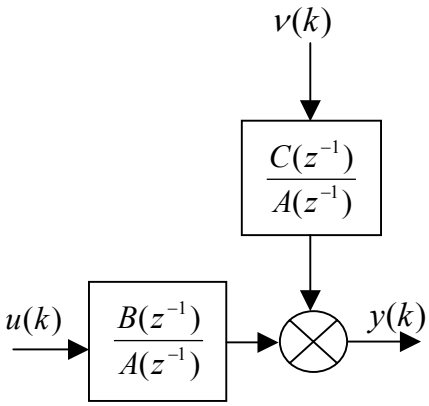
3) Zvolíme-li $G_F(z^{-1}) = C(z^{-1})$, pak výstup modelu je roven

$$y(k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}v(k)\,, \qquad (3-12)$$

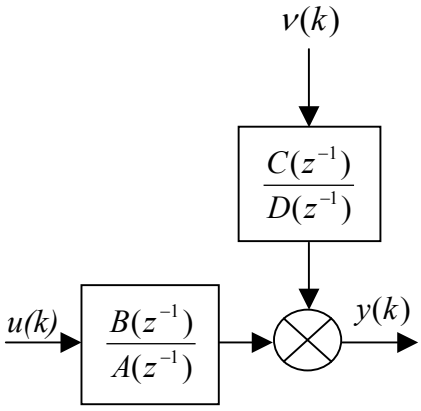
Diferenční rovnice má tvar

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \ldots - a_n y(k-n) + b_0 u(k-1) + \ldots + b_m u(k-m) + \\ + c_0 \nu(k) + c_1 \nu(k-1) + \ldots + c_n \nu(k-n)\,. \qquad (3-13)$$

Blokové schéma a tohoto modelu je na obr.3.6 a označuje se zkratkou **ARMAX** model (**A**uto-**R**egresive **M**oving **A**verage with e**X**ogenous variable), což znamená autoregresní model s klouzavým průměrem a s externí proměnnou – akční veličinou *u(k)*.



Obr.3.6 *Blokové schéma ARMAX modelu*



Obr.3.7 *Blokové schéma BJ modelu*

4) Blokové schéma modelu **BJ** (**B**ox – **J**enkins) je na obr.3.7 a jeho výstup je definován rovnicí

$$y(k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(k) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})D(z^{-1})} \nu(k)\,. \qquad (3-14)$$

Diferenční rovnice ve zkráceném tvaru je

$$y(k)A(z^{-1})D(z^{-1}) - B(z^{-1})D(z^{-1})u(k) = C(z^{-1})A(z^{-1})\nu(k)\,. \qquad (3-15)$$

Zavedeme-li označení

$$A^*(z^{-1}) = A(z^{-1})D(z^{-1}); B^*(z^{-1}) = B(z^{-1})D(z^{-1}); C^*(z^{-1}) = C(z^{-1})A(z^{-1})\,, \qquad (3-16)$$

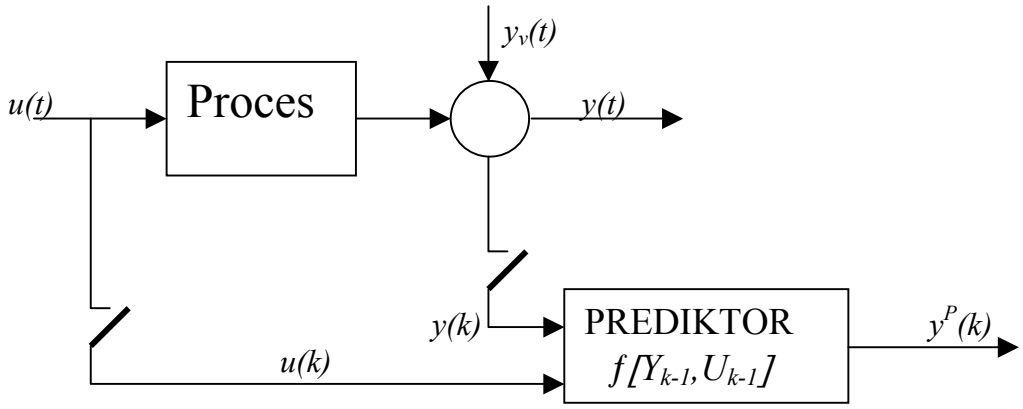
pak diferenční rovnice má tvar:

$$y(k)A^*(z^{-1}) - B^*(z^{-1})u(k) = C^*(z^{-1})\nu(k) \qquad (3-17)$$

Porovnáním (3 – 17) a (3 – 12) je zřejmé, že model BJ je možno převést na ARMAX model.

4.4 PREDIKCE VÝSTUPU

Stochastická diferenční rovnice a její modifikace je obsažena v modifikovaném tvaru v modelech ARX, OE, ARMAX, BJ. Tyto modely popisují dynamické vlastnosti soustav za přítomnosti šumů a jak bylo ukázáno, obsahují ve své struktuře modelu na vstupu složky bílého šumu $\nu(k - i),\ i = 0, 1, \ldots n,$ které **nejsou měřitelné**. Proto, ani při znalosti všech koeficientů takovýchto modelů, není možno **vypočítat výstup *y(k)*** při známých hodnotách vstupu $u(k - j),\ j = 0, \ldots, m$ a měřených minulých hodnotách výstupu $y(k - i),$ pro $i = 1, \ldots, n$. Tato úloha je řešena třídou matematických modelů, které se nazývají prediktory. Odhad výstupu $y^P(k)$ pomocí prediktoru je znázorněn na obr. 3.8. Predikce výstupu je obecně nelineární



Obr.3.8 *Odhad výstupu pomocí prediktoru*

funkce

$$y^P(k) = f[Y_{k-1}, U_{k-1}],$$

kde … Y_{k-1} je množina měřených výstupů, U_{k-1} je množina měřených vstupů.

V dalším výkladu se omezíme pouze na **model ARX**, jehož výstup je popsán diferenční rovnicí (3 – 10). Vyjádříme-li výstup $y(k) = y_k$ pomocí vektoru parametrů $\boldsymbol{p}$ a vektoru měření $\boldsymbol{z_k}$ v časovém okamžiku "*k*", pak platí

$$y_k = \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{z_k} + \nu_k\,, \qquad (3 - 18)$$

kde … $\boldsymbol{p}^T = [\,-a_1, -a_2, \ldots, -a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m]$; $\boldsymbol{z_k}^T = [\,y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots, y_{k-n}, u_{k-1}, u_{k-2}, \ldots, u_{k-m}]$.

Predikci výstupu je možno vyjádřit jako podmíněnou střední hodnotu

$$\hat{y}_k = \mathrm{E}\{y_k / y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots, y_{k-n}, u_{k-1}, u_{k-2}, \ldots, u_{k-m}\}.$$

S použitím rovnosti (3 – 18) dostaneme

$$\mathrm{E}\{\hat{y}_k\} = \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{z}_k + \mathrm{E}\{\nu_k\}.$$

Protože střední hodnota bílého šumu je rovna nule ($E\{\nu_k\} = 0$), je predikce rovna výrazu

$$y_k^P = \mathbf{p}^T \mathbf{z}_k = -\sum_{i=1}^{n} a_i y_{k-i} + \sum_{j=0}^{m} b_j u_{k-j-v} \qquad (3-19)$$

Jednoduchým použitím operátoru střední hodnoty jsme získali z modelu ARX jednoduchý prediktor, pomocí kterého můžeme na základě měřených vstupů a výstupů predikovat - odhadovat výstup systému y_k .

5 ODHAD PARAMETRŮ MODELU ARX METODOU NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

Pokud vektor parametrů $\boldsymbol{p}$ není znám, ale bude v procesu vyhodnocování měření odhadnut, pak hovoříme o vektoru odhadu parametrů $\hat{\mathbf{p}}$. Odhad výstupu z prediktoru pak označíme $\hat{y}_k$ a jeho popis bude

$$\hat{y}_k = \hat{\boldsymbol{p}}^T \boldsymbol{z}_k = -\sum_{i=0}^{n} \hat{a}_i y_{k-i} + \sum_{j=0}^{m} \hat{b}_j y_{k-j-v} \ ,$$

kde pro v platí : $\tau_D = (v-1) * T + \xi * T$;

τ_D je dopravní zpoždění, T je perioda vzorkování, $\xi \in \langle 0,1 \rangle$

Chyba predikce je definována

$$e(k) = y_k - \hat{y}_k = y_k - \hat{\boldsymbol{p}}^T \boldsymbol{z}_k = y_k + \sum_{i=0}^{n} \hat{a}_i y_{k-i} - \sum_{j=0}^{m} \hat{b}_j y_{k-j-v} \ . \qquad (4-1)$$

5.1 METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

Pro odhad parametrů na základě měření a volby diskrétního modelu existuje celá řada metod. V našem kurzu bude použita pro odhad vektoru parametrů $\hat{\boldsymbol{p}}$ metoda nejmenších čtverců, kterou jako první použil a publikoval K. G. Gauss již v roce 1795. Základní myšlenka spočívá v tom, že odhad vektoru parametrů $\hat{\boldsymbol{p}}$ minimalizuje součet kvadrátů chyb, tj. že je splněna podmínka

$$J_2(\hat{\boldsymbol{p}}) = \sum_{k=1}^{N} e(k)^2 \rightarrow MIN \ , \qquad (4-2)$$

kde … N je počet měření.

Celý postup si ukážeme na následujícím příkladě. Budeme uvažovat N měřených dvojic (y_k, u_k) a diferenční rovnici prediktoru ve tvaru

$$\hat{y}_k = -\hat{a}_1 y_{k-1} + \hat{b}_0 u_{k-1} \, .$$

Vyjádříme-li chybu predikce pro *k = 1, 2, 3, ...N*, pak získáme soustavu rovnic ve tvaru

$$
\begin{aligned}
&k = 1; && e_1 = y_1 - \hat{y}_1 = y_1 + \hat{a}_1 y_0 - \hat{b}_0 u_0; \\
&k = 2; && e_2 = y_2 - \hat{y}_2 = y_2 + \hat{a}_1 y_1 - \hat{b}_0 u_1; \\
&k = 3; && e_3 = y_3 - \hat{y}_3 = y_3 + \hat{a}_1 y_2 - \hat{b}_0 u_2; \qquad \Rightarrow \qquad (4-3) \\
& && \quad . \\
& && \quad . \\
&k = N; && e_N = y_N - \hat{y}_N = y_N + \hat{a}_1 y_{N-1} - \hat{b}_0 u_{N-1};
\end{aligned}
$$

Zavedeme-li vektory $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{y}, \hat{\boldsymbol{p}}$ a matici $\boldsymbol{W}$ ve tvaru

$$
\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ . \\ . \\ e_N \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ . \\ . \\ y_N \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} y_0 ; u_0 \\ y_1 ; u_1 \\ y_2 ; u_2 \\ . \\ . \\ y_{N-1} ; u_{N-1} \end{bmatrix}; \qquad \hat{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} -\hat{a}_1 \\ +\hat{b}_0 \end{bmatrix};
$$

pak soustavu rovnic (4 – 3) můžeme vyjádřit v maticovém tvaru

$$
\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{W}\hat{\boldsymbol{p}} \,. \qquad (4-4)
$$

Hodnota kvadratického kriteria $J(-\hat{a}_1, \hat{b}_0)$ v závislosti na zatím neurčených parametrech modelu je rovna

$$
J(-\hat{a}_1, \hat{b}_0) = \sum_{k=1}^{N} e_k^2 = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{W}\hat{\boldsymbol{p}})^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{W}\hat{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{y} - 2\hat{\boldsymbol{p}}^T \boldsymbol{W}^T \boldsymbol{y} + \hat{\boldsymbol{p}}^T \boldsymbol{W}^T \boldsymbol{W}\hat{\boldsymbol{p}}, \qquad (4-5)
$$

jestliže je splněna rovnost $\hat{\boldsymbol{p}}^T \boldsymbol{W}^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{W}\hat{\boldsymbol{p}}$.

Nutná podmínka existence minima (4 – 2) je

$$
\frac{\partial J(\hat{\boldsymbol{p}})}{\partial \hat{\boldsymbol{p}}} = 0 \rightarrow -2\boldsymbol{W}^T \boldsymbol{y} + 2(\boldsymbol{W}^T \boldsymbol{W})\hat{\boldsymbol{p}} = 0 \,. \qquad (4-6)
$$

Hledaný vektor odhadů parametrů vypočteme z (4 – 6)

$$
\boxed{\hat{\boldsymbol{p}} = (\boldsymbol{W}^T \boldsymbol{W})^{-1} \boldsymbol{W}^T \boldsymbol{y}}. \qquad (4-7)
$$

Aplikaci rovnosti (4 – 7) a struktury vektorů a matice $\boldsymbol{W}$ ukážeme na Př.3.

Příklad 3

Uvažujme naměřenou diskrétní posloupnost z Př.2, která je bez šumu. $N = 3$.

$y_k = \{0; 0{,}5; 0{,}75; 0{,}875\}$ a $u_k = \{1; 1; 1; 1\}$, $(k = 0, 1, 2, 3)$

Model prediktoru zvolíme ve tvaru $\hat{y}_k = -\hat{a}_1 y_{k-1} + \hat{b}_0 u_{k-1}$. Datové struktury vektorů $\boldsymbol{y}$, $\hat{\boldsymbol{p}}$ a matice $\boldsymbol{W}$ pak jsou

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0{,}500 \\ 0{,}750 \\ 0{,}875 \end{bmatrix};\ W = \begin{bmatrix} 0{,}00;1 \\ 0{,}50;1 \\ 0{,}75;1 \end{bmatrix};\ W^T = \begin{bmatrix} 0{,}00;0{,}50;0{,}75 \\ 1{,}00;1{,}00;1{,}00 \end{bmatrix};\ W^T * W = \begin{bmatrix} 0{,}8125;1{,}25 \\ 1{,}250;3{,}000 \end{bmatrix};\ \hat{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ +b_0 \end{bmatrix};$$

$$(\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{T}} * \boldsymbol{W})^{-1} = \begin{bmatrix} +3{,}4286; -1{,}4286 \\ -1{,}4286; +0{,}9286 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{W}^{\boldsymbol{T}} * \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1{,}0313 \\ 2{,}1250 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{p}} = (\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} +3{,}4286; -1{,}4286 \\ -1{,}4286; +0{,}9286 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1{,}0313 \\ 2{,}1250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix};\ a_1 = -0{,}5;\ b_0 = 0{,}5$$

Z výsledku je zřejmé, že podle očekávání byly nalezeny stejné parametry modelu jako výpočtem v Př.2. Obdobným způsobem sestavíme datové struktury i pro jiný řád modelu a počet vzorků.

Konec příkladu

5.2 VLASTNOSTI ODHADŮ

V této kapitole se pokusíme ukázat základní vlastnosti odhadů parametrů.

1) První otázkou je, jaká je souvislost mezi odhadnutým vektorem parametrů $\hat{\boldsymbol{p}}$ a skutečným vektorem parametrů $\boldsymbol{p}$. Můžeme vycházet z předpokladu, že měřený vektor výstupu soustavy **y** můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{e}\,, \qquad (4-8)$$

kde … $\boldsymbol{p}$ je vektor skutečných parametrů,
$\boldsymbol{W}$ je matice dat,
$\boldsymbol{e}$ je vektor šumu.

Dosazením (4 – 8) do (4 – 7) dostaneme

$$\hat{\boldsymbol{p}} = (\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{T}} * (\boldsymbol{W}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{e}) = \boldsymbol{p} + (\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{e}\,. \qquad (4-9)$$

V rovnici (4 – 9) je na pravé straně vektor šumu $\boldsymbol{e}$. Z toho vyplývá, že parametry odhadovaného vektoru $\hat{\boldsymbol{p}}$ jsou náhodné veličiny. Můžeme tedy určit jejich střední hodnotu

$$\mathrm{E}\{\hat{\boldsymbol{p}}\} = \mathrm{E}\{\ \boldsymbol{p} + (\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{e}\ \} = \mathrm{E}\{\boldsymbol{p}\} + \mathrm{E}\{\ (\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{e}\ \},$$

kde E je operátor střední hodnoty. Označíme-li $\mathrm{E}\{\hat{\mathbf{p}}\} = \hat{\mathbf{p}}$; $\mathrm{E}\{\mathbf{p}\} = \mathbf{p}$; a budeme-li předpokládat, že prvky datové matice $\boldsymbol{W}$ a vektoru šumu $\boldsymbol{e}$ jsou statisticky nezávislé, pak platí

$$\hat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p} + \mathrm{E}\left\{(\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}^T\right\} * \mathrm{E}\{\boldsymbol{e}\}.$$

Je-li střední hodnota šumového signálu nulová, pak dostaneme rovnost

$$\boxed{\mathrm{E}\{\boldsymbol{e}\} = \boldsymbol{0} \rightarrow \hat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}} \qquad (4-10)$$

a je možno zformulovat tvrzení

> *Odhad parametrů vektoru $\hat{\mathbf{p}}$ metodou nejmenších čtverců je nestranný (nevychýlený), je-li střední hodnota složek vektoru $\mathbf{e}$ nulová a jsou-li sloupce datové matice $\boldsymbol{W}$ a vektoru $\mathbf{e}$ vzájemně statisticky nezávislé.*

Poznámka: Informace o rozptylech a kovariancích vektoru chyb $\mathbf{e}$ je obsažena v kovariační matici. Za předpokladu, že vektor šumu $\mathbf{e}$ obsahuje prvky statisticky nezávislé, platí

$$\bar{\mathbf{c}}_{ee} = \mathrm{E}\{\mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\} = \sigma_e^2\mathbf{I}, \qquad (4-11)$$

kde σ_e^2 je rozptyl šumového signálu.

Další informace o možnostech numerických výpočtů střední hodnoty, rozptylu, směrodatné odchylky, kovariační matice, korelačních koeficientů naleznete ve "Stručném manuálu MATLABu pro předměty teorie řízení" v oddíle "Náhodný proces" na adrese

http://www.fm.vslib.cz/~krt/krt_cz/vyuka/text/matlab/html.htm.

2) Jistě nás bude taky zajímat, jak "přesné" jsou nalezené odhady, jinými slovy, jaké vlastnosti má rozdíl $\boldsymbol{\Delta} = \hat{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p}$. Víme již, že střední hodnota $\mathrm{E}\{\boldsymbol{\Delta}\}$ je rovna nule viz (4 – 10). Informace o rozptylech vektoru $\boldsymbol{\Delta}$ určíme z jeho kovariační matice

$$\boldsymbol{R}_{\Delta\Delta} = \boldsymbol{E}\{\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}^T\} = \boldsymbol{E}\{(\hat{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p})(\hat{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p})^T\}.$$

Vyjádříme-li $(\hat{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p})$ z (4 – 9) dostaneme

$$\boldsymbol{R}_{\Delta\Delta} = \mathrm{E}\{[(\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{e}][(\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{e}]^T\} = \mathrm{E}\{(\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{W}(\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{W})^{-1}\}.$$

Vzhledem k předpokládané statistické nezávislosti prvků vektoru $\boldsymbol{e}$ a prvků matice $\boldsymbol{W}$ a s využitím věty o střední hodnotě součinu statisticky nezávislých veličin dostaneme

$$\boldsymbol{R}_{\Delta\Delta} = \mathrm{E}\{(\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}^T\ \}\mathrm{E}\{\ \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T\ \}\mathrm{E}\{\ \boldsymbol{W}(\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{W})^{-1}\} = \mathrm{E}\{\ \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T\ \}\mathrm{E}\{\ (\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{W})^{-1}\ \}.$$

S využitím (4 – 11) pak má kovariační matice tvar

$$\mathbf{R}_{\Delta\Delta} = \mathrm{E}\{\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}^{\mathbf{T}}\} = \mathrm{E}\{(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p})(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p})^T\} = \sigma_e^2 (\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{W})^{-1} \qquad (4-12)$$

Pro rovnost (4 – 12) je možno zformulovat tvrzení

Jsou-li složky matice $\boldsymbol{W}$ *a vektoru* $\boldsymbol{e}$ *statisticky nezávislé:* $\mathrm{E}\{e_i\} = 0; \mathrm{E}\{e_i^2\} = \sigma_e^2$ *pro i = 1, 2, ..., pak platí*

$$\mathrm{E}\{(\hat{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p})(\hat{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p})^T\} = \sigma_e^2 (\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{W})^{-1}.$$

5.3 ODHAD VEKTORU PARAMETRŮ POMOCÍ KORELAČNÍCH FUNKCÍ

Uvažujme diferenční rovnici ARX modelu druhého řádu ve tvaru

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_0 u(k-1) + b_1 u(k-2). \qquad (4-13)$$

Vektor odhadu parametrů je pak $\hat{\boldsymbol{p}} = [-a_1, -a_2, b_0, b_1]$. Vyjádříme-li strukturu součinu matic $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{W}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{W}$ z výrazu (4 – 7) pro zvolenou strukturu modelu, dostaneme struktury

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{W} = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_{N-1} \\ y_{-1} & y_0 & y_1 & \dots & y_{N-2} \\ u_0 & u_1 & u_2 & \dots & u_{N-1} \\ u_{-1} & u_0 & u_1 & \dots & u_{N-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 & y_{-1} & u_0 & u_{-1} \\ y_1 & y_0 & u_1 & u_0 \\ y_2 & y_1 & u_2 & u_1 \\ \vdots & & & \\ y_{N-1} & y_{N-2} & u_{N-1} & u_{N-2} \end{bmatrix} =$$

$$= N \begin{bmatrix} \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} y_i^2 & \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} y_i y_{i-1} & \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} y_i u_i & \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} y_i u_{i-1} \\ \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} y_{i-1} y_i & \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} y_{i-1}^2 & \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} y_{i-1} u_i & \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} y_{i-1} u_{i-1} \\ \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} u_i y_i & \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} u_i y_{i-1} & \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} u_i^2 & \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} u_i u_{i-1} \\ \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} u_{i-1} y_i & \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} u_{i-1} y_{i-1} & \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} u_{i-1} u_i & \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} u_{i-1}^2 \end{bmatrix} =$$

$$= N \begin{bmatrix} c_{yy}(0) & c_{yy}(-1) & c_{yu}(0) & c_{yu}(-1) \\ c_{yy}(-1) & c_{yy}(0) & c_{yu}(-1) & c_{yu}(0) \\ c_{uy}(0) & c_{uy}(-1) & c_{uu}(0) & c_{uu}(-1) \\ c_{uy}(-1) & c_{uy}(0) & c_{uu}(-1) & c_{uu}(0) \end{bmatrix}.$$

Ze struktury součinu $\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{W}$ je zřejmé, že prvky matice $\boldsymbol{A}$ tvoří hodnoty autokorelační a vzájemné korelační funkce $c_{yy}(k), c_{uy}(k), c_{yu}(k)$ a $c_{uu}(k)$ pro k = 0, -1 výstupního a

vstupního signálu y_k, u_k (viz Příloha). Všechny prvky matice jsou vynásobené počtem měření N. Pro součin $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{W}^T \boldsymbol{y}$ dostaneme strukturu

$$\mathbf{b} = \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{N-1} \\ y_{-1} & y_0 & y_1 & \cdots & y_{N-2} \\ u_0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_{N-1} \\ u_{-1} & u_0 & u_1 & \cdots & u_{N-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_{i-1}y_i \\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_{i-2}y_i \\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_{i-1}y_i \\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_{i-2}y_i \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} c_{yy}(1) \\ c_{yy}(2) \\ c_{uy}(1) \\ c_{uy}(2) \end{bmatrix}.$$

Je možno konstatovat, že prvky vektoru $\boldsymbol{b}$ tvoří *hodnota* autokorelační a korelační funkce $c_{yy}(1)$, $c_{yy}(2)$, $c_{uy}(1)$, $c_{uy}(2)$. Vektor parametrů $\hat{\boldsymbol{p}}$ je pak možno určit z rovnosti

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} c_{yy}(0); c_{yy}(-1); c_{yu}(0); c_{yu}(-1) \\ c_{yy}(-1); c_{yy}(0); c_{yu}(-1); c_{yu}(0) \\ c_{uy}(0); c_{uy}(-1); c_{uu}(0); c_{uu}(-1) \\ c_{uy}(-1); c_{uy}(0); c_{uu}(-1); c_{uu}(0) \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} c_{yy}(1) \\ c_{yy}(2) \\ c_{uy}(1) \\ c_{uy}(2) \end{bmatrix}. \qquad (4-14)$$

Prakticky lze z naměřených dat určit vektor parametrů $\hat{\mathbf{p}}$ buď přímo ze vztahu (4 – 7), nebo můžeme pomocí vhodného software nejdříve určit hodnoty korelačních a autokorelačních funkcí vstupního a výstupního signálu pro *k = 0, -1, +1, -2, +2, ...* podle zvolené struktury diferenční rovnice a následně použít rovnosti (4 – 14).

6 SOFTWAROVÁ PODPORA DISKRÉTNÍ PARAMETRICKÉ IDENTIFIKACE

Aplikace metod diskrétní parametrické identifikace se opírají o softwarovou podporu v prostředí MATLABu. Využívá se SIMULINKu, Control System Toolboxu ale především „System Identification Toolbox“. Jedná se o velmi rozsáhlý programový produkt, ze kterého předkládáme opravdu jen malý zlomek, několik málo vybraných funkcí. Tyto však umožní studentům studovanou látku nejen ověřovat pomocí numerických experimentů ale i získat nezbytné profesní návyky a zkušenosti z identifikace. Podrobný popis a přehled všech funkcí je možno najít v "Helpu".

Předpokládáme, že data, se kterými se operuje, jsou uložena ve workspace.

Funkce **arx** — **Odhad - výpočet parametrů ARX modelu**

Model ARX s jedním vstupem a jedním výstupem v prostředí MATLABu je vyjádřen zkrácenou diferenční rovnicí tvaru

$$A(q)y(t) = B(q)u(t-nk) + e(t),$$

kde je
- $y(t)$ diskrétní výstupní veličina ($t = k$ je diskrétní čas),
- $u(t - nk)$ diskrétní vstupní veličina,
- nk kladné celé číslo charakterizující diskrétní dopravní zpoždění jako celočíselný násobek periody vzorkování,
- $e(t)$ diskrétní šumový-stochastický signál,
- $A(q)$ polynom stupně $\partial A = na,\ q = z^{-1},\ A(q) = 1 + a_1 q^1 + \ldots + a_{na} q^{na}$,
- $B(q)$ polynom stupně $\partial B = m = nb - 1,\ B(q) = b_0 + b_1 q^1 + \ldots + b_m q^m$,
- nb **počet koeficientů polynomu** $B(q)$

Příkaz pro výpočet parametrů ARX modelu metodou nejmenších čtverců má syntaxi

th = arx (z,nn) (5 – 1)

kde je
- **th** datová struktura - matice, obsahující ve **3. řádku vektor parametrů,**
- **z=[y u]**; matice výstupních - vstupních dat (output - input data),
- **y**, **u** sloupcové vektory,
- **nn** jednořádková matice se třemi sloupci, **nn=[na nb nk].**

Strukturou matice th – „modelem theta“ se nebudeme zabývat, protože to přesahuje rámec našeho předmětu. Požadované informace nebo struktury modelů vhodných pro další výpočty získáme pomocí transformačních příkazů a funkcí.

Příkaz **present (th)** (5 – 2)

zobrazí z datové struktury matice **th,** která byla vytvořena příkazem (5 – 1), koeficienty polynomů *B(q), A(q)* společně s jejich směrodatnými odchylkami, hodnotou kvadratického

funkcionálu (loss function) a Akaikeho chybou predikce (Akaike's Final Prediction Error Criterion (FPE)).

Př.5.1

Ukažme použití příkazu **arx** na datech z Př.2. kap.2. Naměřená data uložíme do matice ***mz***. Zvolme: stupeň polynomu $\partial A = na = 1$, $\partial B = m = 0$, pak počet koeficientů polynomu B je $nb = m + 1 = 1$. Diskrétní dopravní zpoždění je $nk = 1$ a datová strukturu parametrů je ***thz***. Na displeji se zobrazí: matice ***mz***, jednořádková matice ***nn***, datová struktura ***thz***.

```
» mz

mz =

         0    1.0000
    0.5000    1.0000
    0.7500    1.0000
    0.8750    1.0000

» nn

nn =

     1     1     1

» thz=arx(mz,nn)

thz =

  Columns 1 through 7

    0.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000         0         0
    0.0000   20.0100    9.0000    4.0000   11.0000   21.0000    1.0000
   -0.5000    0.5000         0         0         0         0         0
    0.0000    0.0000         0         0         0         0         0
    0.0000    0.0000         0         0         0         0         0

  Columns 8 through 9

         0    1.0000
         0         0
         0         0
         0         0
         0         0
```

Obr.5.1 *Použití funkce arx v příkazovém řádku*

Pomocí příkazu **present** zobrazíme koeficienty polynomů *A(q)*, *B(q)* a jejich směrodatné odchylky.

Poznámka: Je třeba si uvědomit, že příkaz **present** *uvedené koeficienty polynomů a další informace pouze zobrazuje. Není je možno použít pro další výpočty. K tomu jsou určeny další příkazy a funkce, které budou dále ještě vysvětleny.*

Použití příkazu **present** z příkazového řádku a koeficienty diferenční rovnice jsou na obr.5.2

```
» present(thz)
This matrix was created by the command ARX    on 9/4 2001 at 11:21
Loss fcn: 1.2326e-032   Akaike`s FPE: 3.6978e-032 Sampling interval 1
The polynomial coefficients and their standard deviations are

B =

         0    0.5000
         0    0.0000


A =

    1.0000   -0.5000
         0    0.0000

»
```

Obr.5.2 *Zobrazení parametrů diferenční rovnice pomocí příkazu* ***present***

Diferenční rovnice je rovna

$$y(k) = -a_1 y(k-1) + b_0 u(k-1) = 0.5y(k-1) + 0.5u(k-1)$$

Konec příkladu 5.1

Aby bylo možno pro odhadnuté parametry spočítat v prostředí MATLABu např. diskrétní přechodovou funkci nebo použít nalezené polynomy pro syntézu regulátoru, je třeba datovou strukturu-matici **th** transformovat na koeficienty diferenční rovnice nebo polynomy diskrétních přenosů. K tomu jsou připraveny v toolboxu identifikace procedury, které slouží k těmto přepočtům - ke konverzi modelů. Jednou z významných transformačních funkcí je přepočet matice **th** na parametry diferenční rovnice ARX modelu.

Funkce **th2arx** Transformace matice th na parametry diferenční rovnice ARX

Syntaxe funkce

[A, B] = th2arx (th), (5 – 3)
[A, B, dA, dB] = th2arx (th). (5 – 4)

kde je **th** matice (datová struktura) označována jako "theta model"
A, B matice, které popisují vícerozměrný ARX model a jejichž struktura je **A** = [$I\ A_1\ A_2\ \ldots\ A_{na}$]; **B**=[$B_0\ B_1\ B_2\ \ldots\ B_m$], I jednotková matice
dA, dB matice směrodatných odchylek parametrů diferenční rovnice

Po provedení příkazu vrací tato funkce matice zobecněného vícerozměrového ARX modelu do tvaru diferenční rovnice, která má v maticovém zápisu tvar

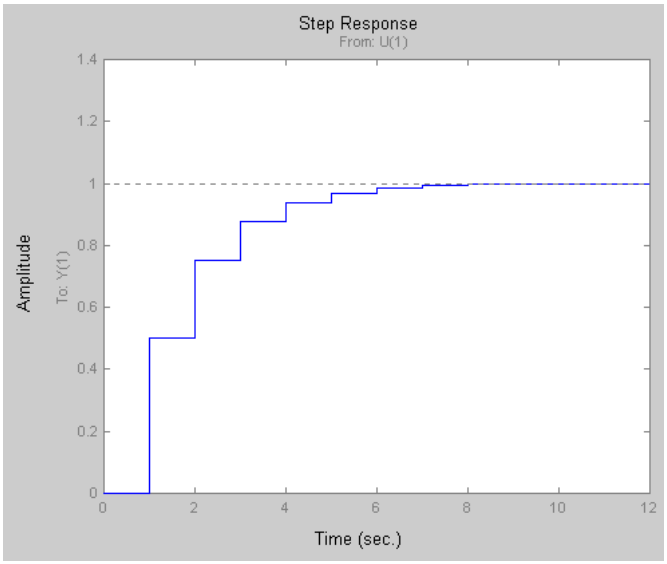
$$\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y}(t-1) + \ldots + \boldsymbol{A}_{na}\boldsymbol{y}(t-na) = \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}(t-1) + \ldots + \boldsymbol{B}_{nb}\boldsymbol{u}(t-nb),$$

V dalším popisu výklad omezíme pouze na modely ARX s jedním vstupem a jedním výstupem. Matice **A, B** jsou jednořádkové matice **A**=[1 a_1 a_2 … a_n]; **B**=[b_0 b_1 … b_m]. Aplikace z příkazového řádku bude demonstrována na následujícím příkladě.

Př.5.2 Uvažujme matici **thz** z Př.5.1. Ukažme použití příkazu **th2arx** a příkazu **dstep.**

```
» [A,B]=th2arx(thz)

A =

    1.0000   -0.5000

B =

         0    0.5000

» hd=dstep(B,A)

hd =

         0
    0.5000
    0.7500
    0.8750
    0.9375
    0.9688
    0.9844
    0.9922
    0.9961
    0.9980
    0.9990
    0.9995
    0.9998

» dstep(B,A)
```

Obr.5.3 *Příkazy* ***th2arx,dstep***



Obr.5.4 *Diskrétní přechodová funkce k Př.5.2*

Pořadnice diskrétní přechodové funkce jsou na obr.5.3 a její průběh je zobrazen na obr.5.4.

Konec příkladu. 5.2

Funkce **th2tf**

Transformace matice th na koeficienty polynomů diskrétních přenosů

Syntaxe funkce

[num, den] = th2tf (th), (5 – 5)

kde je **th** datová struktura označována jako "theta model"
num, den koeficienty maticových polynomů čitatele a jmenovatele diskretního obrazového přenosu.

Pro systémy s jedním vstupem a jedním výstupem jsou pak v maticích **num, den** uloženy přímo koeficienty polynomu čitatele a jmenovatele. Chceme-li diskrétní obrazový přenos přímo vytvořit, pak použijeme funkci

s = tf(B, A, Ts, 'variable', 'z^-1'), (5 – 6)

kde jsou

s	jméno,
B, A	polynomy obrazového přenosu v čitateli a jmenovateli,
Ts	perioda vzorkování,
'variable'	parametr,
'z^-1'	typ proměnné.

Použití této funkce včetně výpočtu obrazového přenosu ukážeme na následujícím příkladě.

Příklad 5.3

```
» [BN,AD]=th2tf(thz)

BN =

         0    0.5000


AD =

    1.0000   -0.5000

» tfd=tf(BN,AD,1,'variable','z^-1')

Transfer function:
  0.5 z^-1
------------
1 - 0.5 z^-1

Sampling time: 1
```

Konec příkladu 5.3

Obr.5.5 *Výpočet polynomů BN,AD a diskrétního přenosu*

V prostředí MATLABu je zaveden zobecněný popis diskrétního systému, který si stručně popíšeme včetně transformace matice **th** na polynomy tohoto přenosu.

Funkce **th2poly**

Transformace matice th na matice koeficientů polynomů zobecněného diskrétního modelu

Syntaxe funkce

[A, B, C, D, F, LAM, T] = th2poly (th). (5 – 7)

Po provedení příkazu jsou uloženy na maticích **A, B, C, D, F** koeficienty polynomů zobecněného diskrétního vícerozměrového modelu, který má v maticovém zápisu tvar

$$\boldsymbol{A}(q)\boldsymbol{y}(t) = \frac{\boldsymbol{B}_1(q)}{\boldsymbol{F}_1(q)}\boldsymbol{u}_1(t-nk_1) + \frac{\boldsymbol{B}_2(q)}{\boldsymbol{F}_2(q)}\boldsymbol{u}_2(t-nk_2) + \ldots + \frac{\boldsymbol{B}_{nu}(q)}{\boldsymbol{F}_{nu}(q)}\boldsymbol{u}_{nu}(t-nk_{nu}) + \frac{\boldsymbol{C}(q)}{\boldsymbol{D}(q)}\boldsymbol{e}(t),$$

Matice **A, B, C, D** a **F** obsahují koeficienty polynomiálních matic.
Matice **LAM** je kovariační matice vektoru šumu ***e(t)***, *T* je perioda vzorkování.

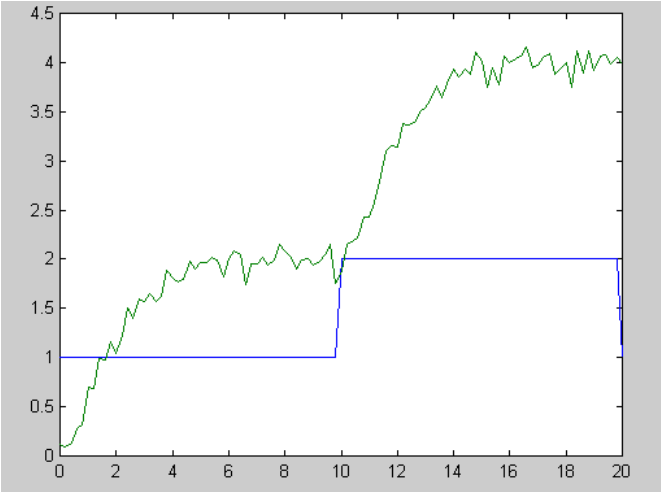
V další části výkladu se omezíme pouze na modely ARX a ARMAX s jedním vstupem a jedním výstupem. Matice **A, B, C** jsou pak jednořádkové matice: $A = [1 \;\; a_1 \;\; a_2 \;\; \ldots \;\; a_{na}]$; $B = [b_0 \;\; b_1 \;\ldots\; b_m]$, $C = [1 \; c_1 \;\ldots\; c_{nc}]$. Matici **LAM** i periodu vzorkování můžeme nechat prázdnou. Použití tohoto příkazu ukážeme na jednoduchém příkladě. Tuto funkci je zřejmě možno také použít pro modely ARMAX i BJ.

Př.5.4 Použití příkazu **th2poly** na matici **thz** z Př.5.1

```
» [A,B,T]=th2poly(thz)

A =

    1.0000   -0.5000


B =

         0    0.5000


T =

     1

» g=dstep(B,A)

g =

         0
    0.5000
    0.7500
    0.8750
    0.9375
    0.9688
    0.9844
    0.9922
    0.9961
    0.9980
    0.9990
    0.9995
    0.9998

» dstep(B,A)
»
```

Obr.5.4 *Aplikace příkazu "th2poly"*

Př.5.5 Nalezněte parametry ARX modelu z měření dle obr.5.5. Měřená data jsou v matici **z.**



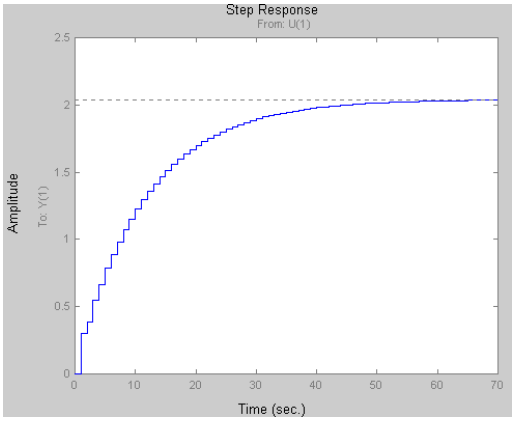
Obr.5.5 *Graf měření z Př.5.5*

```
» th2=arx(z,[2 2 1]);
» [A2,B2]=th2poly(th2)

A2 =

    1.0000   -0.4298   -0.4459


B2 =

         0    0.2997   -0.0461

» dstep(B2,A2)
```

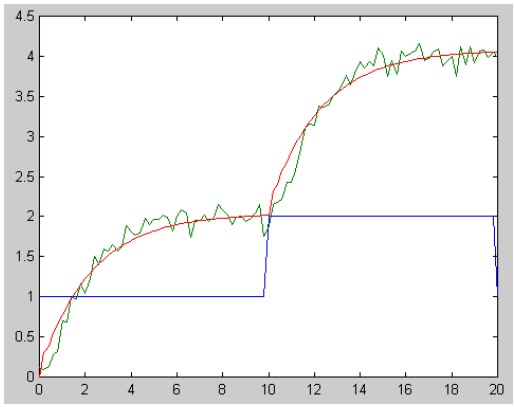
Obr.5.6 *Identifikace modelu ARX z měření*

Konec příkladu 5.4

Diskrétní přechodová funkce získaného modelu je na obr.5.7. Porovnání výstupu modelu a měření je na obr.5.8. Informace o směrodatných odchylkách odhadů parametrů diferenční rovnice je na obr.5.9. Připomeňme, že se zvolil model druhého řádu *na* = 2, počet koeficientů čitatele *nb* = 2 a diskrétní dopravní zpoždění *nk* = 1.



Obr.5.7 *Přechodová funkce*



Obr.5.8 *Porovnání výstupu modelu a měření*

```
» present(th2)
This matrix was created by the command ARX    on 9/5 2001 at 11:32
Loss fcn: 0.013694   Akaike`s FPE: 0.014823 Sampling interval 1
The polynomial coefficients and their standard deviations are

B =

         0    0.2997   -0.0461
         0    0.1177    0.1228


A =

    1.0000   -0.4298   -0.4459
         0    0.0873    0.0812
```

Obr.5.9 *Koeficienty diferenční rovnice ARX modelu a jejich směrodatné odchylky*

Konec příkladu 5.5

Funkce **th2ss**

Transformace matice th na matice diskrétního stavového popisu

Syntaxe funkce

[A, B, C, D, K, X0] = th2ss (th), (5 – 8)

kde je **th** datová struktura označována jako "theta model"
A, B, C, D, K matice diskrétního stavového popisu.
X0 vektor počátečních podmínek

Stavový popis je uvažován ve tvaru

$$\boldsymbol{x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Ke(t); x(0) = X0}\,,$$

$$\boldsymbol{y(t) = Cx(t) + Dx(t) + e(t)}\,.$$

Př.5.6

Transformace modelu v Z-přenosu na stavový model bude ukázána na Př.5.5.
(Je třeba si uvědomit, že není možno volit Frobeniovy normální formy.)

```
» [AS,BS,CS,DS,KS,XS]=th2ss(th2)

AS =

    0.4298    1.0000
    0.4459         0


BS =

    0.2997
   -0.0461


CS =

     1     0


DS =

     0


KS =

    0.4298
    0.4459


XS =

     0
     0
```

Obr.5.10 *Matice stavového popisu*

Stavová rovnice má tvar

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4298;1.000 \\ 0.4459;0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} +0.2997 \\ -0.0461 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0.4298 \\ 0.4459 \end{bmatrix} e(k).$$

Výstup soustavy

$$y(k) = x_1(k); D = 0;$$

Počáteční vektor stavu

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

Konec příkladu 5.6

Funkce **compare** **Porovná výstup modelu s měřením.**

Syntaxe funkce

compare(z, th) (5 – 9)

kde jsou **z** matice výstupních - vstupních dat, **z=[y u]**
th matice "theta model"

Použití tohoto příkazu je ukázáno v Př.5.8.

Funkce **armax** **Odhad parametrů ARMAX modelu**

Diferenční rovnici ARMAX modelu v prostředí MATLABu vyjádříme:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t - nk) + C(q)e(t),$$

kde je
- $y(t)$ diskrétní výstupní veličina a $t = k$ je diskrétní čas,
- $u(t - nk)$ diskrétní vstupní veličina,
- nk kladné celé číslo charakterizující diskrétní dopravní zpoždění jako celočíselný násobek periody vzorkování
- $e(t)$ diskrétní šumový signál,
- $A(q)$ polynom stupně $\partial A = na,\ q=z^{-1},\ A(q) = 1 + a_1 q^1 + ... + a_{na} q^{na}$,
- $B(q)$ polynom stupně $\partial B = m = nb - 1;\ B(q) = b_0 + b_1 q^1 + ... + b_m q^m$,
- $C(q)$ polynom stupně $\partial C = nc,\ q=z^{-1},\ C(q) = 1 + c_1 q^1 + ... + c_{nc} q^{nc}$,

Příkaz pro výpočet parametrů ARMAX modelu

th = armax (z, nn), (5 – 10)

kde je
- **th** datová struktura - matice obsahující ve **3. řádku vektor parametrů**
- **z = [y u]**; matice výstupních - vstupních dat, **y**, **u** sloupcové vektory
- **nn** jednořádková matice se třemi sloupci, **nn = [na nb nc nk]**

```
» thr=armax(z,[2 2 2 1]);
» thr=sett(thr,0.2);
» present(thr)
This matrix was created by the command ARMAX  on 9/5 2001 at 14:37
Loss fcn: 0.0089211   Akaike`s FPE: 0.010048 Sampling interval 0.2
The polynomial coefficients and their standard deviations are

B =

         0    0.0470    0.0242
         0    0.0252    0.0376


A =

    1.0000   -1.6127    0.6483
         0    0.0623    0.0558


C =

    1.0000   -1.6779    0.6880
         0    0.0926    0.0916

» |
```

Obr.5.11 *Výpočet koeficientů ARMAX modelu z příkazového řádku*

Př.5.7

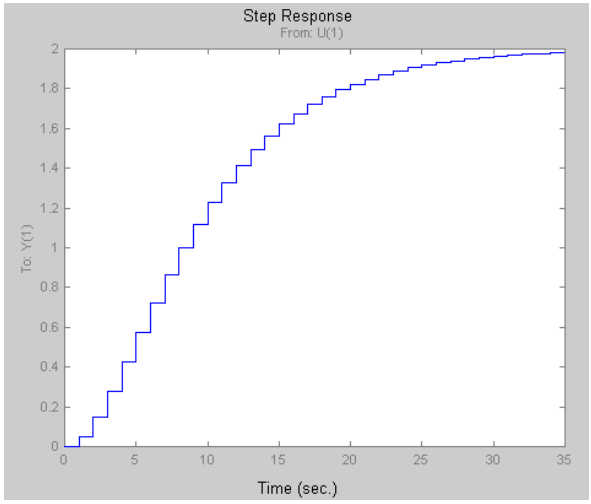
Vypočtěte parametry ARMAX modelu ze souboru měření Př.5.6.
a) Zvolte soustavu 2. řádu. Jednořádkovou matici **nn** tvoří prvky **nn** = [2 2 2 1]
b) Spočtěte a nakreslete diskrétní přechodové funkce *y/u* a *y/e*

Řešení:

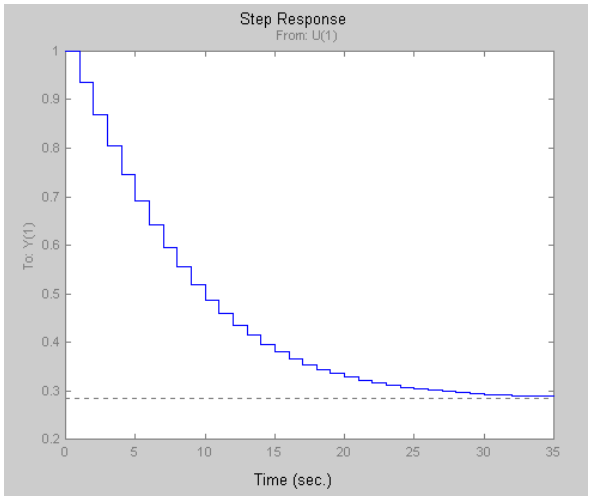
a) Výpočet koeficientů, příkaz sett a present zadané z příkazového řádku jsou na obr.5.11.
b) Transformace matice **thr** na polynomy *Ad, Bd, Cd, Dd, Fd* a příkazy dstep pro výpočet diskrétních přechodových funkcí jsou na obr.5.12. Přechodové funkce jsou na obr.5.13,14.

```
» [Ad,Bd,Cd,Dd,Fd,Lan]=th2poly(thr)

Ad =

    1.0000   -1.6127    0.6483

Bd =

         0    0.0470    0.0242

Cd =

    1.0000   -1.6779    0.6880

Dd =

     1

Fd =

     1

Lan =

    0.0089

» dstep(Bd,Ad)
» dstep(Cd,Ad)
»
```

Obr.5.12 *Výpočet polynomů A,B,C*



Obr.5.13 *Diskrétní přechodová funkce y/u*



Obr.5.14 *Diskrétní přechodová funkce y/e*

Poznámka: Jak již bylo řečeno, příkaz th2poly může býti zapsán zkráceně

[Ad, Bd, Cd] = th2poly(thr).

Konec příkladu 5.7

Pro posouzení vlastností odhadů je významná chyba rovnice dle (3 – 8). Tuto chybu učíme pomocí funkce **resid**.

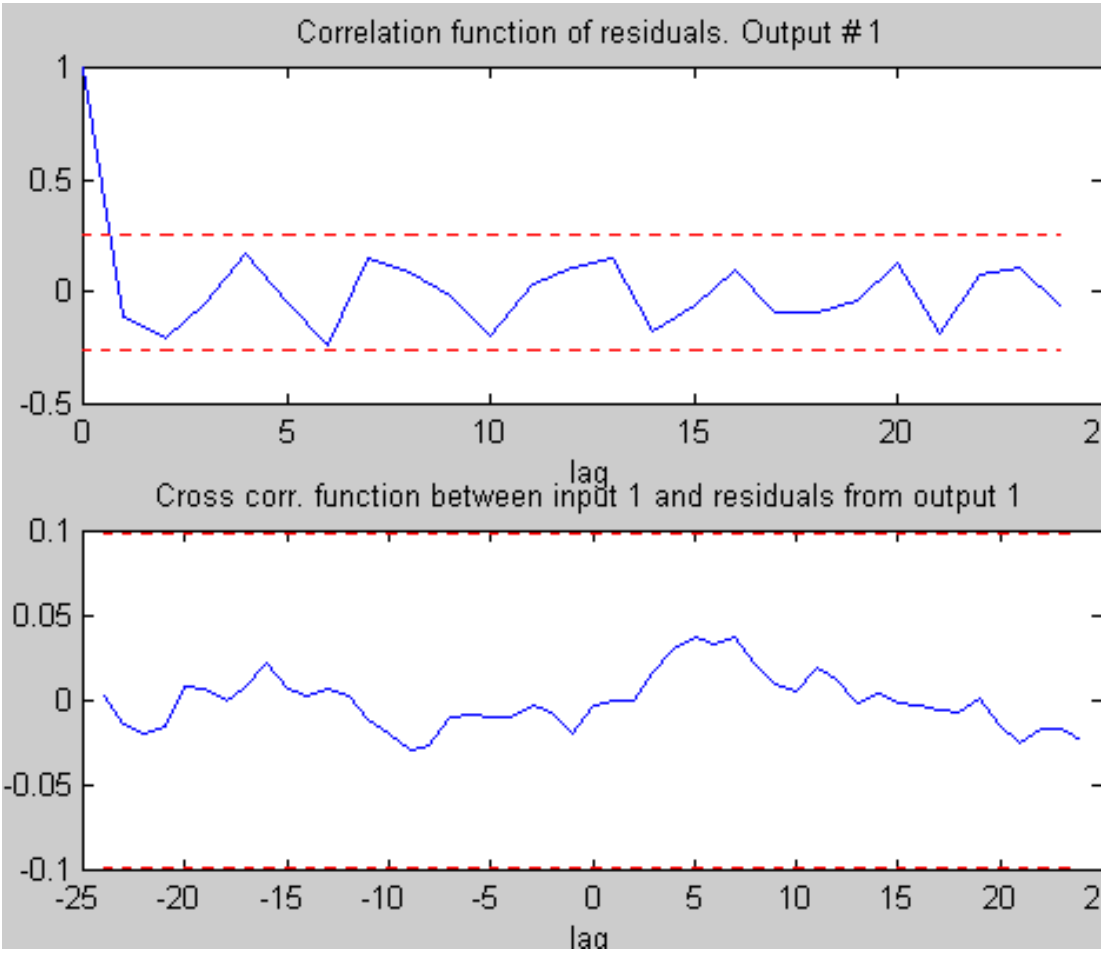
Funkce resid **Vypočte a testuje chybu modelu.**

Syntaxe funkce

[e,r] = resid (z,th), (5 – 11)

kde je **z = [y u]**; matice výstupních - vstupních dat, **y**, **u** sloupcové vektory
th matice (theta model)
e vektor chyb predikce
r korelační funkce

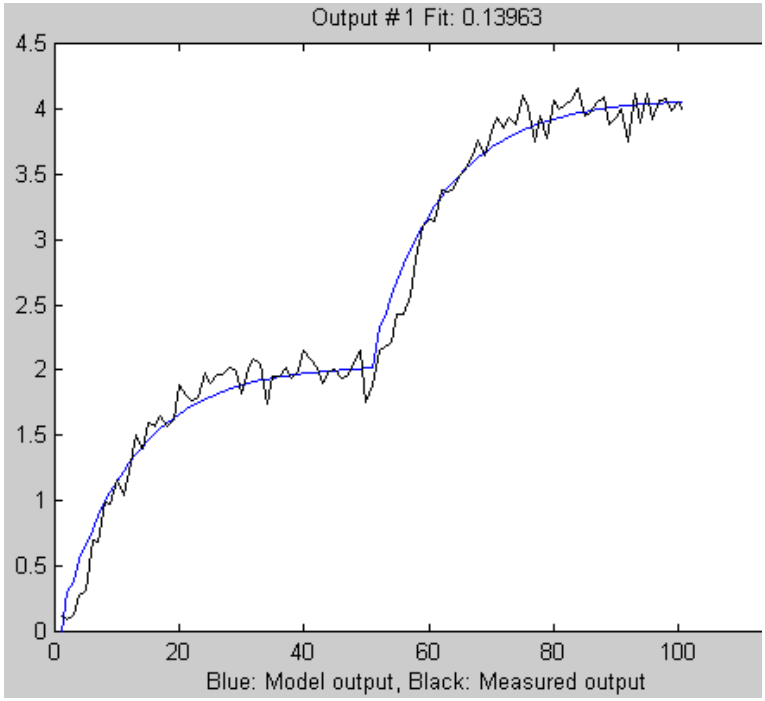
Př.5.8 Na datech z Př.5.6 ověřte příkazy **resid** a **compare**. Zadané funkce z příkazového řádku jsou na obr.5.16. Průběh autokovariační funkce chyby a vzájemné kovariační funkce vstupu a chyb odhadu je na obr.5.15. Výsledkem činnosti funkce compare je graf výstupu z modelu a změřeného výstupu soustavy viz obr.5.17.



. Obr.5.15 *Autokovariační funkce r_e a vzájemná kovariační funkce r_{eu}*

```
»
» [e,r]=resid(z,th);
» compare(z,th);
» |
```

Obr.5.16 *Příkazy*



Konec příkladu 5.8

Obr.5.17 *Porovnání měřeného výstupu soustavy a modelu*

7 LITERATURA

[1] NOSKIEVIČ, P.: Modelování a identifikace systémů, MONTANEX a.s., 1999.
[2] SOUKUP, J.: Identifikace soustav, Skripta ČVUT, Praha1998.
[3] HANUŠ, B., OLEHLA, M., MODRLÁK, O.: Číslicová regulace technologických procesů. VUT Brno,VUTIUM 2000.
[5 DRÁBEK, O., MACHÁČEK, J.: Experimentální identifikace, Skripta VŠCHT Pardubice 1987.
[6] LJUNG, L.: System Identification. *Theory for the User*. Prentice - Hall, Inc. Upper Saddle River, New Jersey,1999.
[7] FRANKLIN, F. G., POWEL,J. D., WORKMAN, L. M.: Digital Control of Dynamic Systems. Addison Wesley Longman, Inc. Third edition, 2003.