TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Hálkova 6, 461 17 Liberec 1, CZ

Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií

Teorie automatického řízení II.

Z-TRANSFORMACE

Studijní materiály

Doc. Ing. Osvald Modrlák, CSc.

Katedra řídicí techniky

Obsah

1. Z-TRANSFORMACE

Laplaceova transformace je významným matematickým aparátem při řešení lineárních úloh z oblasti spojité automatické regulace. Umožňuje analýzu spojitých regulačních obvodů a návrh optimálních parametrů typu PID.

Diskretizací spojitých procesů v důsledku zavádění číslicových prvků do řízení a regulace roste význam Z-transformace. Její matematický aparát zjednodušuje řešení lineárních diferenčních rovnic a umožňuje popisovat dynamické děje diskretizovaných procesů v takovém tvaru, kterého je možno s výhodou využít při návrhu algoritmu řízení podle celé řady kritérií jakosti řízení. Z-transformace vychází z Laplaceovy transformace posloupnosti časově posunutých Diracových impulsů, jejichž jednotková plocha je modulována funkčními hodnotami funkce $y(kT)$. Při vzorkování (diskretizaci) spojité funkce $y(t)$ v okamžicích $t = kT$, pro $k \geq 0$ vzniká posloupnost čísel

$$\{y_k\} = \{y_k\}_{k=0}^{\infty} = \{y_0, y_1, y_2, \ldots\},$$

nebo Diracových impulsů ve tvaru řady

$$y^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)\delta(t-kT),$$

kde T je **perioda vzorkování**, ($\delta\ (t - kT)$) je posloupnost časově posunutých Diracových impulsů. Laplaceův obraz této řady je komplexní funkce

$$y^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)e^{-kTs} .$$

Zavedením nové komplexní proměnné $z = e^{sT}$, získáme definiční vztah Z-transformace

$$\boxed{Z\{y(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k}}. \qquad \text{(P1 – 1)}$$

Z-obraz $Z\{y(kT)\}$ je funkce komplexní proměnné z^{-1} (dle definice) nebo po úpravě proměnné z. Obrazem posloupnosti $\{y_k\}$ v Z-transformaci nazýváme funkci komplexní proměnné

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k} = Z\{y_k\}. \qquad \text{(P1 – 1a)}$$

Diskrétní hodnoty funkce $y(kT)$ nebo posloupnosti $\{y_k\}$ nazýváme **předmětem (originálem)**, funkci $Y(z)$ **obrazem** a Z je symbol transformace.

Věta o existenci obrazu

Z-obraz diskrétních hodnot funkce *y(kT)* nebo posloupnosti $\{y_k\}$ existuje tehdy a jen tehdy, jestliže existují kladné konečné konstanty *M*, Φ takové, že pro všechna $k \geq 0$ platí

$$|y(kT)| \leq M\Phi^k, \; |y_k| \leq M\Phi^k. \qquad \text{(P1 – 2)}$$

Podmínku $y(kT) = 0$ pro $k < 0$ můžeme též vyjádřit součinem $y(kT)\eta(t)$ kde $\eta(t)$ je diskrétní jednotková skoková funkce, pro kterou platí

$$\eta(kT) = \begin{matrix} 1 \text{ pro } k \geq 0 \\ 0 \text{ pro } k < 0 \end{matrix}.$$

Poznámka 1

Na rozdíl od Laplaceovy transformace, pro jejíž existenci jsou zformulovány pouze podmínky postačující, představuje v Z-transformaci podmínka (P1-2) podmínku nutnou a postačující.

Funkce či posloupnosti splňující podmínku (P1-2) nazýváme funkcemi či posloupnostmi exponenciálního řádu. Obraz Y(z) je analytická funkce pro $|z| > R$*. Y(z) je analytická i v bodě* $z = \infty$ *a řada (P1-1) konverguje absolutně a stejnoměrně na množině komplexních čísel* $|z| > R$*. Číslo R se nazývá poloměr konvergence.*

Konec poznámky 1

Poznámka 2

Dle definičního vztahu (P1-1, P1-1a) je Z-obraz komplexní funkce proměnné z^{-1}*. Zapisování funkcí komplexně proměnné* z^{-1} *je však v důsledku záporných exponentů příliš zdlouhavé a pracné, přičemž ale tyto obrazy (s proměnnou* z^{-1}*) poskytují při analýze a syntéze řadu výhod. Proto, aby se zjednodušil zápis, zavádí se rovností*

$$q = z^{-1} \qquad \textit{(P1 – 3)}$$

formální nová komplexní proměnná q. Definiční vztah (P1-1) pak může být vyjádřen

$$Y(q) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) q^k. \qquad \textit{(P1 – 4)}$$

Nejedná se v žádném případě o novou transformaci, ale pouze o formální zavedení komplexní proměnné q vztahem (P1-3). Všechny Z-obrazy je pak možno formálně zapsat pomocí proměnné q.

Konec poznámky 2

Příklad P1 – 1 Určete Z-obraz posloupnosti $\{y_k\} = \{1, 1, 1, ...\}$ (diskrétní jednotková funkce $\eta(kT)$).

Řešení

$$Y(z) = 1z^0 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + z^{-3} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}.$$

Komplexní funkci *Y(z)* tvoří součet geometrické řady s kvocientem $q = z^{-1}$, jestliže $|z^{-1}| < 1$, pak

$$Y(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}. \qquad \text{(P1 – 5)}$$

Poloměr konvergence $R = 1$.

□ Konec příkladu.

Příklad P1 – 2 Určete Z-obraz diskrétní funkce $y(kT) = e^{\alpha kT}\eta(kT)$.
Řešení

$$Y(z)=\sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha kT} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{\alpha T}/z\right)^{k}.$$

Řada $\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{\alpha T}/z\right)^{k}$ je geometrická řada s kvocientem $(e^{\alpha T}z^{-1})$. Jestliže $|\, e^{\alpha T}z^{-1}| < 1$ pak součet je konečný a platí

$$Y(z)=Z\left(e^{\alpha kT}\eta(kT)\right)=\frac{1}{1-e^{\alpha T}z^{-1}}=\frac{z}{z-e^{\alpha T}}. \qquad \text{(P1 – 6)}$$

Poloměr konvergence $R = e^{\alpha T}$.

□ Konec příkladu.

Základní pravidla a vlastnosti Z-transformace

Tak jako o Laplaceově transformaci tak i o Z-transformaci platí řada vět obecné povahy, které nám usnadňují praktické použití tohoto aparátu, bez něhož by řešení některých technických úloh analýzy a syntézy diskrétních řídících systémů bylo podstatně složitější (řešení diferenčních rovnic, určování kvadratického kritéria jakosti regulace atd.). Uvedeme zde (bez důkazu) souhrn vlastností ve formě vět tak, aby je bylo možno bezprostředně využít při řešení probíraných příkladů.

1. Věta o linearitě

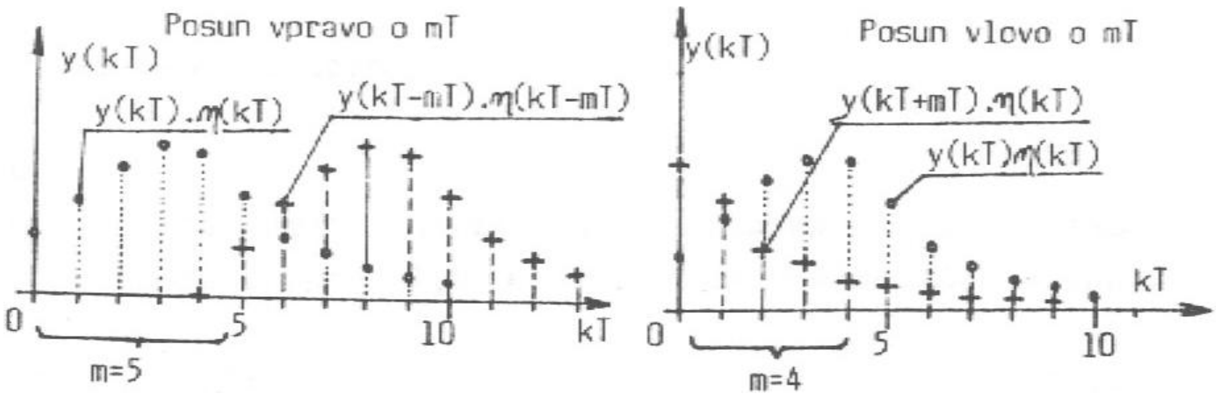
Nechť $Z\{y_1(kT)\} = Y_1(z)$; $Z\{y_2(kT)\} = Y_2(z)$ a c_1, c_2 jsou konstanty. Potom platí

$$\boxed{Z\{c_1y_1(kT)+c_2y_2(kT)\}=c_1Y_1(z)+c_2Y_2(z)}. \qquad \text{(P1 – 7)}$$

Větu lze rozšířit na jakýkoliv počet sčítanců.

2. Věta o posunutí v originále

Posun vpravo viz obr. P1 – 1: Nechť $Z\{y(kT)\} = Y(z)$, $y(kT) = 0$ pro $k < 0$.



Budiž $m \geq 0$ celé číslo. Potom platí

$$\boxed{Z\{y(kT-mT)\} = Z\{y(kT-mT)\eta(kT-mT)\} = z^{-m}Y(z)}. \qquad \text{(P1 – 8)}$$

Posun vlevo viz obr. P1 – 2:

$$\boxed{Z\{y(kT+mT)\} = z^{m}\left[Y(z) - \sum_{v=0}^{m-1} y(vT)z^{-v}\right]} \qquad \text{(P1 – 9)}$$

3. Věta o substituci v obraze (Věta o tlumení)

Nechť $Z\{y(kT)\} = Y(z)$. Potom diskrétní funkce $y_1(kT) = e^{\alpha kT}y(kT)$ má obraz $Y_1(z) = Y(z/e^{\alpha T})$. Zpravidla píšeme

$$\boxed{Z\{e^{\alpha kT}y(kT)\eta(kT)\} = Y\left(z/e^{\alpha T}\right)}. \qquad \text{(P1 – 10)}$$

Obdobě platí

$$\boxed{Z\{a^{kT}y(kT)\eta(kT)\} = Y\left(z/a^{T}\right)}. \qquad \text{(P1 – 11)}$$

4. Věta o derivaci obrazu

Nechť $Z\{y(kT)\} = Y(z)$. Potom diskrétní funkce $y_1(kT) = (kT)y(kT)\eta(kT)$ má obraz $Y_1(z) = -Tz\dfrac{d}{dy}Y(z)$. Zpravidla píšeme

$$\boxed{Z\{kT\,y(kT)\eta(kT)\} = -Tz\frac{d}{dy}Y(z)}. \qquad \text{(P1 – 12)}$$

Jejím vícenásobným použitím je možno získat obrazy diskrétní funkce

$$y_a(kT) = (kT)^n y(kT)\,\eta(kT).$$

Tak např. pro $n = 2$ platí

$$\boxed{Z\left\{(kT)^2 y(kT)\eta(kT)\right\} = -Tz\frac{d}{dz}\left[-Tz\frac{d}{dz}Y(z)\right]}. \tag{P1 – 13}$$

5. Věta o obrazu diference

a) dopředná diference

Nechť $Z\{y(kT)\} = Y(z)$ a nechť dopřednou diferenci $\Delta y(kT)$ definujeme rovností

$\Delta y(kT) = y(kT+T) - y(kT)$.

Jejím n-násobným použitím lze získat n-tou diferenci ve tvaru

$$\Delta^n y(kT) = \Delta\left[\Delta^{n-1} y(kT)\right] = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}y(kT+jT).$$

Potom platí

$$Z\{\Delta y(kT)\} = Z\{y(kT+T) - y(kT)\} = (z-1)Y(z) - zy(0), \tag{P1 – 14}$$

$$Z\left\{\Delta^n y(kT)\right\} = Z\left\{\Delta\left[\Delta^{n-1} y(kT)\right]\right\} = Z\left\{\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}y(kT-jT)\right\}$$

$$\boxed{Z\{\Delta y(kT)\} = (z-1)^n Y(z) - z\sum_{j=0}^{n-1}(z-1)^{n-j-1}\Delta^j y(0)}, \tag{P1 – 15}$$

pro $j = 0$ je $\Delta^0 y(0) = y(0)$.

b) zpětná diference

Nechť $Z\{y(kT)\} = Y(z)$ a nechť zpětná diference $\Delta y(kT)$ je definována rovností

$\nabla y(kT) = y(kT) - y[(k-1)T]$.

Jejím n-násobným použitím lze získat n-tou diferenci

$$\nabla^n y(kT) = \nabla\left[\nabla^{n-1} y(kT)\right] = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}\binom{n}{j}y[(k-i)T]. \tag{P1 – 16}$$

Z-obrazy zpětných diferencí jsou

$$Z\{\nabla y(kT)\} = Z\{y(kT)\} - Z\{y[(k-1)T]\} = \frac{z-1}{z}Y(z) - y(-1)$$

$$\boxed{Z\left\{\nabla^n y(kT)\right\} = Z\left\{\nabla\left[\nabla^{n-1} y(kT)\right]\right\} = \left(\frac{z-1}{z}\right)^n Y(z) - \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{z-1}{z}\right)^j \nabla^{n-1-j} y(-1)} \tag{P1 – 17}$$

pro $j = 0$ je $\nabla^0 y(/1) = y(-1)$.

Příklad P1 – 3 Určete Z-obraz druhé (dopřed.) diferen. fun. $y(kT)=e^{\alpha kT}\eta(kT)=\dfrac{z}{z-e^{\alpha T}}$.

Řešení

$$Z\{\Delta^2 y(kT)\}=(z-1)^2Y(z)-z\sum_{j=0}^{1}(z-1)^{1-j}\Delta^j y(0)=(z-1)^2Y(z)-z(z-1)\Delta y(0)-zy(0);$$

$$\Delta y(0)=y(T)-y(0)=e^{\alpha T}-1,\ Z\{\Delta^2(e^{kT})\}=(z-1)^2\frac{z}{z-e^{\alpha T}}-z(z-1)(e^{\alpha T}-1)-z.$$

□ Konec příkladu.

6. Věta o obrazu konvoluce

Nechť *g(kT)* je diskrétní váhová funkce a existuje *Z{g(kT)}* = *G(z)*, *Z{u(kT)}* = *U(z)*. Potom diskrétní funkce

$$y(kT)=\sum_{j=0}^{k}u(jT)g(kT-jT)=\sum_{j=0}^{k}g(jT)u(kT-jT)$$ má obraz *Y(z)* a platí

$$\boxed{Y(z)=Z\left\{\sum_{j=0}^{k}(jT)g(kT-jT)\right\}=Z\left\{\sum_{j=0}^{k}g(jT)u(kT-jT)\right\}=G(z)U(z)}, \qquad \text{(P1 – 18)}$$

7. Věta o obrazu posloupnosti částečných součtů

Nechť *Z{y(kT)}* = *Y(z)*, pak i posloupnost částečných součtů

$$y_1[(k-1)T]=\sum_{j=0}^{k-1}y(jT),\ \text{pro } k = 1, 2, 3, \ldots \qquad \text{(P1 – 19)}$$

má Z-obraz a platí

$$Z\left\{\sum_{j=0}^{k-1}y(jT)\right\}=\frac{1}{z-1}Y(z). \qquad \text{(P1 – 20)}$$

Pro Z-obraz úplného součtu včetně diskrétní hodnoty *y(kT)* platí

$$\boxed{Z\{y_1(kT)\}=Z\left\{\sum_{j=0}^{k}y(jT)\right\}=\frac{z}{z-1}Y(z)}. \qquad \text{(P1 – 21)}$$

8. Věta o součtu funkčních hodnot

Nechť *Z{y(kT)}* = *Y(z)* pro všechna |*z*| >*1* (poloměr konvergence *R* = *1*) a nechť $\sum_{k=0}^{\infty}y(kT)<\infty$ (řada $\sum_{k=0}^{\infty}y(kT)$ konverguje), pak existuje $\lim_{z\to\infty}Y(z)$ a platí

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} y(kT) = \lim_{\substack{z,\,\text{reálná} \\ z\to 1+}} Y(z)}. \qquad (P1-22)$$

9. Věta o obrazu součinu

Nechť $Z\{y_1(kT)\} = Y_1(z)$, $Z\{y_2(kT)\} = Y_2(z)$ s poloměrem konvergence po řadě $R_1 > 0$, $R_2 > 0$. Potom diskrétní funkce $y_1(kT)y_2(kT)$ má obraz $Y(z)$ a platí

$$\boxed{Z\{y(kT)\} = Z\{y_1(kT)y_2(kT)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_C Y_1(\xi)Y_2\left(\frac{z}{\xi}\right)\frac{d\xi}{\xi}}. \qquad (P1-23)$$

Integruje se po kružnici C dané $\xi = \rho e^{i\varphi}$, $R_1 < \rho < |z|$, $|z| > max(R_1, R_2)$, $0 < \varphi < 2\pi$.

Poznámka 3

Integrál (P1-23) se vypočítá pomocí reziduové věty. Platí

$$Z\{y(kT)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_C Y_1(\xi)Y_2\left(\frac{z}{\xi}\right)\frac{d\xi}{\xi} = \sum_i \underset{\xi_i}{res}\left\{Y_1(\xi)Y_2\left(\frac{z}{\xi}\right)\frac{1}{\xi}\right\} =$$

$$= \sum_j \underset{(z/\xi)_j}{res}\left\{Y_1(\xi)Y_2\left(\frac{z}{\xi}\right)\frac{1}{\xi}\right\}, \qquad (P1-24)$$

kde ξ_i jsou izolované singulární body (póly) funkce $Y_1(\xi)$ a $(z/\xi)_j$ jsou izolované singulární body (póly) funkce $Y_2(z/\xi)$. Připomeňme některé základní věty o reziduích a jejich výpočtu.

1. *Věta o výpočtu rezidua v s-násobném pólu*

   Nechť bod z_0 je s-násobným pólem funkce $Y(z)$. Pak platí

$$\underset{z_0}{res}\,Y(z) = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}\left[(z-z_0)^s Y(z)\right]\right\}, \text{ a pro } z_0 = \infty$$

$$\underset{\infty}{res}\,Y(z) = \frac{(-1)^s}{(s-1)!}\lim_{z\to\infty}\left[z^{s+2}\frac{d^{s+1}}{dz^{s+1}}Y(z)\right].$$

2. *Věta o výpočtu rezidua součinu funkcí*

   Nechť funkce $F(z)$ je analytická v bodě $z_0 \neq \infty$ a nechť funkce $G(z)$ má v bodě z_0 jednoduchý pól. Pak

$$\underset{z_0}{res}[F(z)G(z)] = F(z_0)\underset{z_0}{res}\,G(z).$$

3. *Věta o výpočtu rezidua podílu funkcí*

   Nechť $G(z)$, $F(z)$ jsou analytické funkce v bodě $z_0 \neq \infty$. Nechť dále $G(z_0) = 0$, $F(z_0) = 0$, $F'(z_0) \neq 0$ (tj. z_0 je jednoduchým nulovým bodem funkce $F(z)$. Pak platí

$$\underset{z_0}{res}\left[\frac{G(z)}{F(z)}\right] = \frac{G(z_0)}{F'(z_0)}, \text{ kde } F'(z_0) = \frac{d}{dz}F(z)\bigg|_{z=z_0}.$$

Konec poznámky 3.

Příklad P1 – 4 Určete Z-obraz diskrétní funkce $y(kT) = y_1(kT).y_2(kT) = (kT).a^{kT}$ pomocí věty o Z-obrazu součinu. Z-obraz funkce $y_1(kT) = kT$ a $y_2(kT) = a^{kT}$ určíme z tabulky a jsou rovny

$$Z\{(kT)\} = T\frac{z}{(z-1)^2}\,,\; Z\{a^{kT}\} = \frac{z}{z-a^T}\,.$$

Z-obraz součinu dvou funkcí je roven

$$Z\{y(kT)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_C T\xi\frac{\xi}{(\xi-1)^2}\frac{z/\xi}{z/\xi - a^T}\frac{1}{\xi}d\xi$$

Hodnotu integrálu určíme podle reziduové věty o součinu dvou funkcí (s využitím věty o výpočtu rezidua v s-násobném pólu). Pro $\xi_1 = \xi_2 = 1$ platí

$$Z\{y(kT)\} = \operatorname*{res}_{\xi}\left[T\frac{1}{(\xi-1)^2}\frac{z/\xi}{z/\xi - a^T}\right] = \lim_{\xi\to 1}\frac{d}{d\xi}\left[(\xi-1)^2\frac{T}{(\xi-1)^2}\frac{z/\xi}{\left(z/\xi - a^T\right)}\right] =$$
$$= T\frac{za^T}{\left(z-a^T\right)^2}\,.$$

□ Konec příkladu.

Přesvědčete se o správnosti výsledku tak, že použijete větu o tlumení (P1 – 10). Věta o obrazu součinu vyjádřená vzorci (P1 – 23), (P1 – 24) nachází též uplatnění při syntéze algoritmu řízení. Umožňuje vyjádřit hodnotu kvadratického kritéria jakosti řízení na základě Z-obrazu regulační odchylky či výstupní veličiny. Ke zjednodušení úlohy syntézy přispívá též zavedení pojmu skalárního součinu v M, kde M je vektorový prostor racionálních funkcí (Z-obrazů). Předpokládejme, že

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_1(kT)y_2(kT) < \infty \qquad \text{(P1 – 25)}$$

a že existuje obraz $Z\{y_1(kT)\} = Y_1(z)$, $Z\{y_2(kT)\} = Y_2(z)$. Pak je možno využít věty o součtu funkčních hodnot a platí

$$Z\left\{\sum_{k=0}^{\infty} y_1(kT)y_2(kT)\right\} = \lim_{\substack{z \text{ reálné} \\ z\to 1+}} Z\{y_1(kT)y_2(kT)\} = \lim_{z\to 1+}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} Y_1(q)Y_2\left(\frac{z}{q}\right)\frac{dq}{q} =$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} Y_1(q)Y_2\left(\frac{1}{q}\right)\frac{dq}{q}\,,$$

kde C_1 je kladně orientovaná jednotková kružnice; $Y_1(q)$, $Y_2(1/q)$ jsou racionální lomené funkce komplexní proměnné q. Skalární součin v M je pak definován výrazem

$$\langle Y_1, Y_2\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} Y_1(q)Y_2\left(\frac{1}{q}\right)\frac{dq}{q} = \sum_{k=0}^{\infty} y_1(kT)y_2(kT)\,. \qquad \text{(P1 – 26)}$$

Příklad P1 – 5 Určete součet řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} y(kT) = \sum_{k=0}^{\infty} y_1(kT) y_2(kT) = \sum_{k=0}^{\infty} (kT) a^{kT} = Ta^T + 2Ta^{2T} + 3Ta^{3T} + \ldots$$

Součet řady existuje pro $|a| < 1$. Z-obrazy $y_1(kT)$ a $y_2(kT)$ jsou

$$Y_1(z) = T\frac{z}{(z-1)^2}, \; Y_2(z) = \frac{za^T}{z-a^T}.$$

Podle (P1 – 26) platí

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_1(kT) y_2(kT) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} Y_1(q) Y_2\left(\frac{1}{q}\right)\frac{dq}{q} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} T\frac{q}{(q-1)^2}\frac{1/qa^T}{1/q-a^T}\frac{dq}{q}.$$

Integrál určíme pomocí reziduové věty [Vybereme-li pól $(1/q) = a^T$] pak platí

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_1(kT) y_2(kT) = \underset{a^T}{res}\{Y_1(q) Y_2(1/q)/q\} = Y_1(a^T)\underset{a^T}{res}\{Y_2(1/q)\} =$$

$$T\frac{1}{(a^T-1)^2}\lim_{1/q\to a^T}\left[(1/q-a^T)\frac{1/q.a^T}{(1/q-a^T)}\right] = T\frac{a^{2T}}{(a^T-1)^2}$$. pro $|a| < 1$.

□ Konec příkladu.

Budiž připomenuto, že integrál (P1 – 26) existuje, i když není splněna podmínka (P1 – 25), pak ale neplatí, že je roven součtu součinů diskrétních hodnot.

10. Věta o součtu dvojmoci diskrétních hodnot

Nechť $y(kT)$ je diskrétní funkce a nechť splňuje podmínku (P1-25), jejíž obraz $Z\{y(kT)\} = y(0) + y(T)z^{-1} + y(2T)z^{-2} + \ldots = Y(z)$. Označíme-li $\overline{Y}(z) = y(0) + y(T)z + y(2T)z^2 + \ldots$, kde pruhem značíme sdružený polynom, pak platí

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} y(kT)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} Y_1(z) Y_2\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z} = \langle Y_1, Y_2\rangle = \|Y\|^2}, \qquad \text{(P1 – 27)}$$

kde $||Y||$ je norma funkce $Y = Y(z)$.

Příklad P1 – 6 Určete $\sum_{k=0}^{\infty} y(kT)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\left[(kT)a^{kT}\right]^2$.

Z-obraz funkce $y(kT)$ byl vypočten v Př. P1-4 a je roven $Y(z) = T\frac{za^T}{(z-a^T)^2}$. Podle věty o součtu dvojmoci diskrétních hodnot platí

$$\sum_{k=0}^{\infty} y(kT)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} Y_1(z) Y_2\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} T\frac{za^T}{(z-a^T)^2}\frac{1/z.a^T}{(1/z-a^T)^2 z}dz.$$

Integrál vypočteme pomocí reziduové věty ($z_1 = z_2 = a^T$). Platí

$$\sum_{k=0}^{\infty} y(kT)^2 = \underset{a^T}{res}\left[\frac{a^{2T}}{z(z-a^T)^2(1/z-a^T)^2}\right] = \lim_{z\to a^T}\frac{d}{dz}\left[(z-a^T)^2\frac{a^{2T}}{z(z-a^T)(1/z-a^T)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z\to a^T}\frac{d}{dz}\left[\frac{a^{2T}z}{(1-za^T)^2}\right] = a^{2T}\lim_{z\to a^T}\frac{1+za^T}{(1+za^T)^3} = \frac{a^{2T}(1+a^{2T})}{(1+a^{2T})^3}.$$

□ Konec příkladu.

11. Věta o derivaci obrazu podle reálného parametru

Nechť funkce *y(t, α)* má *n*-tou spojitou parciální derivaci podle parametru α a pro každé $\alpha \in (a,b)$ a pro každé existuje obraz *Y(z, α)* pro *t = kT*. Potom

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}Y(z,\alpha) = Z\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}y(t,\alpha)\right). \qquad (P1-28)$$

Obecně platí

$$\boxed{\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}Y(z,\alpha) = Z\left(\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}y(t,\alpha)\right)}. \qquad (P1-29)$$

12. Věta o počáteční hodnotě

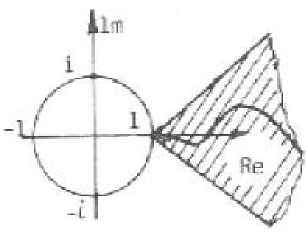
Nechť *Z{y(kT)} = Y(z)*. Potom platí

$$\boxed{y(0) = \lim_{k\to 0} y(kT) = \lim_{z\to\infty} Y(z)}. \qquad (P1-30)$$

13. Věta o konečné hodnotě

Nechť *Z{y(kT)} = Y(z)* s poloměrem konvergence $R \le 1$ a nechť existuje konečná limita $\lim_{k\to\infty} y(kT)$, potom platí

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} y(kT) = \lim_{\substack{z \text{ reálné} \\ z\to 1+}} (z-1)Y(z)} \qquad (P1-31)$$



2. ZPĚTNÁ Z-TRANSFORMACE

Zpětnou Z-transformací rozumíme úlohu nalézt k danému Z-obrazu (funkce *Y(z)* komplexní proměnné *z*) předmět – diskrétní funkci *y(kT)* nebo posloupnost y_k tak, aby *Z{y(kT)} = Y(z)* nebo *Z*$\{y_k\}$ *= Y(z)*. Podmínky existence zpětné transformace a její definiční vztahy je možno zformulovat do následující věty.

13. **Věta o zpětné Z-transformaci**

Funkce komplexní proměnné *Y(z)* je obrazem jisté diskrétní funkce či posloupnosti tehdy a jen tehdy, je-li analytická v bodě ∞. Předmět, jehož je obrazem, je potom určen jednoznačně a tvoří ho posloupnost koeficientů Laurentova rozvoje analytické funkce *Y(z)* v okolí bodu ∞. Diskrétní hodnoty předmětu pak určíme pomocí reziduové věty z výrazu

$$\boxed{y(kT)=\frac{1}{2\pi i}\int_C z^{k-1}Y(z)dz=\sum_j \underset{zj}{res}\left(z^{k-1}Y(z)\right)} \qquad (P1-32)$$

kde C: $z=\rho e^{i\varphi}$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $\rho > R$. Součtem reziduí na pravé straně se rozumí součet reziduí ve všech (izolovaných) singulárních bodech, které funkce $z^{k-1}F(z)$ má.

Příklad P1 – 7 Určete z definice zpětné Z-transformace předmět k obrazu $Y(z)=\dfrac{z}{(z-D)^s}$.

Řešení
Z-obraz *Y(z)* má jeden p-násobný pól $z_1 = D$.
Podle věty o zpětné transformaci platí

$$y_k=\frac{1}{2\pi i}\int_C z^{k-1}Y(z)dz=\underset{D}{res}\left(z^{k-1}Y(z)\right)=\lim_{z\to D}\frac{1}{(p-1)!}\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\left[(z-D)^p\frac{z^k}{(z-D)^p}\right]=$$
$$=\frac{1}{(p-1)!}\lim_{z\to D}\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\left[z^k\right]$$

Postupně dostaneme pro

1) $p = 1$; $y_k = D^k\eta(k)$,
2) $p = 2$; $y_k=\dfrac{1}{1!}\lim\limits_{z\to D}\dfrac{d}{dz}\left(z^k\right)=\dfrac{kD^{k-1}}{1!}=k\dfrac{D^k}{D}\eta(k-1)$,
3) $p = 3$; $y_k=\dfrac{1}{2!}\lim\limits_{z\to D}\dfrac{d^2}{dz^2}\left(z^k\right)=\dfrac{k(k-1)D^{k-2}}{2!}=\dfrac{k(k-1)}{2!}\dfrac{D^k}{D^2}\eta(k-2)$
4) Pro obecné $p > 1$ platí
$$y_k=\frac{1}{(p-1)!}\lim_{z\to D}\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\left(z^k\right)=\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-p+2)}{1.2.3\ldots(p-1)}D^{k-p+1}=\binom{k}{p-1}\frac{D^k}{D^{p-1}}\eta(k-p+1).$$

□ Konec příkladu

Poznámka 4
Pro k = 0 je výhodnější použít věty o počáteční hodnotě a vzorce (P1-30). Koeficienty Laurentova rozvoje v okolí bodu ∞ je možno stanovit derivováním a platí

$$y_k=\frac{(-1)^k}{k!}\lim_{z\to\infty}\left[z^{k+1}\frac{d^k}{dz^k}\left(z^{k-1}F(z)\right)\right]. \qquad (P1-33)$$

Konec poznámky 4

Jestliže obraz *Y(z)* je racionální lomená funkce, pak předmět *y(kT)*, y_k je možno určit

1) metodou rozkladu na parciální zlomky
2) rozvojem polynomiálního zlomku (nekonečným dělením),
3) rekurentní formulí – Pierceovým algoritmem.

1) Zpětná transformace metodou rozkladu na parciální zlomky

Základní myšlenka tohoto postupu určení zpětné transformace, podobně jako u Laplaceovy transformace, spočívá v tom, že racionálně lomenou funkci *Y(z)* po jednoduché úpravě rozložíme na součet parciálních zlomků. Tyto pak již snadno převedeme do předmětu. Pro kořeny reálné různé z_j a kořeny reálné násobné z_i o násobnosti v_i provedeme rozklad na parciální zlomky (ryze racionální lomené funkce) *Y(z) / z* ve tvaru

$$\frac{Y(z)}{z}=\sum_j\frac{A_j}{z-z_j}+\sum_i\sum_{p=1}^{v_i}\frac{B_{is}}{(z-z_i)^p}.$$

Racionální lomenou funkci *Y(z)* pak můžeme vyjádřit jako součet ve tvaru

$$Y(z)=\sum_j A_j\frac{z}{z-z_j}+\sum_i\sum_{p=1}^{v_i}B_{is}\frac{z}{(z-z_i)^p}.$$

Pro $t = kT$ a $z_i = D_i$, $z_j = D_j$ odpovídají jednotlivým dílčím členům, které jsou Z-obrazy elementárních funkcí viz Tab.1, předměty

$$\boxed{A_j\frac{z}{z-z_j}=A_j\frac{z}{z-D_j}\mathrel{\hat=}A_jD_j^{t/T}\eta(k)=A_jD_j^k\eta(k)},\qquad (\text{P1}-34)$$

$$\boxed{B_{ip}\frac{z}{(z-z_i)^p}=B_{ip}\frac{z}{(z-D_i)^p}\mathrel{\hat=}B_{ip}\frac{D_i^{t/T}}{D_i^{p-1}}\binom{t/T}{p-1}=B_{ip}D_i^{k-p+1}\binom{k}{p-1}\eta(k-p+1)},$$

(P1 – 35)

pro p = *1, 2, ...,* v_i.

Korespondence (P1 – 6), (P1 – 34, 35) platí též pro komplexní kořeny. Předmět odpovídající dvojici jednoduchých komplexně sdružených kořenů $z_j = \alpha_j \pm i\beta j = |z_j|e^{i\omega j}$ je možno vyjádřit ve tvaru

$$C_j\frac{z}{z-z_j}+\overline{C}_j\frac{z}{z-\overline{z}_j}\mathrel{\hat=}2|z_j|^k\left(a_j\cos\omega_jk-b_j\sin\omega_jk\right),\qquad (\text{P1}-36)$$

kde $C_j = a_j + ib_j$, $\overline{C}=a_j-ib_j$, $|z_j|=\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}$, $\omega_j=arctg\frac{\beta_j}{\alpha_j}$

nebo ve tvaru

$$C_j\frac{z}{z-z_j}+\overline{C}_j\frac{z}{z-\overline{z}_j}\mathrel{\hat=}2.|C_j||z_j|^k\cos(\omega_jk-\varphi_j),\qquad (\text{P1}-37)$$

kde $\varphi_j = arctg\frac{b_j}{a_j}$, $\left|C_j\right| = \sqrt{a_j^2 + b_j^2}$.

Pro kořen komplexně sdružený z_i násobnosti v_i platí buď korespondence ve tvaru

$$\sum_{p=1}^{v_i}\left[C_{ip}\frac{z}{(z-z_i)^p} + \overline{C}_{ip}\frac{z}{(z-\overline{z}_i)^p}\right] \mathrel{\hat{=}}$$
$$\mathrel{\hat{=}} \sum_{p=1}^{v_i} 2\binom{k}{p-1}\left|z_i\right|^{k-p+1}\left(a_{ip}\cos[\omega_i(k-p+1)] - b_{ip}\sin[\omega_i(k-p+1)]\right)\eta(k-p+1) \qquad (\mathrm{P1}-38)$$

nebo

$$\sum_{p=1}^{v_i}\left[C_{ip}\frac{z}{(z-z_i)^p} + \overline{C}_{ip}\frac{z}{(z-\overline{z}_i)^p}\right] \mathrel{\hat{=}} \sum_{p=1}^{v_i} 2\binom{k}{p-1}\left|z_i\right|^{k-p+1}\cos[\omega_i(k-p+1)+\varphi_i]\eta(k-p+1) \qquad (\mathrm{P1}-39)$$

Poznámka 5
O platnosti identit (P1 – 38, 39) se čtenář může přesvědčit sám, tím že do vzorců (P1 – 34, 35) dosadí dvojici komplexních kořenů a výsledek vhodně upraví. Zpětnou Z-transformací rozkladem na parciální zlomky získáme předměty v analytickém vyjádření (ve tvaru uzavřeného funkčního výrazu).
Konec poznámky 5.

2. Rozvoj polynomiálního zlomku (nekonečné dělení)

Tento způsob nevyžaduje znalost pólů funkce *Y(z)*, nezískáme však analytické vyjádření funkce *y(kT)*. Vychází se z definice Z-transformace viz (P1 – 1) pro kterou platí

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k} = y(0) + y(T)z^{-1} + y(2T)z^{-2} + \dots$$

Rozvineme-li Z-obraz *Y(z)* v Laurentovu řadu se středem v ∞, pak koeficienty Laurentovy řadu jsou rovny diskrétním hodnotám funkce *y(kT)*. Rozvoj racionální lomené funkce

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0},\ n \geq m$$

v Laurentovu řadu dostaneme dělení polynomu v čitateli polynomem ve jmenovateli. Vyjádříme-li obraz *Y(z)* ve tvaru

$$Y(z) = \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_m z^{-m}}{\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots + \alpha_n z^{-n}} = y_0 + y(T)z^{-1} + y(2T)z^{-2} + y(3T)z^{-3} + \dots$$

a vynásobíme-li levou i pravou stranu polynomem ($\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots$) pak porovnáním koeficientů u stejných mocnin dostaneme

$$\alpha_0 y(T) = \beta_0 \Rightarrow y(0) = \frac{\beta_0}{\alpha_0},$$

$$\alpha_0 y(T) + \alpha_1 y(0) = \beta_1 \Rightarrow y(T) = \frac{1}{\alpha_0}\left(\beta_1 - \alpha_1 y(0)\right),$$

$$\alpha_0 y(2T) + \alpha_1 y(T) + \alpha_2 y(0) = \beta_2 \Rightarrow y(2T) = \frac{1}{\alpha_0}\left(\beta_2 - \alpha_1 y(T) - \alpha_2 y(0)\right),$$

$$\alpha_0 y(kT) + \alpha_1 y(kT - T) + \ldots + \alpha_n y(kT - nT) = \beta_k \Rightarrow$$

$$y(kT) = \frac{1}{\alpha_0}\left(\beta_k - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y(kT - jT)\right), \text{ pro } k \le n \qquad \text{(P1 – 40)}$$

$$y(kT) = \frac{1}{\alpha_0}\sum_{j=0}^{n} \alpha_j y(kT - jT), \text{ pro } k > n \qquad \text{(P1 – 41)}$$

3. Rekurentní formule – Pierceův algoritmus

Pierceův algoritmus vychází ze skutečnosti, že $Y(z)$ je racionálně lomená funkce, kterou je možno ***považovat*** za obraz váhové funkce. Z-obraz váhové funkce je totožný s diskrétním přenosem a je tedy možno za uvedených předpokladů položit $Y(z^{-1}) = G(z^{-1})$. Pak je možno ***formálně*** zapsat diferenční rovnici a získáme rekurentní formuly tvaru

$$y(kT) + a_1 y(kT - T) + \ldots + a_n y(kT - nT) = b_0 u(kT - vT) + \ldots + b_m u(kT - vT - mT), \qquad \text{(P1 – 42)}$$

kde $u(kT - jT) = 0$ pro $kT - jT \neq 0$
$u(kT - jT) = 1$ pro $kT - jT = 0, j = v, \ldots, v + m$,

pak pro $y(-T) = \ldots = y(-nT) = 0$ je možno dle (P1-42) postupně vypočítat všechny hodnoty $y(0)$ až $y(kT)$ pro dané k.

3. Z-TRANSFORMACE S POSUNUTÝM POČÁTKEM
(modifikovaná Z-transformace)

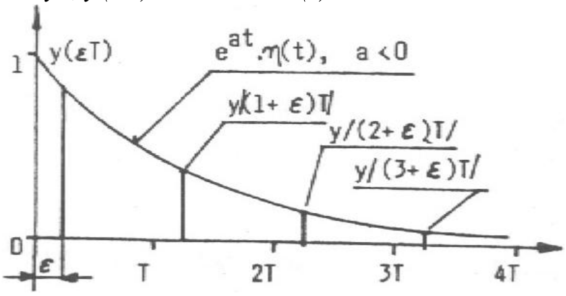
Nechť $y(t)$ je spojitá komplexní funkce reálné proměnné exponenciálního řádu, splňující podmínku $y(t) = 0$ pro $t < 0$. Nechť T je perioda vzorkování, pak pro libovolný časový okamžik uvnitř intervalu vzorkování $t = (k + \varepsilon)T$ kde $0 \le \varepsilon \le 1$, je definována Z-transformace s posunutým počátkem rovností

$$Z_\varepsilon\{y(kT)\} = Y(z, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} y[(k + \varepsilon)T] z^{-k} \ . \qquad \text{(P1 – 43)}$$

Poznámka 6
Symbolu Z{%} resp. Y(z, ε) bude též využíváno pro zdůraznění Z-transformace spojité funkce uvnitř intervalu vzorkování a symbolů Z{%} resp. Y(z) k označení Z-transformace posloupností čísel nebo Diracových impulsů s definovanými vahami.
Konec poznámky 6.

Zpětná transformace Z_ε^{-1}, tj. nalezení předmětu $y[(k + \varepsilon)T]$ k obrazu $Y(z, \varepsilon)$ se provádí stejnými postupy jako při určování předmětu y_k, $y(kT)$ k obrazu $Y(z)$.

Příklad P1 – 8 Určete Z-obraz spojité funkce $y(t) = e^{at}\eta(t)$ viz obr. P1-8 s periodou vzorkování T. ($\eta(t)$ je jednotkový skok a jeho součinem s funkcí e^{at} se formálně zajišťuje splnění podmínky $y(t) = 0$ pro $t < 0$).



Řešení

$$Y(z,\varepsilon) = Z_\varepsilon\left\{e^{at}\eta(t)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{aT(k+\varepsilon)} z^{-k} = z^{aT\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{aT}/z\right)^k .$$

Tato řada konverguje a má konečný součet, je-li splněna podmínka $|e^{aT}/z| < 1$. Platí

$$Z_\varepsilon\left\{e^{at}\eta(t)\right\} = e^{aT\varepsilon} \frac{z}{z + e^{aT}} \qquad \text{(P1 – 44)}$$

□ Konec příkladu.

Vlastnosti Z-transformace s posunutým počátkem

Základní vlastností Z-transformace uvedené v P1 můžeme ještě rozšířit o další.

1. Věta o obrazu derivace

Nechť $y(t)$ je funkce exponenciálního řádu a nechť má spojitou n-trou derivace podle t. Je-li T perioda vzorkování, pak platí

$$\boxed{Z_\varepsilon\left\{\frac{d^n y(t)}{dt^n}\eta(t)\right\} = \frac{1}{T^n}\frac{\partial^n Y(z,\varepsilon)}{\partial \varepsilon^n}}. \qquad \text{(P1 – 45)}$$

2. Věta o obecném posunutí vpravo

Nechť $Z_\varepsilon\{y(t)\} = Y(z, \varepsilon)$ a nechť obecné posunutí vpravo o τ_D je možno vyjádřit ve tvaru $\tau_D = (m + \xi)T$, kde m je celé, $\xi \in \langle 0,1\rangle$ a T je perioda vzorkování. Pak platí

$$\boxed{Z_\varepsilon\{y(t-\tau_D)\eta(t-\tau_D)\} = \begin{array}{ll} z^{-(1+m)}Y(z,1+\varepsilon-\xi) & \text{pro } \varepsilon < \xi. \\ z^{-m}Y(z,\varepsilon-\xi) & \text{pro } \varepsilon \ge \xi. \end{array}} \qquad \text{(P1 – 46)}$$

3. Věta o obrazu integrálu

Nechť $Z_\varepsilon\{y(t)\} = Y(z, \varepsilon)$ a nechť existuje integrál $\int_0^t y(\tau)d\tau$. Je-lit T perioda vzorkování, pak platí

$$\boxed{Z_\varepsilon\left\{\int_0^t y(\tau)d\tau\right\} = \frac{T}{z-1}\int_0^1 Y(z,\varepsilon)d\varepsilon + T\int_0^\varepsilon Y(z,\varepsilon)d\varepsilon}.$$

4. Věta o přímé transformaci Laplaceova obrazu v Z-obraz

Nechť $Y(s)$ je analytická funkce mající končený počet pólů s_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Nechť $Y(s)$ splňuje podmínku $\lim_{s\to\infty} Y(s) = 0$ a T je perioda vzorkování. Pak platí

$$\boxed{Z\{L^{-1}[Y(s)]\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y(p)\frac{e^{\varepsilon sT}}{1-z^{-1}e^{sT}}ds = \sum_i \operatorname*{res}_{s_i}\left\{Y(s)\frac{e^{\varepsilon sT}}{1-z^{-1}e^{sT}}\right\}}. \qquad \text{(P1 – 47)}$$

Věty o přímé transformaci je možno použít i pro funkce posunuté o τ_D. Nechť $\tau_D = (m+\xi)T$, kde m je celé, $\xi \in \langle 0,1\rangle$. Pak platí

$$\boxed{Z\{Y(s)e^{-s\tau_D}\} = z^{-(m+1)}\sum_i \operatorname*{res}_{s_i}\left\{Y(s)\frac{e^{sT(1+\varepsilon-\xi)}}{1-z^{-1}e^{sT}}\right\}},\ \varepsilon < \xi \qquad \text{(P1 – 48a)}$$

$$\boxed{Z\{Y(s)e^{-s\tau_D}\} = z^{-m}\sum_i \operatorname*{res}_{s_i}\left\{Y(s)\frac{e^{sT(\varepsilon-\xi)}}{1-z^{-1}e^{sT}}\right\}},\ \varepsilon \geq \xi \qquad \text{(P1 – 48b)}$$

SLOVNÍK Z-TRANSFORMACE

1	e^{-tmT}	$\delta(t-mT)$	z^{-m}
2	$\frac{1}{s}$	$\eta = \langle \begin{matrix} 0, t<0 \\ 1, t \geq 0 \end{matrix}$	$\frac{z}{z-1}$
3	$\frac{1!}{s^2}$	t	$\frac{z\varepsilon T}{z-1}+\frac{zT}{(z-1)^2}$
4	$\frac{2!}{s^3}$	t^2	$T^2\left[\frac{z\varepsilon^2}{z-1}+\frac{z(2\varepsilon+1)}{(z-1)^2}+\frac{2z}{(z-1)^3}\right]$
5	$\frac{3!}{s^4}$	t^3	$T^3\left[\frac{z\varepsilon^3}{z-1}+\frac{z(3\varepsilon^2+3\varepsilon+1)}{(z-1)^2}+\frac{z(6\varepsilon+6)}{(z-1)^3}+\frac{6z}{(z-1)^4}\right]$
6	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n n = 1, 2, 3, ...	$\lim_{a\to 0}(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left[\frac{ze^{-aT\varepsilon}}{(z-e^{-aT})}\right]$
7	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{ze^{-aT\varepsilon}}{z-e^{-aT}}$; a je obecné komplexní číslo
8	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$Te^{-aT\varepsilon}\left[\frac{z\varepsilon}{z-e^{-aT}}+\frac{ze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}\right]$
9	$\frac{2!}{(s+a)^3}$	t^2e^{-at}	$T^2e^{-aT\varepsilon}\left[\frac{z\varepsilon^2}{z-e^{-aT}}+\frac{z(2\varepsilon+1)e^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}+\frac{z2e^{-2aT}}{(z-e^{-aT})^3}\right]$
10	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	t^ne^{-at}	$\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left[\frac{ze^{-aT\varepsilon}}{(z-e^{-aT})}\right]$
11	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{a}\left[\frac{z}{z-1}-\frac{ze^{-aT\varepsilon}}{z-e^{-aT}}\right]$
12	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{z^2 \sin \omega T\varepsilon + z \sin \omega T(1-\varepsilon)}{z^2-2z\cos \omega T+1}$
13	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{z^2 \cos \omega T\varepsilon - z \cos \omega T(1-\varepsilon)}{z^2-2z\cos \omega T+1}$
14	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin \omega t$	$e^{-\varepsilon aaT}\frac{z^2 \sin \omega T\varepsilon + ze^{-aT} \sin \omega T(1-\varepsilon)}{z^2-2ze^{-\varepsilon aT}\cos \omega T+e^{-2aT}}$
15	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos \omega t$	$e^{-\varepsilon aaT}\frac{z^2 \cos \omega T\varepsilon + ze^{-aT} \cos \omega T(1-\varepsilon)}{z^2-2ze^{-\varepsilon aT}\cos \omega T+e^{-2aT}}$
16		$\frac{D^{t/T}}{D^{n-1}}\binom{t/T}{n-1}$	$\frac{z}{(z-D)^n}$ D ... obec. komplex. číslo $D \neq 0$; n = 1, 2, 3, ... $\varepsilon = 0$
17		$\binom{t/T}{n-1}$	$\frac{z}{(z-1)^n}$ n = 1, 2, 3, ... $\varepsilon = 0$

Literatura

[1] Pírko, Y.: Lapalceova transformace. SNTL/ALFA Praha/Bratislava, 1970.
[2] Föllinger, O.: Lineare Abtastsysteme, 2. Auflage, Oldenbourg Verlag, 1982
[3] Unbehauen, H.: Regelungstechnik II. Zustandsregelungen, digitale und nichtlineare Regelsysteme. 6. Auflage, Vieweg und Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1993.
[4] Ogata, K.: Discrete-time Control Systems. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987