

Systemy a řízení

Číslicové řízení - Doplnky

18.11.2009



Digitalizace

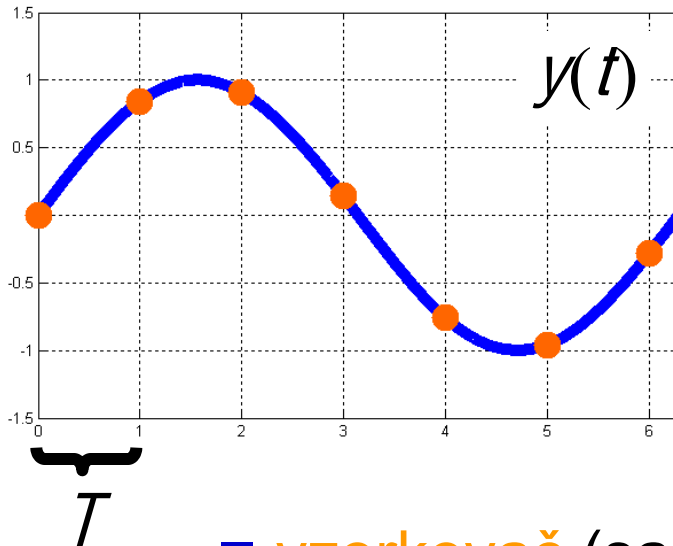
- různé realizace – podle periody (frekvence) vzorkování
- typicky: logika počítače obsahuje hodiny, které každých T sekund vyšlou puls (interrupt) do vzorkovače
- u pomalejších procesů může být jinak
Příklad: dávková výroba fotografických filmů Kodak

- někdy mají různé větve různou periodu vzorkování
Příklad: řízení postoje paraplegika GRC
- nebo mají fázové zpoždění
- někdy vzorkování není periodické
Příklad: free running – další vzorek se vezme, jakmile je předchozí zpracován

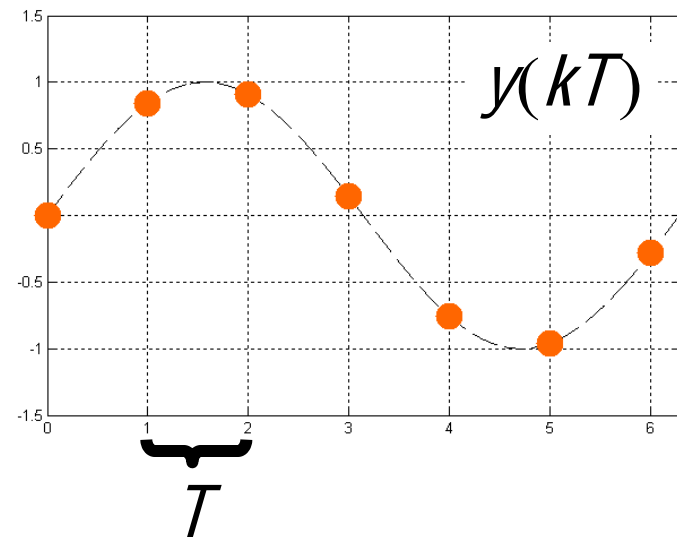
- to vše komplikuje návrh
- budeme probírat jen ten nejjednodušší případ

- Převod spojitého signálu na diskrétní:
vzorkování (sampling)

spojitý signál

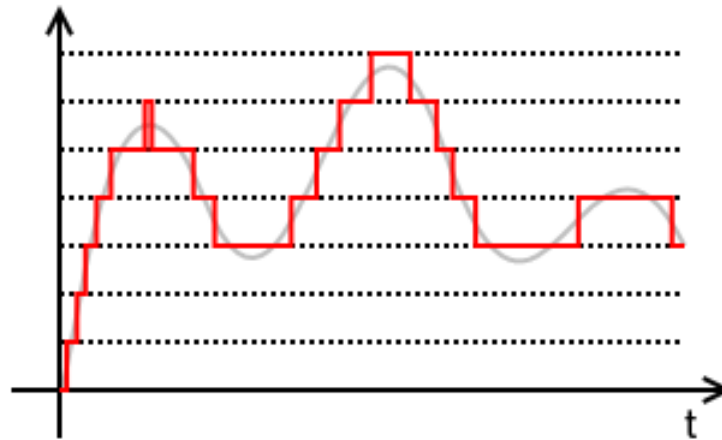


diskrétní signál



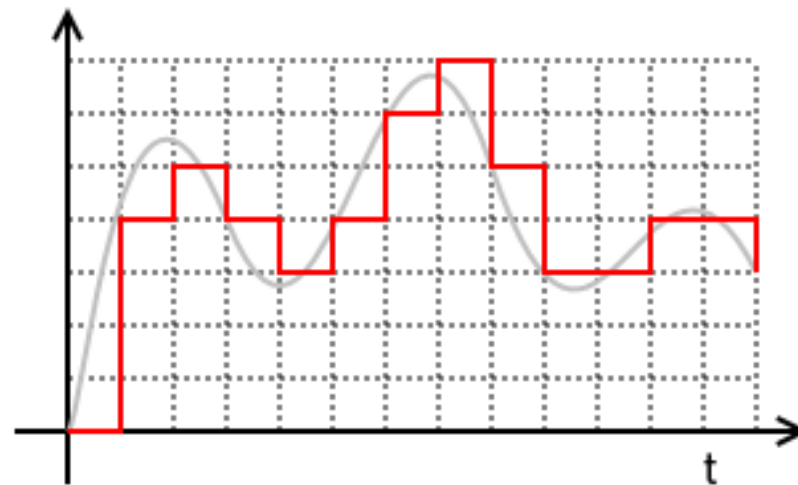
- vzorkovač (sampler)
- pracuje periodicky: s periodou T [s]
a frekvencí vzorkování $1/T$ [Hz]

- obdoba vzorkování v časové oblasti je **kvantování** (quantization) v oblasti hodnot signálů
- kvantování je náhrada spojitého oboru reálných hodnot (nebo velmi hustého diskrétního) relativně malou množinou čísel nebo symbolů
- podle reprezentace čísel v konkrétním počítači



- kvantování provádí A/D převodník (analogově-digitální)

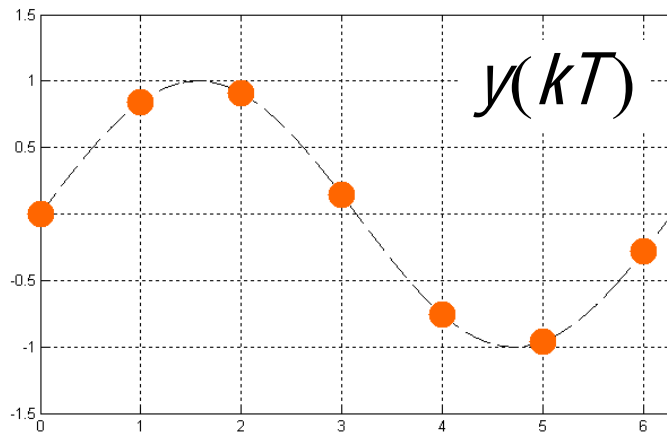
- digitalizace je vzorkování a kvantování současně
- totéž se provádí v čase i v hodnotách
- často je vzorkovač součástí A/D převodníku
- „digitalizovaný signál“



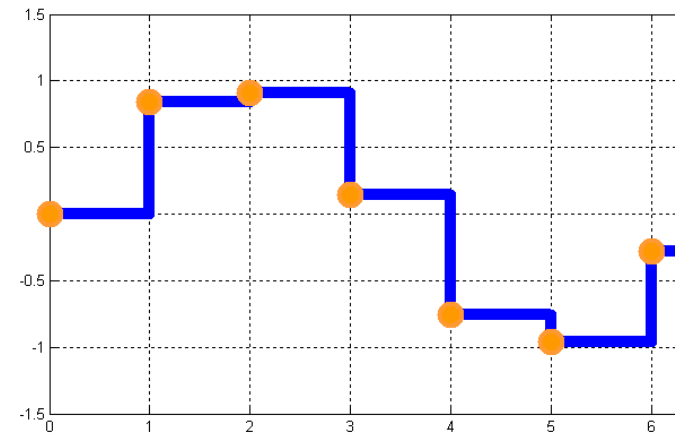
- Příklad audio CD disk:
 - Ⓢ vzorkování s frekvencí 44 100 Hz a
 - Ⓢ kvantování s $2^{16} = 65\,536$ možnými hodnotami
(reprezentace 16 bitů = 2 bytů)

- Převod diskretního signálu na spojitý:
tvarování (holding)

diskretní signál



spojitý signál



- zero-order hold

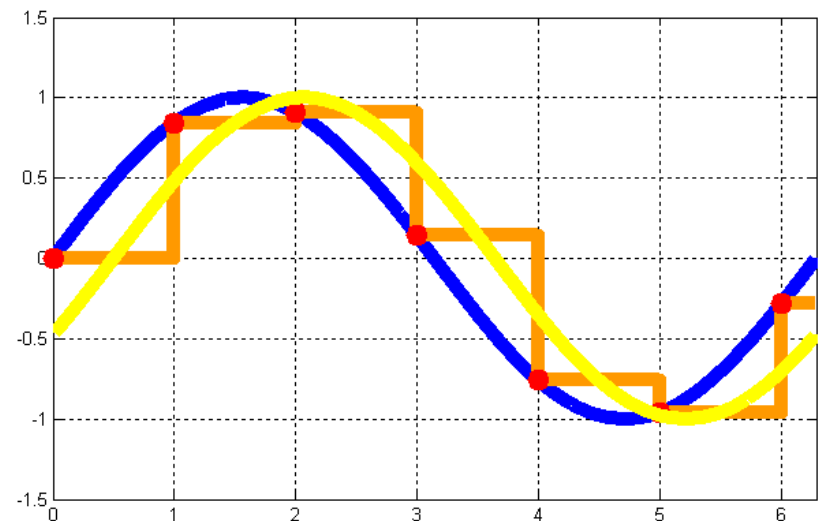
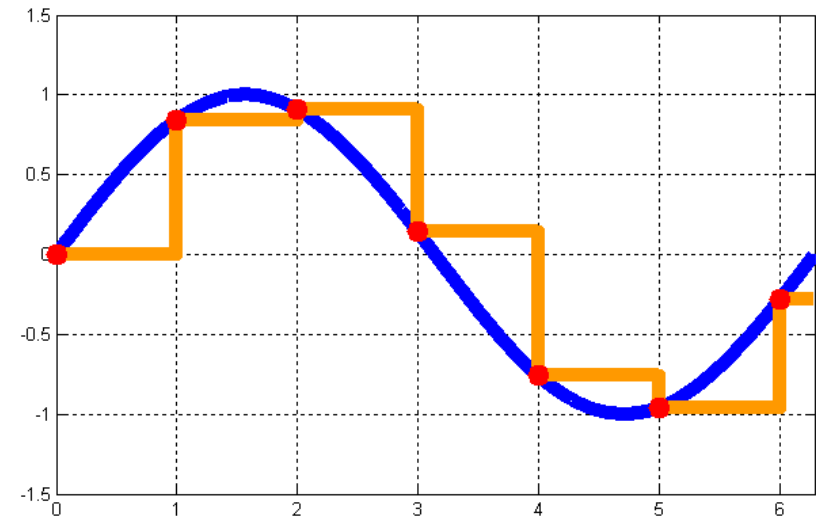
- srovnání původního spojitého signálu se vzorkovaným a tvarovaným
- průměrná hodnota tvarovaného signálu je oproti spojitému opožděná o $T/2$
- způsobeno tvarováním (hold)

$$u(t)$$

$$u(kT)$$

$$u_{\text{z tvarovače}}(t)$$

$$\text{průměrná hodnota } u_{\text{z tvarovače}}(t)$$



spojitý signál

$$f(t) = e^{-at}, t > 0$$

- má Laplaceův

obraz $F(s) = \mathcal{L}\{f\} = \frac{1}{s+a}$

- a pól v

$$s = -a$$

diskrétní signál

(vzniklý vzorkováním)

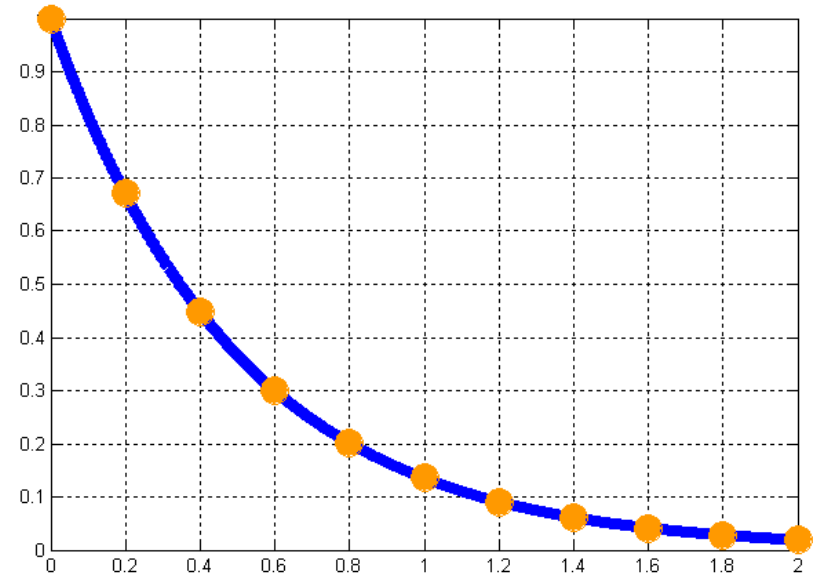
$$f(t) = e^{-akt}, T = 0.2s$$

- má z-obraz

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(kT)\} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

- a tedy pól v

$$z = e^{-aT} = e^{sT}$$



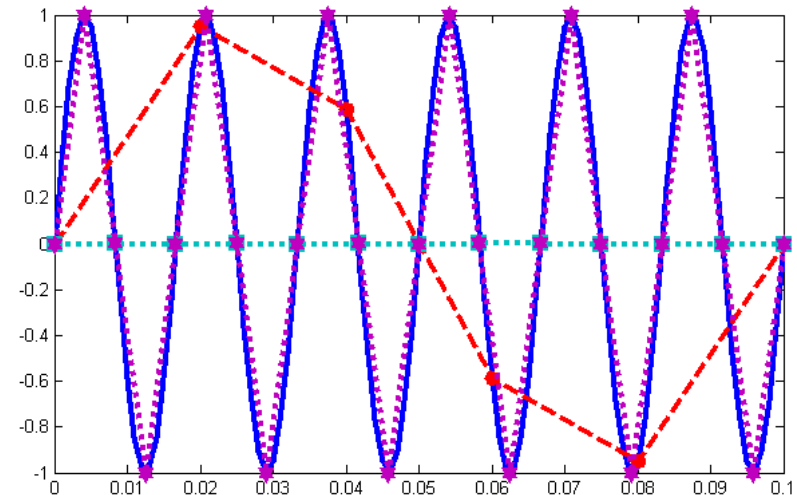
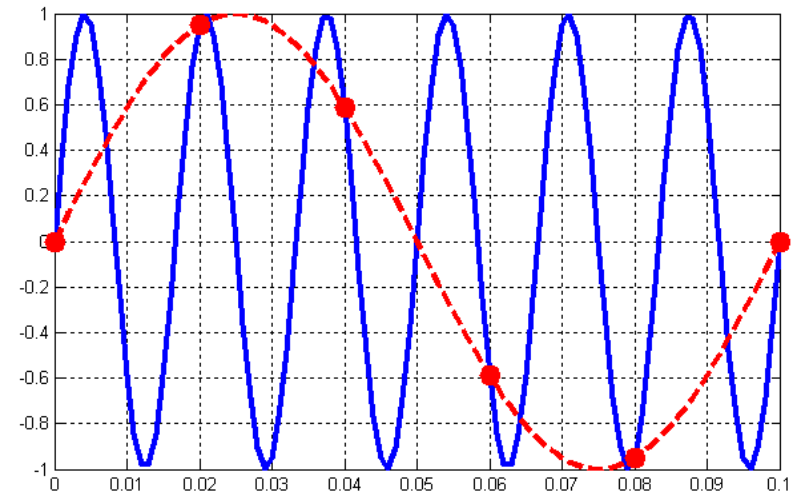
Mezi póly obrazu spojitého a

(vzorkovaného) diskrétního signálu platí vztah

$$z = e^{sT}$$

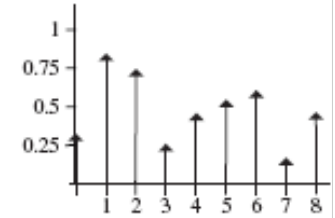
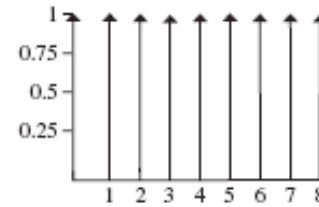
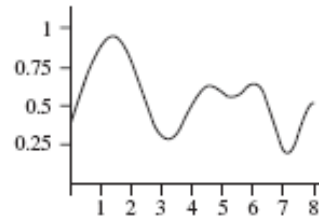
Stroboskopický efekt - Aliasing

- Když sinusový signál o frekvenci 60Hz
- vzorkujeme se vzorkovací frekvencí 50Hz
- vlivem **stroboskopického efektu** „vidíme“ jiný signál: o frekvenci 10Hz
- musíme vzorkovat s frekvencí větší než 2×120 Hz
 - 50 Hz
 - 120Hz
 - 240 Hz
- v angličtině: **aliasing** (od **alias** = falešné jméno, přezdívka)



- v oboru komunikace vzorkování reprezentujeme impulsní modulací
- vzorkovanou verzi $r^*(t)$ spojitého signálu $r(t)$ vyjádříme jako

$$r^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(t)\delta(t - kT)$$



- funkce (distribuce) $\sum \delta(t - kT)$ se nazývá **Diracův hřeben** nebo **š-funkce** (shah-function, protože připomíná písmeno ш v Cyrilice)
- protože je periodická, vyjádříme ji Fourierovou řadou

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j(2\pi n/T)t}$$

- kde Fourierovy koeficienty jsou obecně

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-j(2\pi n/T)t} dt$$

- protože v rozsahu integrálu je jediný impuls: v počátku $\delta(t)$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-j(2\pi n/T)t} dt = \frac{1}{T} e^{-j(2\pi n/T)0} = \frac{1}{T}$$

- tedy celkem

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(2\pi n/T)t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t}$$

kde jsme označili

$$\omega_s = 2\pi/T$$

- Laplaceův obraz (v oboustranné LT) vzorkovaného signálu vypočteme z

$$\mathcal{L}\{r^*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) \left\{ \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \right\} e^{-st} dt$$

- jako

$$R^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} e^{-st} dt = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s - jn\omega_s)t} dt$$

$$\rightarrow = R(s - jn\omega_s) = \mathcal{L}\{r(t)\}$$

s posunutým argumentem

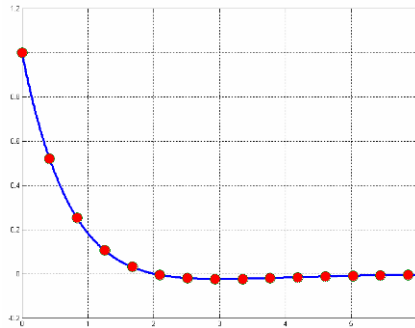
- tedy celkem

$$R^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(s - jn\omega_s) \quad \text{kde} \quad R(s) = \mathcal{L}\{r(t)\}$$

- v radiotechnice: řadě impulsů odpovídá řada nosných frekvencí v celočíselných násobcích $\omega_s = 2\pi/T$
- a když $r(t)$ moduluje všechny tyto nosné, vytváří nekonečnou posloupnost postraních pásem

Spektrum vzorkovaného signálu

- pro signál $r(t) = e^{-t} - 0.5te^{-t}$
s L-obrazem $R(s) = (s+0.5)/(s+1)^2$
vzorkovaný s $T_s = 2\pi/15$

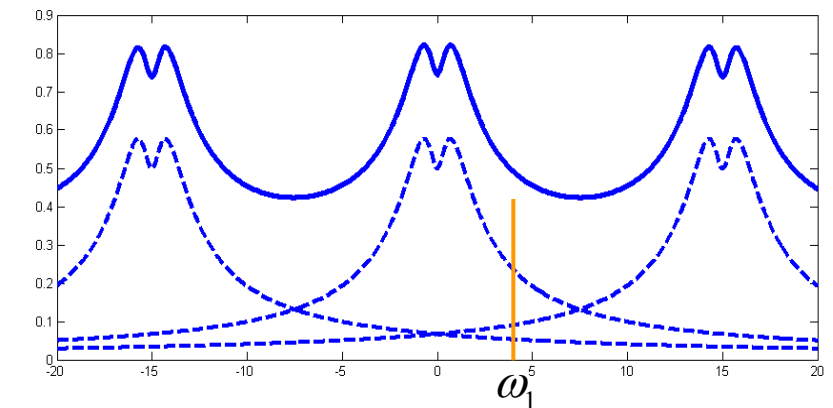
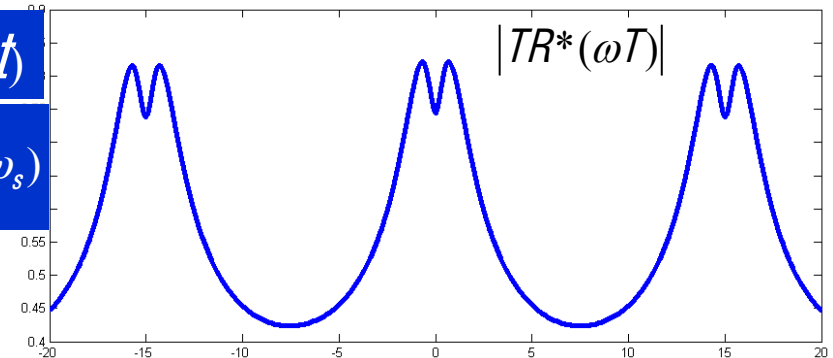
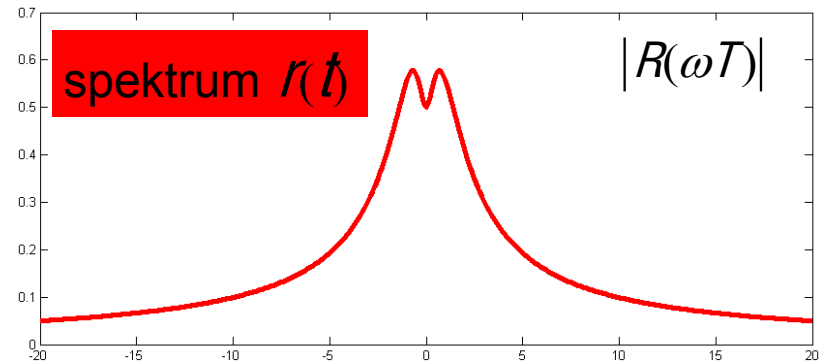


spektrum $r^*(t)$

$$R^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(s - jn\omega_s)$$

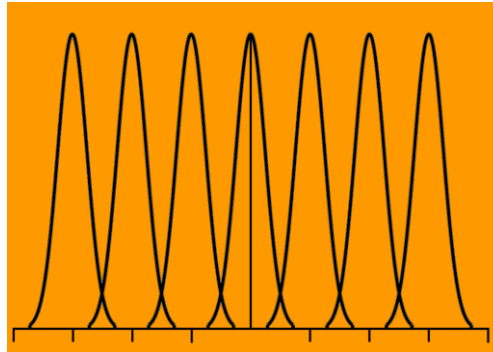
- spektrum vzorkovaného signálu obsahuje nekonečně mnoho kopií spektra spojitého signálu
- pokud se překrývají, je to problém - aliasing
- pro frekvenci ω_1 se spektrum skládá „správného“ $R(j\omega_1)$ plus „nesprávného“ = alias

$$R(j\omega_0), \omega_0 = \omega_1 - \omega_s = \omega_1 - 2\pi/T$$

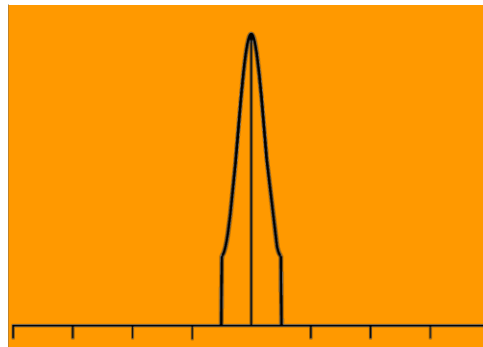


- v důsledku vzorkování s frekvencí $\omega_s = 2\pi/T_s$ má výsledný signál harmonický obsah pro frekvenci ω_1 nejen s originálního signálu na frekvenci ω_1 , ale i na všech frekvencích, které jsou aliasy ω_1 ,
- tj. obsahuje komponenty od všech frekvencí $\omega_1 + n\omega_s = \omega_1 + n2\pi/T$
- pokud původní spojitý signál obsahuje významné komponenty s vysokými frekvencemi, dochází k velkému přeryvu a tedy k velkým chybám

- překryté kopie spektra



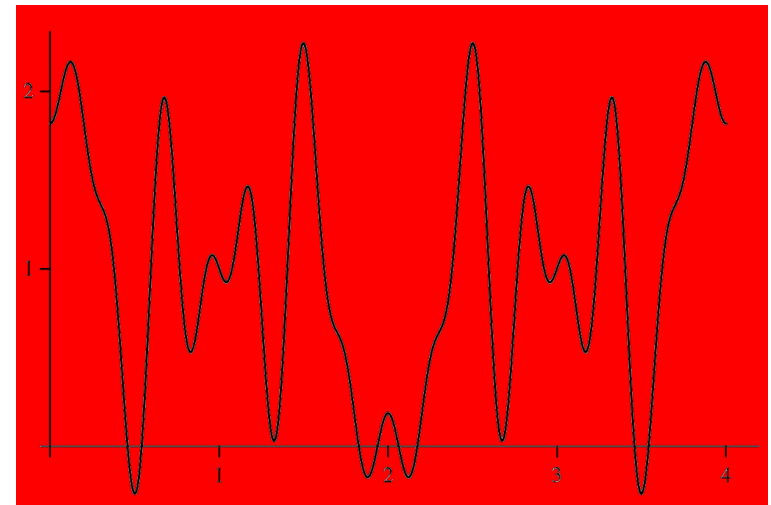
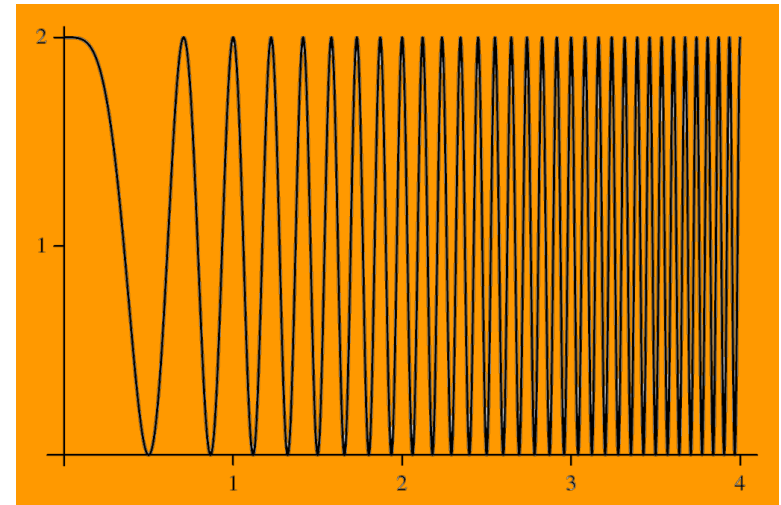
- při zpětné rekonstrukci se použije rozdělené na
- to vede k chybám



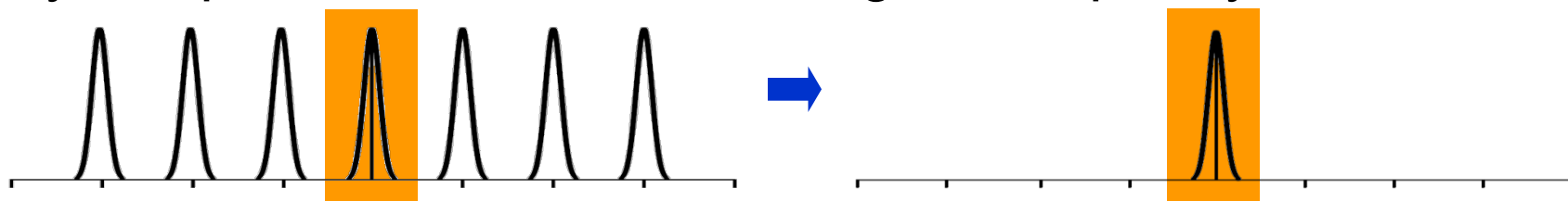
- Když signál

$$f(t) = 1 + \cos 4t^2$$

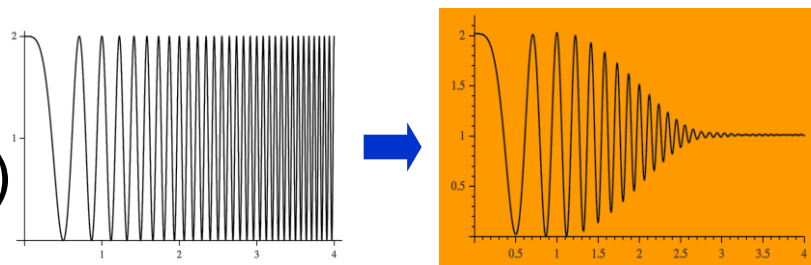
- vzorkujeme s periodou $1/8$ s,
- dostaneme po zpětné rekonstrukci velmi zkreslený signál
- aliasing způsobí ztrátu informace o vysokých frekvencích
- současně se ale vysoké frekvence objeví v nízkých frekvencích a zkreslí jejich obsah v signálu



- **zmenšit periodu vzorkování** (hustěji vzorkovat) aby se spektrum vzorkovaného signálu nepřekrývalo

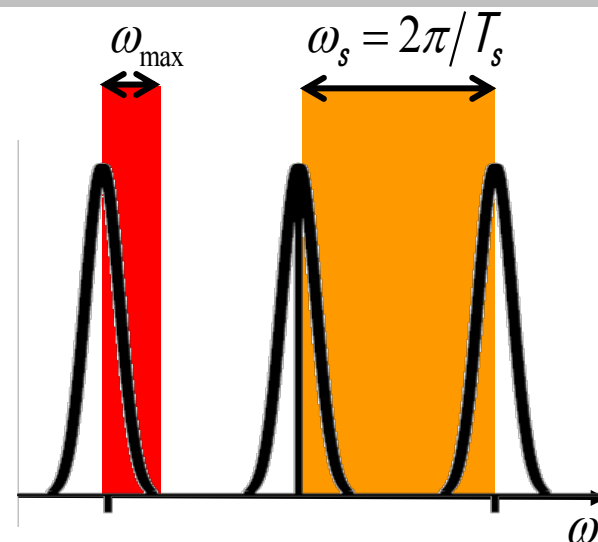


- Ⓜ musíme mít HW, který to stihne
- před vzorkováním **odfiltrovat ze signálu vysoké frekvence** (anti-aliasing filter – dolní propust)
 - Ⓜ tím se sice informace o vysokých frekvencích také ztratí
 - Ⓜ ale aspoň nezkrusí obsah nízkých frekvencí
- **asynchronní nebo adaptivní vzorkování**
 - Ⓜ v řízení se neužívá
 - Ⓜ tyto a další jevy a triky – viz obor zpracování signálů



Věta o vzorkování (Sampling Theorem)

- vzdálenost mezi sousedními vrcholy je $\omega_s = 2\pi/T_s$
- kde ω_s je frekvence vzorkování
- šířka jednoho „kopce“ (= spektra spojitého signálu) je $2\omega_{\max}$
- kde ω_{\max} je maximální frekvence obsažená v původním signálu



Z toho je zřejmé, že

- k překrytí a tedy k aliasing nedojde
- když

$$\omega_{\max} < \omega_s/2 = \omega_N = \pi/T_s$$

Nyquistova
frekvence

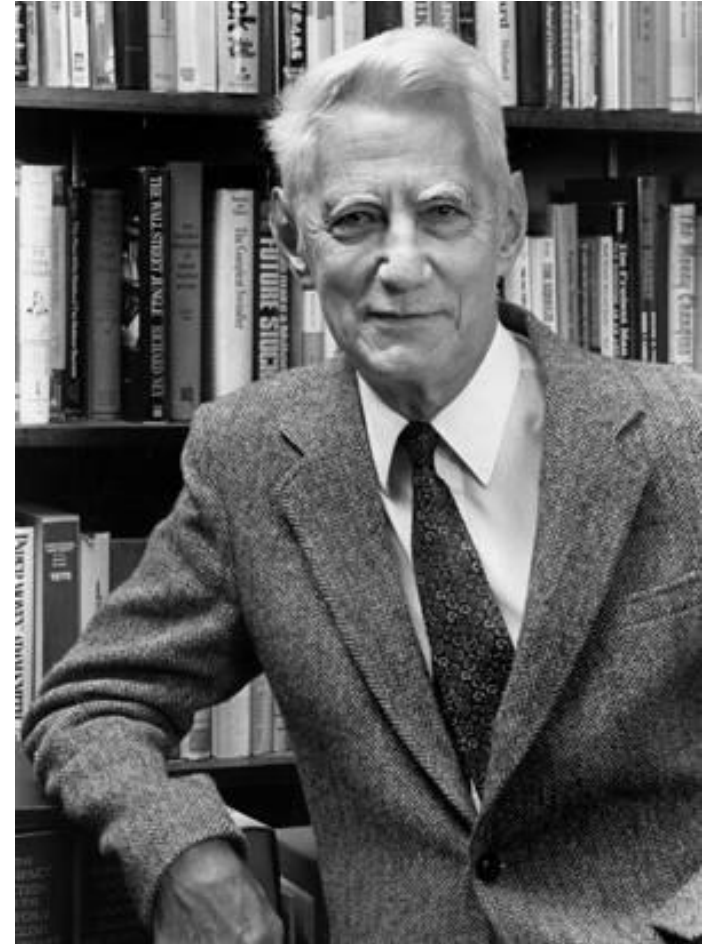
- Takový signál může být plně obnoven ze svých vzorků
- Naopak daný signál musíme vzorkovat frekvencí $\omega_s > 2\omega_{\max}$

- Shannon-Nyquist (-Whittaker-Kotělnikov): **Věta o vzorkování**

Claude Elwood Shannon

1916 –2001

- americký elektroinženýr a matematik
- „otec teorie informace“
- zakladatel teorie návrhu digitálních obvodů
- vzdálený příbuzný Edisona
- Bc. a MSc. na Univ. Michigan
- PhD. na MIT
- za války v Bell Labs (řízení střelby, kryptografie)
- od 1956 učí na MIT



- Do řídicího systému mohou přicházet různé signály
 - Jak tedy poznat frekvenci signálu, který vzorkujeme? (abychom mohli užít Větu ?)
 - Ať už je vstupu (referenci, poruše,...) signál o libovolné frekvenci, na výstup systému efektivně projde maximálně frekvence daná šířkou pásma ω_{BW}
 - Většinou bereme šířku pásma uzavřené smyčky
 - Z Věty o vzorkování tedy plyne podmínka $\omega_s > 2\omega_{BW}$
 - To je ale jen holé minimum, většinou bereme frekvenci mnohem vyšší (kvůli přesnosti, malému zpoždění apod.)
 - Na druhou stranu rychlejší vzorkování stojí více peněz
- Za současných cen HW a požadavků na řízení se bere cca.

$$\omega_s > (20 \leftrightarrow 40) \times \omega_{BW}$$

Aproximace lichoběžníkovou metodou podle Tustina - odvození

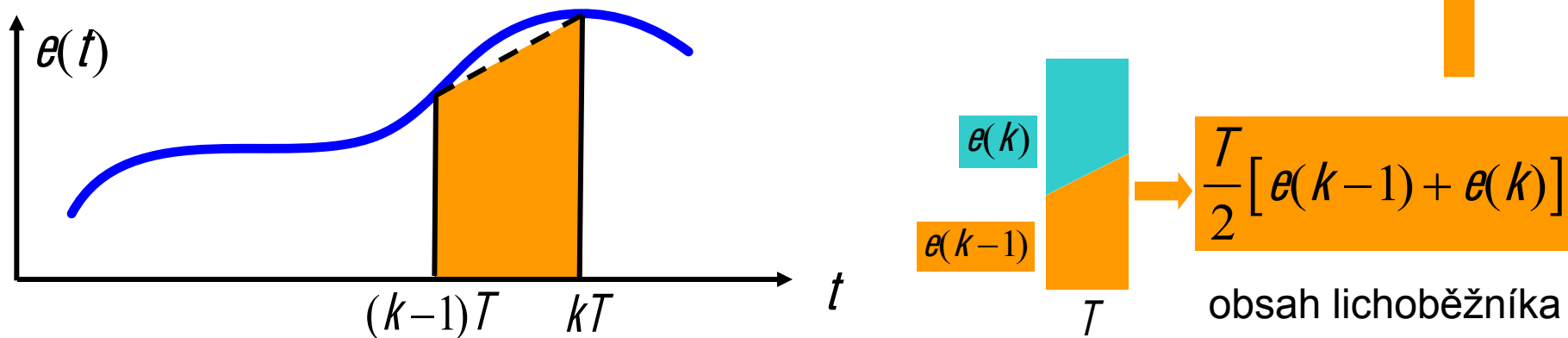
Tustinova metoda neboli bilineární aproximace

- vychází z numerické integrace
- pro I regulátor s přenosem je

$$D(s) = \frac{1}{s} = \frac{U(s)}{E(s)}$$

$$u(kT) = \int_0^{kT-T} e(t) dt + \int_{kT-T}^{kT} e(t) dt = u((k-1)T) + \text{plocha pod grafem funkce za poslední periodu}$$

- pro výpočet plochy za poslední periodu použijeme lichoběžníkovou aproximaci (lichoběžníková integrace)



- potom
$$u(k) = u(k-1) + \frac{T}{2} [e(k-1) + e(k)]$$
- a v obrazech
$$U(z) = z^{-1}U(z) + \frac{T}{2} [z^{-1}E(z) + E(z)]$$
$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{2} \left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right) = \frac{1}{\frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)} = \frac{1}{s}$$
- Pro obecný přenos regulátoru postupujeme obdobně
- Výsledek, který dostaneme, bychom dostali přímo položením
$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$$

Příklad

$$D(s) = \frac{a}{a+s} \quad \longrightarrow \quad D_{\text{Tustin}}(z) = \frac{a}{a + \frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)} = \frac{(1+z^{-1}) a T}{a T + 2(1-z^{-1})}$$

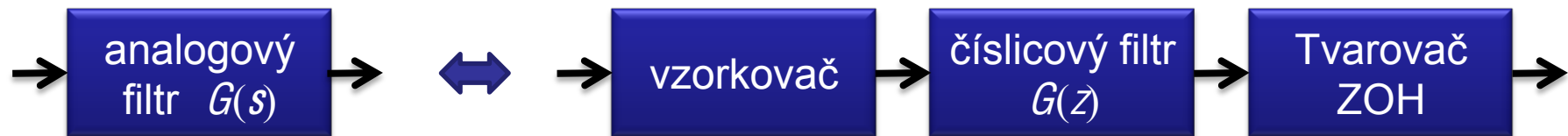
ContSysTbx: c2d

Warping

*warping = kroucení, borcení, deformace
viz. také warp pohon ve Star Trek*



- Aproximace zkresluje měřítko frekvencí
- Proto digitální realizace spojitého filtru typu pásmová propust' (zádrž) nemusí správně zachovat požadované pásmo (dochází k tzv. **frequency warping**)
- Při náhradě analogového filtru číslicovým navrženým pomocí Tustinovy aproximace



- Je přenos sinusového signálu

$$H(e^{j\omega h}) = \frac{1 - e^{-j\omega h}}{j\omega h} G\left(\frac{2}{h} \frac{e^{j\omega h} - 1}{e^{j\omega h} + 1}\right)$$

- Pro sinusové signály je argument přenosu spojitého filtru $G(j\omega)$ zatímco jeho Tustinova aproximace má argument

$$\frac{2 e^{j\omega h} - 1}{h e^{j\omega h} + 1} = \frac{2 e^{j\omega h/2} - e^{-j\omega h/2}}{h e^{j\omega h/2} + e^{-j\omega h/2}} = \frac{2j}{h} \tan\left(\frac{\omega h}{2}\right)$$

- Tak dojde ke zkreslení měřítka frekvencí
- Pokud původní spojitý filtr blokoval přenos signálu s frekvencí ω' , bude digitální filtr místo toho blokovat frekvenci ω , kde

$$\omega' = \frac{2}{h} \tan\left(\frac{\omega h}{2}\right)$$

- Tj.

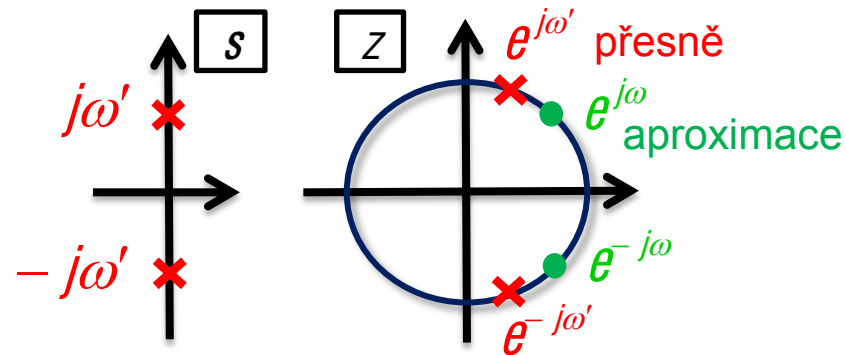
$$\omega = \frac{2}{h} \arctan\left(\frac{\omega' h}{2}\right) \approx \omega' \left(1 - \frac{(\omega' h)^2}{12}\right)$$

$$\begin{aligned} \arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \dots, \end{aligned}$$

$$|x| \leq 1, x \neq i, -i$$

- Ze vztahu

$$\omega = \frac{2}{h} \arctan\left(\frac{\omega' h}{2}\right) \approx \omega' \left(1 - \frac{(\omega' h)^2}{12}\right)$$



- Plyne, že zkreslení je malé pro malé $\omega' h$, ale pro větší roste

- Snadno můžeme zavést transformaci které zkreslení eliminuje pro jednu specifickou frekvenci ω_1 dosazením

$$s \approx \frac{\omega_1}{\tan(\omega_1 h/2)} \frac{z-1}{z+1}$$

namísto obvyklého

$$s \approx \frac{2}{h} \frac{z-1}{z+1}$$

- Potom je $H(e^{j\omega_1 h}) = G(j\omega_1)$, ale jen pro ω_1
- na jiných frekvencích zkreslení zůstává
- Říká se tomu „Tustin s prewarping“ a je to i v Matlabu-CST

- Ze vztahu

$$\omega = \frac{2}{h} \arctan\left(\frac{\omega' h}{2}\right) \approx \omega' \left(1 - \frac{(\omega' h)^2}{12}\right)$$

- Plyne, že zkreslení je malé pro malé $\omega' h$, ale pro větší roste

- Snadno můžeme zavést transformaci které zkreslení eliminuje pro jednu specifickou frekvenci ω_1 dosazením

$$s \approx \frac{\omega_1}{\tan(\omega_1 h/2)} \frac{z-1}{z+1}$$

namísto obvyklého

$$s \approx \frac{2}{h} \frac{z-1}{z+1}$$

- Potom je $H(e^{j\omega_1 h}) = G(j\omega_1)$, ale jen pro ω_1
- na jiných frekvencích zkreslení zůstává
- Říká se tomu „**Tustin s prewarping**“ a je to i v Matlabu-CST

