

Tutoriál pre modelovanie, analýzu a riadenie modelov hybridných systémov

Tutoriál objasňuje základné pojmy z oblasti modelovania a analýzy hybridných systémov, poukazuje na ich rozličné správanie v jednotlivých módoch hybridného systému a zápis ich matematického modelu do prostredia MATLABu vo forme S-funkcií. Hlavným modelom je hybridný systém hydraulického systému dvoch nádob s jedným prítokom do prvej nádoby a s jedným odtokom v druhej nádobe. Nádoby sú vzájomne prepojené 2 ventilmi. Tutoriál sa v krátkosti venuje modelovaniu daného systému, vysvetľuje dôvod hybridného charakteru tohto systému. Ďalej sa venuje linearizácii nelineárneho modelu, vytvoreniu fázových portrétov a návrhu riadenia LQR pre lineárnu reprezentáciu tohto systému v módoch, v ktorých je možné uvažovať o riadení na ustálený stav. Tutoriál obsahuje niekoľko definovaných úloh, ktorých riešením sa objasňujú jednotlivé pojmy a algoritmy riešenia týchto úloh.

Znenie úloh zadania:

1. Modelovanie uvažovaného hybridného hydraulického systému (ďalej len HHS)
 - 1.1. Určte samotné módy zvoleného hybridného systému a podmienky zotrvania HHS v danom móde.
 - 1.2. Odvodte diferenciálne rovnice pre každý mód.
 - 1.3. Vypočítajte ustálené hodnoty veličín pre každý mód, pričom ustálená hodnota h_{2si} je pre i -ty mód zadaná
 - 1.4. Vykonajte linearizáciu systému v okolí pracovného bodu
2. Analýza HHS, overenie správnosti linearizácie systému.
 - 2.1. Porovnajzte výstup lineárnej aproximácie HHS a jeho nelineárneho modelu v pracovnom bode a mimo neho pre každý mód.
 - 2.2. Zostrojte fázové portréty HHS pre každý mód. Jednotlivé čiastkové fázové portréty zobrazte v jednom grafe.
3. Syntéza riadenia LQR s využitím lineárnej aproximácie HHS
 - 3.1. Vypočítajte spätnoväzobné zosilnenia k_i pre privedenie systému do rovnovážneho stavu pre každý mód
 - 3.2. Vypočítajte dopredné zosilnenia N_i pre privedenie systému do nového ustáleného stavu pre každý mód
 - 3.3. Aplikujte navrhnuté LQ riadenie na nový ustálený stav na nelineárny hybridný systém

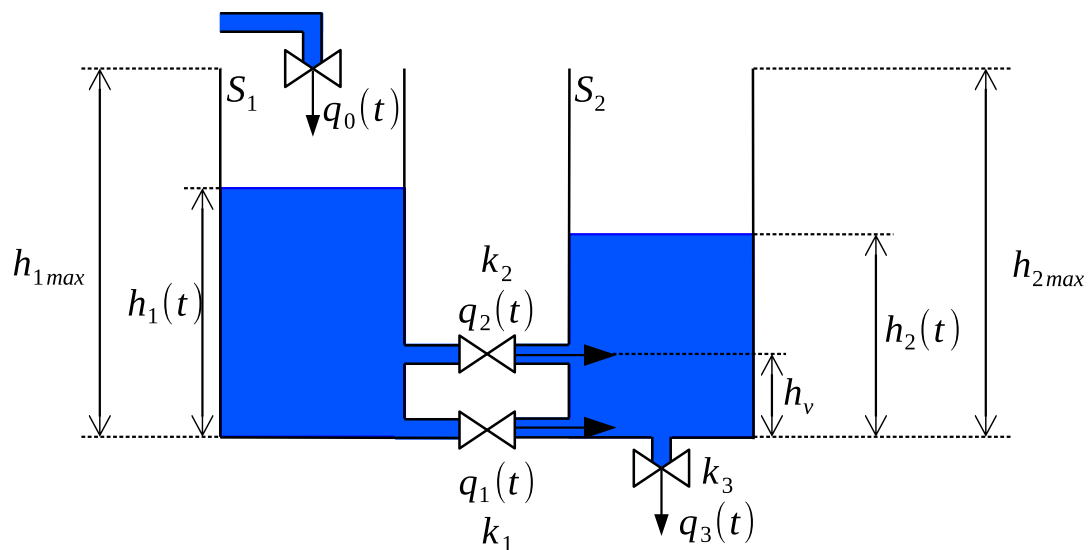
Úlohy vykonajte na hydraulickom systéme, ktorý je zobrazený na Obr. 1. Zoznam fyzikálnych veličín HHS je v Tab. 1 a zoznam parametrov je v Tab. 2

Tab. 1: Zoznam fyzikálnych veličín hydraulického systému

Značenie	Jednotka	Fyzikálna veličina
$h_1(t)$	[m]	výška hladiny v prvej nádobe
$h_2(t)$	[m]	Výška hladiny druhej nádoby
$q_0(t)$	[$m^3 s^{-1}$]	Prítok do prvej nádoby

Tab. 2: Zoznam parametrov nádob hydraulického systému

Značenie	Jednotka	Hodnota	Parameter
h_{1max}	[m]	2.4	Výška prvej nádoby
h_{2max}	[m]	2	Výška druhej nádoby
q_{0max}	[$m^3 s^{-1}$]	0.02	Maximálny prítok do prvej nádoby
h_v	[m]	1	Výška prietokového ventilu k_2
S_1	[m^2]	1	Prierez prvej nádoby
S_2	[m^2]	1	Prierez druhej nádoby
k_1	[$m^{2.5} s^{-1}$]	0.01265	Charakteristika spodného ventilu
k_2	[$m^{2.5} s^{-1}$]	0.01265	Charakteristika dolného ventilu
k_3	[$m^{2.5} s^{-1}$]	0.01265	Charakteristika výtokového ventilu



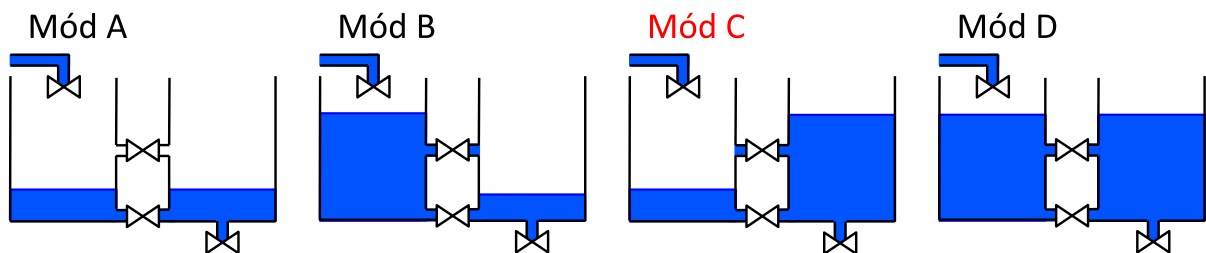
Obr. 1: Znázornenie fyzikálnych veličín a vzájomných interakcií medzi nádobami uvažovaného HHS

1. Modelovanie uvažovaného hybridného hydraulického systému

1.1. Určte samotné módy zvoleného hybridného systému a podmienky zotrvania HHS v danom móde

Zvolený hydraulický systém je hybridný z toho dôvodu, že sa jeho diferenciálne rovnice menia s meniacou sa výškou hladín v oboch nádobách. Dôvodom je horný ventil k_2 . Ak je výška hladín v oboch nádobách pod týmto ventilom k_2 , teda platí $(h_1(t) \leq h_v) \wedge (h_2(t) \leq h_v)$, systém je v interakcii len cez jeden ventil, a to k_1 . Ak však hladina kvapaliny v jednej (alebo oboch) nádobách prekročí výšku h_v ventilu k_2 , nádoby začnú interagovať aj cez horný ventil k_2 . To spôsobuje zmenu chovania sa systému, tým pádom aj zmenu diferenciálnych rovníc, z čoho možno priamo usúdiť, že systém je hybridný. Platí to pre každý systém, ktorý má rozličné diferenciálne rovnice pre aspoň jednu dvojicu vektorov stavových premenných. Existujú aj iné typy hybridných systémov, ale nimi sa tento tutoriál nezaobrá.

Pre názornosť je možné vidieť jednotlivé módy a ich označenia na Obr. 2:



Obr. 2: Grafické zobrazenie módov HHS

Systém môže byť v danom časovom okamihu iba v jednom z daných módov. Existencia v móde závisí od výšok hladín $h_1(t)$, $h_2(t)$. Ak sú obe hladiny pod ventilom, voda môže pretekať z jednej nádoby do druhej iba cez ventil k_1 . Ak je hladina $h_1(t)$ nad ventilom k_2 a hladina $h_2(t)$ pod ventilom k_2 , voda preteká z ľavej nádoby do pravej cez oba ventily, t. j. k_1 a k_2 . Ak je hladina $h_1(t)$ pod ventilom k_2 a hladina $h_2(t)$ nad ventilom k_2 , nastáva opačný dej. Ak sú oba ventily nad ventilom k_2 , kvapalina môže pretekať z jednej nádoby do druhej cez oba spoločné ventily k_1 a k_2 súčasne. Preto tieto podmienky zotrvania systému v danom móde môžeme zapísať prehľadne ako v Tab. 3.

Mód C je z fyzikálneho hľadiska nedosiahnuteľný pri nulových počiatkových podmienkach a pri regulácii výšok hladín len prítokom $q_0(t)$. Pre úplnosť však uvažujme aj tento mód, nakoľko simulačne je možné ho dosiahnuť napr. zadaním počiatkových podmienok v tomto móde.

Tab. 3: Podmienky zotrvania HHS v danom móde

Mód	Hladina v prvej nádobe $h_1(t)$	Hladina v druhej nádobe $h_2(t)$
A	Pod ventilom ($h_1(t) \leq h_v$)	Pod ventilom ($h_2(t) \leq h_v$)
B	Nad ventilom ($h_1(t) > h_v$)	Pod ventilom ($h_2(t) \leq h_v$)
C	Pod ventilom ($h_1(t) \leq h_v$)	Nad ventilom ($h_2(t) > h_v$)
D	Nad ventilom ($h_1(t) > h_v$)	Nad ventilom ($h_2(t) > h_v$)

1.2. Odvod'te diferenciálne rovnice pre každý mód

Pri odvádzaní rovníc využívame Torriceliho vzťah pre rýchlosť pohybu kvapaliny v trubici:

$$\frac{\rho v(t)^2}{2} + \rho gh(t) + p = \text{constant} \quad (1)$$

kde $v(t)$ je rýchlosť pohybu kvapaliny, ρ je hustota kvapaliny, p je tlak pôsobiaci na kvapalinu (atmosférický tlak). Následne uvažujme nádobu v tvare kvádra s výškou hladiny $h(t)$ a otvorom vo výške h_v . Porovnaním rýchlosti kvapaliny v nádobe a v otvore potom platí (pri zanedbaní rovnakého atmosférického tlaku v oboch stranách rovnice):

$$\frac{\rho v(t)^2}{2} + \rho gh(t) = \frac{\rho v_v(t)^2}{2} + \rho gh_v \quad (2)$$

kde $v_v(t)$ je rýchlosť kvapaliny vytekajúcej cez otvor, $v(t)$ je rýchlosť poklesu hladiny v nádobe. Keďže prierez ventilu je veľmi malý voči prierezu nádoby, tak $v(t)^2 \ll v_v(t)^2$ a rovnica sa upraví na tvar

$$\rho gh(t) = \frac{\rho v_v(t)^2}{2} + \rho gh_v(t) \quad (3)$$

Vyjadrením $v_v(t)$ získame výsledný vzťah:

$$v_v(t) = \sqrt{2g(h(t) - h_v)} \quad (4)$$

Ďalej použijeme rovnicu kontinuity, ktorá hovorí, že objemový tok v nádobe je konštantný, pričom nás zaujíma objemový tok v nádobe ako takej a v jej otvore:

$$Sv(t) = sv_v(t) \quad (5)$$

Nakoľko $v(t)$ je deriváciou výšky hladiny a vzťah pre $v_v(t)$ je uvedený v (6), je výsledný vzťah pre zmenu hladiny v nádobe:

$$\frac{dh(t)}{dt} = -\frac{s\sqrt{2g(h(t) - h_v)}}{S} \quad (6)$$

Znamienko mínus v rovnici indikuje klesanie výšky nádoby. Zavedieme ešte substitúciu, kde $k = s\sqrt{2g}$ je konštanta ventila.

Ak privedieme do nádoby prítok $q_0(t)$ ako vstup do nádoby, zmení sa rovnica (6) na finálny tvar pre zmenu výšky nádoby v kvapaline s otvorom a s meniacim sa prítokom:

$$\frac{dh(t)}{dt} = -\frac{k\sqrt{(h(t) - h_v)}}{S} + \frac{q_0(t)}{S} \quad (7)$$

Rovnica sa však zmení, ak sú nádoby v interakcii, čo znamená, že sú prepojené ventilom, pričom hladina v oboch nádobách je nad týmto ventilom. Takýto prípad je napr. v móde A na Obr. 2, platí:

$$\begin{aligned} \frac{dh_1(t)}{dt} &= -\frac{k_1\sqrt{(h_1(t) - h_2(t))}}{S_1} + \frac{q_0(t)}{S_1} \\ \frac{dh_2(t)}{dt} &= \frac{k_1\sqrt{(h_1(t) - h_2(t))}}{S_2} - \frac{k_3\sqrt{h_2(t)}}{S_2} \end{aligned} \quad (8)$$

Tieto vzťahy však platia iba vtedy, ak $h_1(t) > h_2(t)$. Nakoľko je možné v druhej nádobe dosiahnuť výšku väčšiu ako v prvej nádobe (napr. pridaním prítoku do druhej nádoby), je nutné vzťah (8) zovšeobecniť na tvar:

$$\begin{aligned} \frac{dh_1(t)}{dt} &= -\frac{\text{sign}(h_1(t) - h_2(t))k_1\sqrt{|h_1(t) - h_2(t)|}}{S_1} + \frac{q_0(t)}{S_1} \\ \frac{dh_2(t)}{dt} &= \frac{\text{sign}(h_1(t) - h_2(t))k_1\sqrt{|h_1(t) - h_2(t)|}}{S_2} - \frac{k_3\sqrt{h_2(t)}}{S_2} \end{aligned} \quad (9)$$

kde funkcia $\text{sign}(x) = 1$ pre kladné x a $\text{sign}(x) = -1$ pre záporné x . Nakoľko ostatné módy využívajú pri odvádzaní rovnaké predpoklady, je možné ich odvodiť podobným spôsobom. Pre mód B platí:

$$\begin{aligned} \frac{dh_1(t)}{dt} &= \frac{q_0(t)}{S_1} - \frac{k_1\sqrt{h_1(t) - h_2(t)}}{S_1} - \frac{k_2\sqrt{h_1(t) - h_v}}{S_1} \\ \frac{dh_2(t)}{dt} &= \frac{k_1\sqrt{h_1(t) - h_2(t)}}{S_2} + \frac{k_2\sqrt{h_1(t) - h_v}}{S_2} - \frac{k_3\sqrt{h_2(t)}}{S_2} \end{aligned} \quad (10)$$

Pre mód C platí:

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{q_0(t)}{S_1} + \frac{k_1\sqrt{h_2(t) - h_1(t)}}{S_1} + \frac{k_2\sqrt{h_2(t) - h_v}}{S_1}$$

$$\frac{dh_2(t)}{dt} = -\frac{k_1\sqrt{h_2(t) - h_1(t)}}{S_2} - \frac{k_2\sqrt{h_2(t) - h_v}}{S_2} - \frac{k_3\sqrt{h_2(t)}}{S_2}$$
(11)

Pre mód D platí:

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{q_0(t)}{S_1} - \frac{(k_1 + k_2)\text{sign}(h_1(t) - h_2(t))\sqrt{|h_1(t) - h_2(t)|}}{S_1}$$

$$\frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{(k_1 + k_2)\text{sign}(h_1(t) - h_2(t))\sqrt{|h_1(t) - h_2(t)|}}{S_2} - \frac{k_3\sqrt{h_2(t)}}{S_2}$$
(12)

1.3. Vypočítajte ustálené hodnoty veličín pre každý mód

Na riadenie systému pomocou LQR v okolí pracovných bodov je najprv získať tieto pracovné body, teda ustálené stavy. Rovnovážny stav nadobúda systém práve vtedy, ak sú vstupy na systém nulové ($\mathbf{u} = 0$) a jeho stavové veličiny nemenia svoje hodnoty ($dx/dt = 0$), teda ich derivácie sú nulové. Rozdiel medzi rovnovážnym a ustáleným stavom je ten, že pri ustálenom stave uvažujeme konštantné, nenulové vstupy na systém ($\mathbf{u} \neq 0$), pričom stavové veličiny systému sú taktiež konštantné. Po vypočítaní hodnôt pracovných bodov je potom možné systém linearizovať v okolí týchto pracovných bodov.

Pri linearizácii daného HHS využívame linearizáciu pomocou rozvoja do Taylorovho radu a získania jakobiánov, pričom pre daný HHS je nutné vypočítať ustálené stavy h_{1si} , h_{2si} a q_{0si} pre i -ty mód, v okolí ktorých vykonáme linearizáciu. Nakoľko daný hybridný systém obsahuje 2 diferenciálne rovnice a hodnoty veličín h_{1si} , h_{2si} a q_{0si} sú neznáme, je nutné si jednu veličinu zvoliť ako parameter a zvyšné hodnoty vypočítať pre zvolený parameter. V našom prípade sme zvolili ako parameter výšku hladiny v 2. nádobe, teda h_{2si} . Zvolené hodnoty h_{2si} boli zvolené nasledovne:

Tab. 4: Zvolené ustálené hodnoty h_{2si} pre výšku hladiny v druhej nádobe

Mód	Hodnota ustálenej hodnoty hladina h_{2si} [m]
A	0.3
B	0.8
D	1.2

Ustálený stav nastáva vtedy, ak sa výšky hladín $h_1(t)$, $h_2(t)$ v oboch nádobách nemenia, teda ich derivácie sú nulové. Nakoľko sme vzťahy pre výšku nádob vyjadrili, v ďalšom kroku z týchto vzťahov vypočítame algebraickými úpravami ustálené hodnoty veličín. Uvedený je postup pre mód A.

Mód A: Najprv predpokladajme, že výška $h_{1sa} > h_{2sa}$, nakoľko prítok $q_0(t)$ je v prvej nádobe a odtok k_3 v druhej nádobe. Potom sa rovnice (9) po zohľadnení faktu, že derivácie sú nulové a prierezy nádob sa rovnajú $S_1 = S_2 = S$, upravia na tvar:

$$0 = -\frac{k_1\sqrt{h_{1sa} - h_{2sa}}}{S} + \frac{q_{0sa}}{S} \quad (13)$$

$$0 = \frac{k_1\sqrt{h_{1sa} - h_{2sa}}}{S} - \frac{k_3\sqrt{h_{2sa}}}{S}$$

Obe rovnice vynásobíme menovateľom S a následne rovnice sčítame. Dostaneme vzťah:

$$q_{0sa} = k_3\sqrt{h_{2sa}} \quad (14)$$

Dosadením číselných hodnôt je potom $q_{0sa} = 0.01265\sqrt{0.3} = 0.0069m^3s^{-1}$. Vyjadrenie hodnoty h_{1sa} je potom už triviálne. Môžeme taktiež zohľadniť fakt, že platí $k_1 = k_3$:

$$0 = k_1\sqrt{h_{1sa} - h_{2sa}} - k_3\sqrt{h_{2sa}}$$

$$k_1\sqrt{h_{1sa} - h_{2sa}} = k_3\sqrt{h_{2sa}}$$

$$k_1^2(h_{1sa} - h_{2sa}) = k_3^2h_{2sa}$$

$$k_1^2h_{1sa} - k_1^2h_{2sa} = k_3^2h_{2sa} \quad (15)$$

$$h_{1sa} = \frac{(k_3^2 + k_1^2)h_{2sa}}{k_1^2}$$

$$h_{1sa} = 2h_{2sa} = 0.6m$$

Posledný vzťah v rovnici (15) platí len preto, lebo v našom prípade $k_1 = k_3$, čo však nemusí platiť vo všeobecnosti.

Mód B: Po vynásobení rovníc (10) módu B prierezom nádob S_1 a S_2 a ich sčítaním získame vzťah pre výpočet ustáleného prítoku q_{0sb} :

$$q_{0sb} = k_3\sqrt{h_{2sb}} \quad (16)$$

Ustálenú hodnotu hladiny v prvej nádobe h_{1sb} vypočítame z rovnice pre zmenu výšky hladiny druhej nádoby (10):

$$0 = \frac{k_1 \sqrt{h_{1sb} - h_{2sb}}}{S_2} + \frac{k_2 \sqrt{h_{1sb} - h_v}}{S_2} - \frac{k_3 \sqrt{h_{2sb}}}{S_2} \quad (17)$$

Vynásobením prierezom S_2 a zavedením substitúcie $k_1 = k_2 = k_3 = k$ prejde rovnica (17) na tvar, ktorého zjednodušením získame výsledný vzťah pre h_{1sb} :

$$\begin{aligned} 0 &= k\sqrt{h_{1sb} - h_{2sb}} + k\sqrt{h_{1sb} - h_v} - k\sqrt{h_{2sb}} \\ \sqrt{h_{1sb} - h_{2sb}} &= \sqrt{h_{1sb} - h_v} - \sqrt{h_{2sb}} \\ h_{1sb} - h_{2sb} &= h_{1sb} - h_v + h_{2sb} - 2\sqrt{h_{1sb} - h_v}\sqrt{h_{2sb}} \\ 2h_{2sb} - h_v &= 2\sqrt{h_{1sb} - h_v}\sqrt{h_{2sb}} \\ \frac{2h_{2sb} - h_v}{2\sqrt{h_{2sb}}} &= \sqrt{h_{1sb} - h_v} \\ h_{1sb} &= \left(\frac{2h_{2sb} - h_v}{2\sqrt{h_{2sb}}}\right)^2 + h_v \end{aligned} \quad (18)$$

Dosadením číselných hodnôt vypočítame hodnotu $h_{1sb} = 1.1125m$, $q_{0sb} = 0.0113m^3s^{-1}$. Výpočet sa podstatne zjednodušil vďaka rovnosti prierezov ventilov $k_1 = k_2 = k_3$.

Mód C: Po vynásobení rovnice (11) menovateľom S_1 a po zohľadnení faktu, že $dh_1/dt = 0$ a $dh_2/dt = 0$ dostávame:

$$\begin{aligned} 0 &= q_{0sc} + k_1\sqrt{h_{2sc} - h_{1sc}} + k_2\sqrt{h_{2sc} - h_v} \\ 0 &= -k_1\sqrt{h_{2sc} - h_{1sc}} - k_2\sqrt{h_{2sc} - h_v} - k_3\sqrt{h_{2sc}} \end{aligned} \quad (19)$$

Hodnoty $q_0(t)$, k_1 , k_2 sú kladné. Mód C je definovaný podmienkami $h_{2sc} > h_v$, $h_{1sc} < h_v$. Po sčítaní oboch rovníc dostaneme vzťah $q_{0sc} = k_3\sqrt{h_{2sc}}$, ktorý spätne dosadíme to prvej rovnice:

$$0 = k_3\sqrt{h_{2sc}} + k_1\sqrt{h_{2sc} - h_{1sc}} + k_2\sqrt{h_{2sc} - h_v} \quad (20)$$

Je to trojčlenný vzťah, v ktorom každý člen je väčší ako 0, pričom ich súčet má byť kladný, výsledkom čoho je, že rovnica nemá v oblasti reálnych čísel riešenie, preto mód C nemá ustálený stav, nakoľko neexistuje taký prítok q_{0sc} , pre ktorý by derivácie stavových premenných boli nulové, t. j. $dh_1/dt = 0$ a $dh_2/dt = 0$. Vyplýva to už logicky aj z toho, že prítok je iba v prvej nádobe a odtok iba v druhej nádobe, preto zotrvanie v móde C je nemožné.

Mód D: Pri tomto móde opäť predpokladajme, že $h_{1sd} < h_{2sd}$, nakoľko kvapalina priteká do prvej nádoby a vyteká z druhej nádoby. Z rovnice (12) pre druhú nádobu systému potom platí:

$$0 = \frac{(k_1 + k_2)\sqrt{h_{1sd} - h_{2sd}}}{S_2} - \frac{k_3\sqrt{h_{2sd}}}{S_2}$$

$$(k_1 + k_2)\sqrt{h_{1sd} - h_{2sd}} = k_3\sqrt{h_{2sd}} \quad (21)$$

$$h_{1sd} = \left[\left(\frac{k_3}{k_1 + k_2} \right)^2 + 1 \right] h_{2sd}$$

$$h_{1sd} = 1.25 h_{2sd}$$

Posledný vzťah je možné opäť získať zjednodušením predchádzajúceho vzťahu vďaka rovnosti prierezu ventilov $k_1 = k_2 = k_3$. Číselne potom $h_{1sd} = 1.5m$. Vzťah pre ustálený prítok q_{0sd} opäť získame sčítaním rovníc (12):

$$q_{0sd} = k_3\sqrt{h_{2sd}} \quad (22)$$

Číselne potom $q_{0sd} = 0.0139 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

Jednotlivé výsledky výpočtov hodnôt pracovných bodov v jednotlivých módoch zobrazuje Tab. 5:

Tab. 5: Pracovné body HHS pre jednotlivé módy systému

Mód	$h_{2si}[m]$	$h_{1si}[m]$	$q_{0si}[m^3s^{-1}]$
A	0.3	0.6	0.0069
B	0.8	1.1125	0.0113
D	1.2	1.5	0.0139

Pre jednotlivé módy sú vypočítané pracovné body skutočne príslušné v danom móde. Ak by sme ale ustálenú hodnotu hladiny v druhej nádobe h_{2si} zvolili zle, napr. pre mód A zvolili $h_{2sa} = 0.6m$, potom by $h_{1sa} = 1.2m$ a daný pracovný bod by neprislúchal módu A, teda hodnotu h_{2sa} by sme museli voliť znova.

Vo všeobecnosti je postup pre získanie hodnôt veličín v pracovnom bode nasledovný:

1. Dosadiť do rovníc systému za derivácie stavových premenných nulu, nakoľko stavové premenné sa nemenia
2. Riešiť n rovníc s m neznámymi veličinami, ak je $m > n$, volíme si veličiny ako parameter tak, aby sa počet rovníc zhodoval s počtom neznámych
3. Overíme, či sa daný pracovný bod skutočne nachádza v danom móde

1.4. Vykonaťte lineárnu aproximáciu systému v okolí pracovného bodu

Pri linearizácii v okolí jednotlivých pracovných bodov využívame linearizáciu pomocou rozvoja do Taylorovho radu. Princípom je vytvorenie matíc parciálnych derivácií a následne dosadením vypočítaných pracovných bodov do týchto matíc, čím vznikajú jakobiho matice \mathbf{A} a \mathbf{B} . Ak označíme rovnicu pre zmenu výšky hladiny v prvej nádobe f_{1n} a rovnicu pre zmenu výšky hladiny v druhej nádobe f_{2n} pre n -tý mód, platí:

$$\mathbf{A}_n = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f_{1n}}{\partial h_1(t)} & \frac{\partial f_{1n}}{\partial h_2(t)} \\ \frac{\partial f_{2n}}{\partial h_1(t)} & \frac{\partial f_{2n}}{\partial h_2(t)} \end{array} \right) \Bigg|_{h_1(t)=h_{1sn}, h_2(t)=h_{2sn}, q_0(t)=q_{0sn}} \quad (23)$$

$$\mathbf{B}_n = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial f_{1i}}{\partial q_0(t)} \\ \frac{\partial f_{2i}}{\partial q_0(t)} \end{array} \right) \Bigg|_{q_0(t)=q_{0sn}}$$

Výsledkom linearizácie v okolí pracovného bodu je odchyľkový model, pričom platí

$$\begin{pmatrix} \frac{d(h_1(t) - h_{1sn})}{dt} \\ \frac{d(h_2(t) - h_{2sn})}{dt} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_n \begin{pmatrix} h_1(t) - h_{1sn} \\ h_2(t) - h_{2sn} \end{pmatrix} + \mathbf{B}_n (q_0(t) - q_{0sn}) \quad (24)$$

Potom rovnice systému (9), (11), (12) v jednotlivých módoch zderivujeme podľa vzťahov (23). Pre názornosť je ukázaný spôsob derivácie pri móde A, pri módoch B a D sú uvedené len výsledné matice jakobiánov. Rovnice (9) môžeme zjednodušiť na tvar:

$$f_{1A} = -\frac{k_1 \sqrt{|h_1(t) - h_2(t)|}}{S_1} + \frac{q_0(t)}{S_1} \quad (25)$$

$$f_{2A} = \frac{k_1 \sqrt{|h_1(t) - h_2(t)|}}{S_2} - \frac{k_3 \sqrt{h_2(t)}}{S_2},$$

nakoľko $\text{sign}(h_1(t) - h_2(t))$ má hodnotu 1 po dosadení ustálených hodnôt h_{1sa} , h_{2sa} . Potom pre jednotlivé parciálne derivácie v jakobiánoch \mathbf{A} a \mathbf{B} (23) platí:

$$\frac{\partial f_{1A}}{\partial h_1(t)} = -\frac{k_1}{2S_1 \sqrt{h_1(t) - h_2(t)}} \quad (26)$$

$$\frac{\partial f_{1A}}{\partial h_2(t)} = \frac{k_1}{2S_1 \sqrt{h_1(t) - h_2(t)}}$$

$$\frac{\partial f_{1B}}{\partial h_1(t)} = -\frac{k_1}{2S_2\sqrt{h_1(t) - h_2(t)}}$$

$$\frac{\partial f_{1B}}{\partial h_2(t)} = \frac{k_1}{2S_2\sqrt{h_1(t) - h_2(t)}} - \frac{k_3}{2S_2\sqrt{h_2(t)}}$$

$$\frac{\partial f_{1A}}{\partial q_0(t)} = \frac{1}{S_1}$$

$$\frac{\partial f_{2A}}{\partial q_0(t)} = 0$$

Do týchto vzťahov potom dosadením hodnôt pracovných bodov h_{1sa} , h_{2sa} , q_{0sa} za $h_1(t)$, $h_2(t)$, $q_0(t)$ získame výsledné matice \mathbf{A}_a , \mathbf{B}_a módu A. Rovnakým spôsobom môžeme vypočítať aj matice jakobiánu pre módy B, D. Nakoľko spôsob výpočtu matíc \mathbf{A}_n , \mathbf{B}_n je u módov A, B, D veľmi podobný, sú uvedené už len výsledné hodnoty v týchto maticiach v Tab. 6:

Tab. 6: Hodnoty matíc jakobiánov pre n -tý mód

Mód	Matica \mathbf{A}_n pre n -tý mód	Matica \mathbf{B}_n pre n -tý mód
A	$\mathbf{A}_A = \begin{pmatrix} -0.0115 & 0.0115 \\ 0.0115 & -0.0231 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
B	$\mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} -0.0302 & 0.0113 \\ 0.0302 & -0.0184 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
D	$\mathbf{A}_D = \begin{pmatrix} -0.0231 & 0.0231 \\ 0.0231 & -0.0289 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B}_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vzhľadom k tomu, že mód C nemá ustálený stav, nie je možné vytvoriť jeho lineárnu aproximáciu pomocou rozvoja do Taylorovho radu. Lineárnu aproximáciu sme vytvárali, aby sme mohli navrhnúť LQ riadenie na daný systém, ktorého vstupom sú práve matice \mathbf{A}_n , \mathbf{B}_n . Z týchto dôvodov nie je nutné vytvárať lineárnu aproximáciu v móde C a riadenie v tomto móde bude určené ľubovoľným vstupom, ktorý zaručene dosiahne zmenu systému z módu C na iný mód.

Postup pri linearizovaní pomocou rozvoja do Taylorovho radu je:

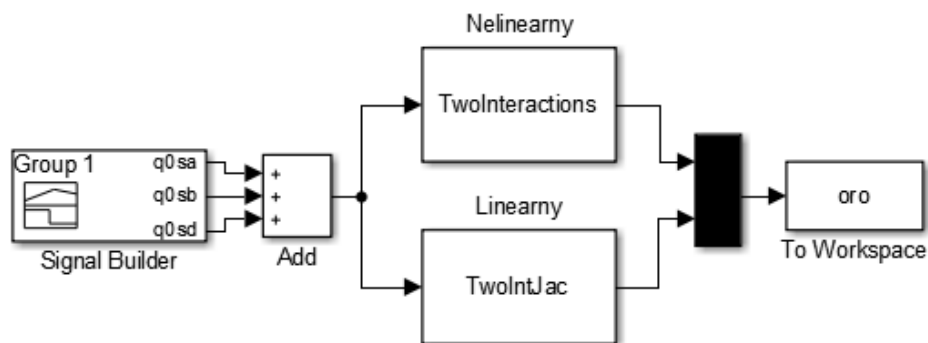
1. Výpočet parciálnych derivácií rovníc systému podľa jednotlivých stavových premenných a podľa jednotlivých vstupov
2. Vytvoriť jakobiány \mathbf{A}_n , \mathbf{B}_n pomocou vyjadrených parciálnych derivácií
3. Dosadiť hodnoty pracovných bodov v jakobiánoch \mathbf{A}_n , \mathbf{B}_n a vyčíslíť ich hodnotu
4. Použiť jakobiány na zostavenie odchýlkového linearizovaného tvaru systému

2. Analýza HHS, overenie správnosti linearizácie systému

Model je implementovaný do programovacieho prostredia MATLAB a odsimulovaný pomocou Simulinku. Jednoduchou formou implementácie matematického modelu do MATLABu a Simulinku je zapísať rovnice nelineárneho modelu pomocou S-funkcie, ktorá umožňuje definovať diferenciálne rovnice pre každý mód, definičné obory stavových premenných a aj podmienky (Tab. 1Tab. 3), ktoré určujú dvojicu diferenciálnych rovníc, ktoré sa použijú pri simulácii systému v jednotlivých časových okamihoch.

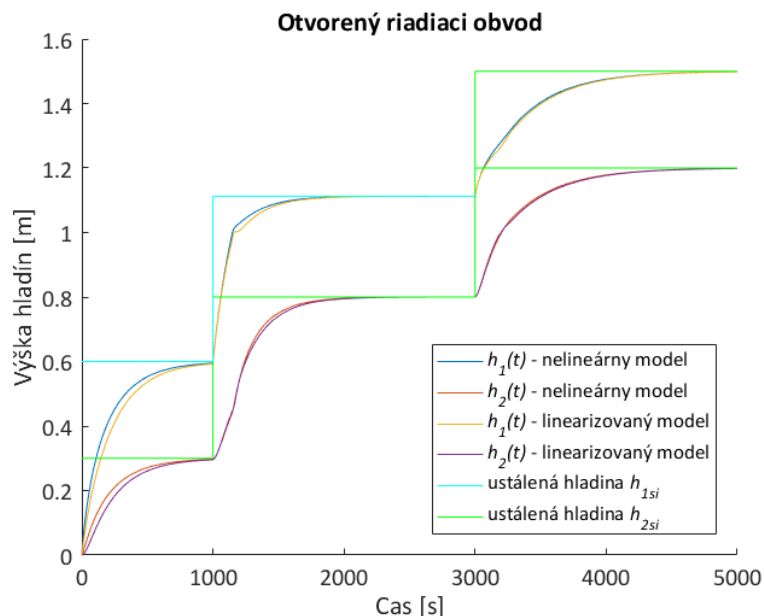
2.1. Porovnanie výstup lineárnej aproximácie HHS a jeho nelineárneho modelu

Po implementácii nelineárneho modelu a jeho lineárnej aproximácie do MATLABu môžeme overiť správnosť, resp. presnosť linearizácie modelu pomocou časovej analýzy systému na konštantný prítok (ORO). Na vstupe systému je privedený konštantný prítok jedného z módov a na výstupe potom sledujeme ustálené výšky hladín pre tento mód. Ak sa výšky $h_1(t)$, $h_2(t)$ zhodujú po istom čase s ustálenými výškami h_{1si} , h_{2si} , môžeme považovať model za správne implementovaný. Simulačná schéma riadenia pomocou jednotlivých ustálených prítokov je na Obr. 3:



Obr. 3: Simulačná schéma ORO pre analýzu nelineárneho systému a jeho lineárnej aproximácie

Nakoľko úlohou bolo overiť správanie zmeny hladín $h_1(t)$, $h_2(t)$ v každom móde. Na vstup privádzame postupne ustálené prítoky q_{0sa} , q_{0sb} , q_{0sd} v rozličných časových okamihoch. Správanie sa modelov linearizovaného a nelineárneho systému je veľmi podobné, s malými odchýlkami lineárnej aproximácie od nelineárneho modelu. Podstatné však je, že sa v pracovnom bode ustália na rovnakých hodnotách.

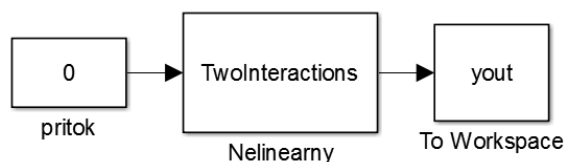


Obr. 4: Zobrazenie priebehu výšok hladín v nádobách v jednotlivých pracovných bodoch

Je možné porovnať aj hladiny mimo pracovného bodu, pričom v tomto prípade by sa už nelineárny systém ustálil na iných hodnotách ako linearizovaný systém.

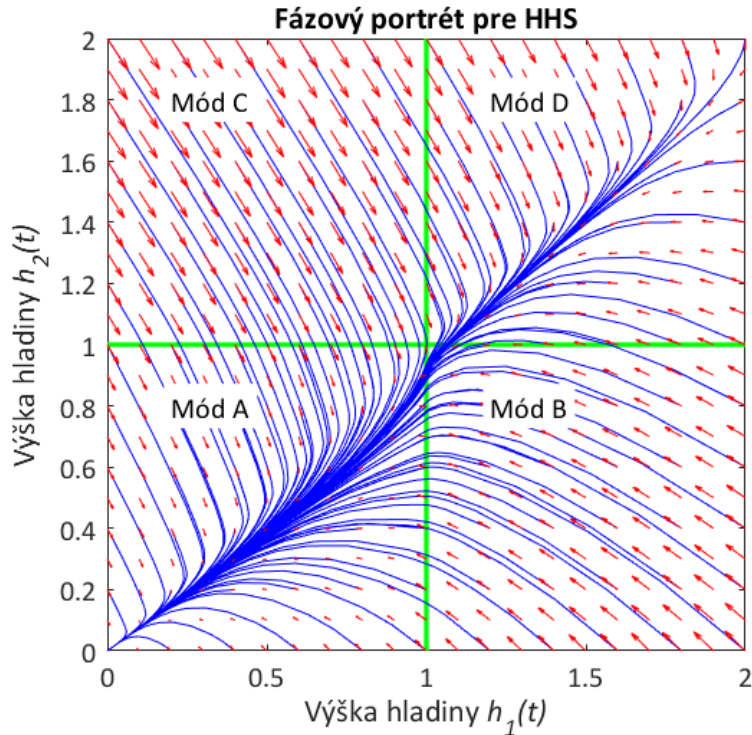
2.2.Zostrojte fázové portréty HHS pre každý mód

Fázový portrét systému zobrazuje vzájomnú závislosť dvoch stavových veličín daného systému, zväčša systému druhého rádu. Každý vektor počiatočných podmienok (PP) je zobrazený na jednu fázovú trajektóriu. Vo všeobecnosti je daný systém s dvoma stavovými premennými, v našom prípade sú to výšky hladín $h_1(t)$, $h_2(t)$. Najjednoduchším spôsobom získania fázového portréту je opakované simulovanie systému v relatívne krátkom časovom okamihu s meniacimi sa PP a vykresľovanie závislosti $h_2(t) = f(h_1(t))$. Simulačnou schémou je potom veľmi jednoduchý otvorený obvod:



Obr. 5: Simulačná schéma pre získanie fázových trajektórií

Podstatou je meniť PP vo vnútri bloku S-funkcie *Nelinearny* a zvoliť vhodný čas simulácie pre jednu fázovú trajektóriu. Krok, s ktorým sa menili PP, bol 0.2, čas simulácie pre získanie jednej fázovej trajektórie bol 1000s, nakoľko systém je veľmi pomalý. Kombináciou jednotlivých fázových trajektórií získavame fázový portrét na Obr. 6:



Obr. 6: Fázový portrét systému pri nulovom prítoku

Červené šípky v grafe boli získané dosadením jednotlivých PP (čiže dvojice $h_1(0), h_2(0)$) do diferenciálnych rovníc systému (rovnice (9),(10),(11),(12)) s ohľadom na mód systému pre dané PP. Získame hodnoty derivácií $\frac{dh_1(0)}{dt}, \frac{dh_2(0)}{dt}$ k danej dvojici PP. Zostavením matice z PP volených v istej mriežke a zostavením matice vypočítaných derivácií $\frac{dh_1(0)}{dt}, \frac{dh_2(0)}{dt}$ je možné vykresliť šípky matlabovskou funkciou *quiver*.

Fázový portrét na Obr. 6 komplexne zobrazuje vzájomnú závislosť medzi hladinami $h_1(t)$ a $h_2(t)$. Analýzou fázového portréту vidíme spomenutý jav, kedy systém má silnú tendenciu nezotrvať v móde C, ale z módu C sa presúva do módu A alebo D, čo by platilo aj pri fázovom portréte s nenulovým prítokom $q_0(t)$. Ďalej je možné usúdiť, že ak pre daný fázový portrét uvažujeme autonómny systém, t. j. $q_0(t) = 0$, je zrejmé, že po istom čase sa systém ocitne v stave $[h_1(t) \ h_2(t)] = [0 \ 0]$, teda obidve nádoby po čase vytečú, nezávisle od zvolených počiatočných podmienok.

Zostrojenie uvedených fázových portrétoů teda spočíva v:

1. Opakovanej simulácii systému so systematickým volením rôznych PP s vhodne zvoleným časom zberu dát simulácie
2. Vypočítania hodnôt derivácií stavových premenných pre jednotlivé volené PP
3. Vykreslenie šípok napr. funkciou *quiver*

3. Syntéza LQR pomocou lineárnej aproximácie HHS

Problém LQR spočíva vo vypočítaní spätnoväzobného vektora zosilnení \mathbf{k}_x , pričom súčasne minimalizujeme funkcionál:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \quad (27)$$

príčom sú prítomné obmedzenia, ktorými sú rovnice stavového opisu:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (28)$$

V rámci funkcionálu sú nastaviteľnými parametrami váhové matice \mathbf{Q} a \mathbf{R} . Po zvolení hodnôt prvkov týchto matíc je možné vypočítať spätnoväzobné zosilnenia \mathbf{k}_x a riadiaci zákon $u_{fb}(t)$:

$$u_{fb}(t) = -\mathbf{k}_x \mathbf{x}(t) \quad (29)$$

Spätnoväzobné zosilnenia je možné získať riešením Riccatiho algebraických rovníc (platí pre prípad časovo neohraničeného funkcionálu ($t = \infty$)):

$$0 = -\mathbf{k}_x \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{k}_x + \mathbf{k}_x \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{k}_x - \mathbf{Q} \quad (30)$$

3.1. Vypočítajte spätnoväzobné zosilnenia \mathbf{k}_i pre privedenie systému do rovnovážneho stavu pre každý mód

Na vypočítanie zosilnení \mathbf{k}_x sa v našom prípade využíva lineárna aproximácia systému. Spojité systémy majú len jeden vektor zosilnení \mathbf{k}_x pre celý stavový vektor, hybridný systém však môže mať jeden vektor \mathbf{k}_i pre i -ty jeden mód. Cieľom je teda získať tieto zosilnenia pre každý mód systému, teda \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{D} . Je možné naprogramovať vlastnú funkciu na získanie zosilnení, môžeme však rovno použiť matlabovskú funkciu $[k,S,e]=lqr(A,B,Q,R)$, kde $\underline{\mathbf{A}}$ je matica \mathbf{A}_n jakobiánu, $\underline{\mathbf{B}}$ je matica \mathbf{B}_n jakobiánu, $\underline{\mathbf{Q}}$ a $\underline{\mathbf{R}}$ sú váhové matice, a $\underline{\mathbf{k}}$ je spätnoväzobné zosilnenie.

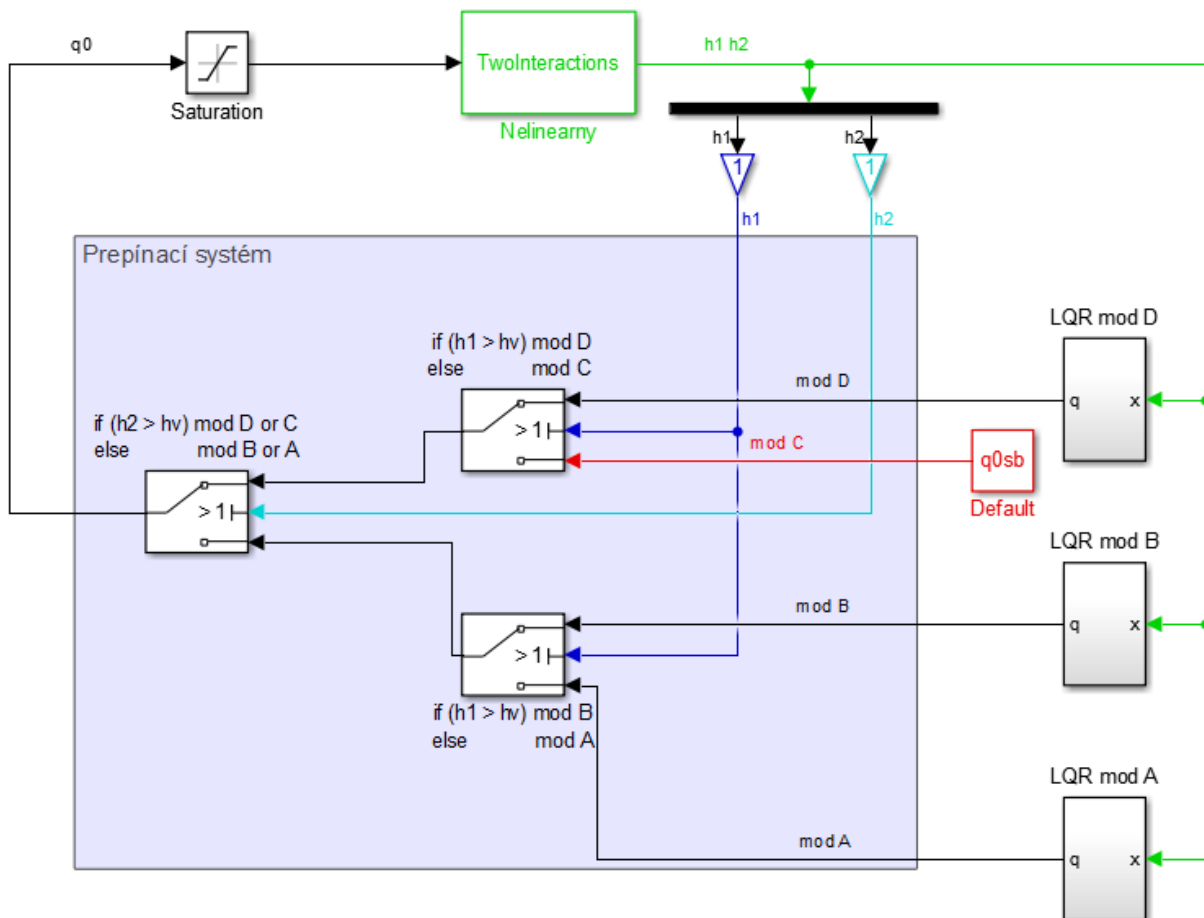
Problémom však je, že hybridný systém má viacero módov, teda aj viacero matíc \mathbf{A}_n a \mathbf{B}_n , preto aj viacero spätnoväzobných zosilnení \mathbf{k}_i . Pre každý mód je teda nutné vypočítať tieto zosilnenia \mathbf{k}_i a následne zostaviť mechanizmus, ktorý vyberie práve jednu dvojicu zosilnení \mathbf{k}_i na základe módu systému, teda stavového vektora (pomocou Tab. 3). Cieľom je navrhnúť také riadenie, ktoré privedie systém do rovnovážneho stavu aj v prítomnosti poruchy.

Zvolené hodnoty matíc boli $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{R} = 10^4$, pre tieto matice sú vypočítané zosilnenia \mathbf{k}_i v

Tab. 7. Štruktúra zostrojeného riadiaceho obvodu, ktorý spĺňa spomenuté vlastnosti, je na Obr. 7.

Tab. 7: Hodnoty spätnoväzobných zosilnení pre jednotlivé módy

Mód	Spätnoväzobné zosilnenie k_i
A	(0.0253 0.0096)
B	(0.0236 0.0163)
D	(0.0241 0.0150)



Obr. 7: Schéma zapojenia LQR pre privedenie HHS do rovnovážneho stavu

Prepínací systém – vyberá z vypočítaných zosilnení k_i jeden vektor na základe toho, v ktorom móde sa systém nachádza v danom časovom okamihu. Pomocou vybraného vektora k_i je vypočítaný akčný zásah, teda prítok $q_0(t)$. Je zostavený pomocou blokov *Switch*. Kombináciou troch *Switch* blokov sa určí mód, ktorého akčný zásah/LQR zosilnenia sa majú použiť. Medzi signálmi sa dá v Simulinku vyberať aj inými prostriedkami, avšak metóda *Switchov* bola pre tento prípad postačujúcim riešením.

Saturation – saturácia vstupu v prípade zvolenia matic Q, R , pri ktorých by riadiaci zákon $u_{fb}(t)$ prekročil hranicu maximálneho prítoku q_{0max} . Aj keď S-funkcia má v sebe zabudovanú saturáciu, tento blok je tu prítomný na poukázanie ohraničenia vstupov.

LQR mod A/B/D – bloky, ktoré na vstupe majú stavový vektor $\mathbf{h}(t)$, ten transformujú na odchýlkový stavový vektor $\Delta\mathbf{h}(t)$, na tento použijú zákon riadenia upravený pre odchýlkový stavový vektor, t. j.

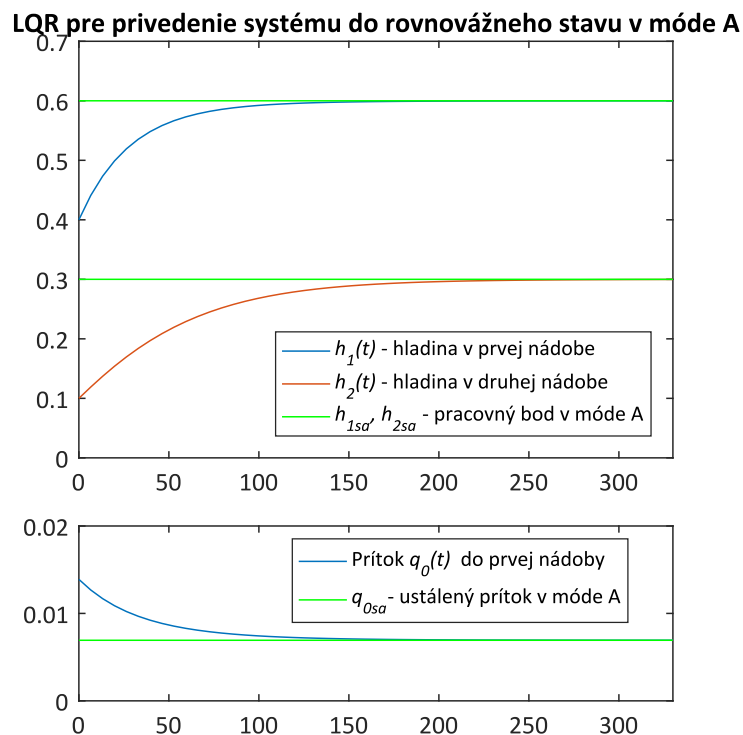
$$\Delta u_{fb}(t) = -\mathbf{k}_i \Delta \mathbf{h}(t) \quad (31)$$

a následne k tomuto odchýlkovému akčnému zásahu pripočítajú hodnotu ustáleného prítoku pre daný mód, čím získame absolútny akčný zásah aplikovaný na nelineárny systém (po saturácii)

$$u_{fb}(t) = q_{0si} + \Delta u_{fb}(t) \quad (32)$$

Default – blok pre riadenie systému v móde C; keďže v tomto móde neexistuje ustálený stav, nie je možné navrhnuť LQ riadenie, teda je prítomný iba prítok, ktorý privedie systém do iného módu, v ktorom už je možné aplikovať vypočítané LQ riadenie.

Po spustení simulácie je možné vykresliť výsledok pre počiatočné podmienky [0.4m 0.1m], t. j. v móde A:



Obr. 8: Zobrazenie privedenia HHS do rovnovážneho stavu v móde A

System sa teda ustálil v pracovnom bode módu A. Pre odchýlkový linearizovaný model je tento bod presne počiatkom $\Delta \mathbf{h}(t) = [0 \ 0]$, keďže reálna hodnota vektora $\mathbf{h}(t)$ a odchýlkový vektor $\Delta \mathbf{h}(t)$ sa líšia presne vektor hodnôt v pracovnom bode \mathbf{h}_{si} :

$$\Delta \mathbf{h}(t) = \mathbf{h}(t) - \mathbf{h}_{si} \quad (33)$$

Ak by boli PP zvolené v móde B, systém by sa ustálil v pracovnom bode módu B, teda [0.8m, 1.1125m] a podobný jav by nastal aj pre mód D. Riadiaca štruktúra na Obr. 7 privedie HHS do ustáleného stavu pre každý mód v závislosti od voľby PP, priebeh na Obr. 8 zobrazuje len ustálenie v rovnovážnom stave módu A.

Kroky pre získanie zákona riadenia pri LQR na rovnovážny stav sú:

1. Výpočet zosilnení \mathbf{k}_i pomocou Riccatiho algebraickej rovnice
2. Zostavenie vhodného riadiaceho obvodu s aplikáciou riadenia na nelineárny systém, kde je potrebné si uvedomiť
 - a. Vstupom a výstupom z nelineárneho systému sú reálne hodnoty veličín
 - b. Vstupom a výstupom z LQR sú odchýlkové hodnoty veličín
 - c. Rozdiel medzi reálnou a odchýlkovou veličinou je ustálená hodnota veličiny, t. j. pracovný bod, v okolí ktorého je aplikované riadenie

3.2. Vypočítajte dopredné zosilnenia N_i pre privedenie systému do nového ustáleného stavu pre každý mód

LQR pre privedenie systému do rovnovážneho stavu privádza nelineárny systém do jeho jednotlivých ustálených stavov v závislosti od voľby PP. Pridaním dopredného zosilnenia je možné systém riadiť na nový ustálený stav, zákon riadenia (29) nadobudne tvar:

$$u = u_{ff}(t) + u_{fb}(t) = N_i y_{ref}(t) - \mathbf{k}_x x(t) \quad (34)$$

Akčný zásah sa skladá z dvoch zložiek, $u_{fb}(t)$ riadi systém do pracovného bodu, $u_{ff}(t)$ riadi systém mimo pracovného bodu, pričom sa celkový akčný zásah snaží riadiť systém do nového ustáleného stavu, teda $y_{ref}(t)$. Nakoľko opäť na výpočet zosilnenia N_i použijeme odchýlkový linearizovaný model systému, rovnicu (34) zapíšeme v upravenom tvare:

$$\Delta u = \Delta u_{ff}(t) + \Delta u_{fb}(t) = N_i \Delta y_{ref}(t) - \mathbf{k}_x \Delta x(t) \quad (35)$$

Dopredné zosilnenie N_i je pre i -ty mód možné vypočítať pomocou vzťahu:

$$N_i = \frac{-1}{\mathbf{C}[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{k}_i]^{-1}\mathbf{B}} \quad (36)$$

Pričom matica $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, teda riadime výšku hladiny v druhej nádobe $h_2(t)$ na požadovanú hodnotu $y_{ref}(t) = \Delta y_{ref}(t) + h_{2si}$. Jednotlivé zosilnenia \mathbf{k}_i a N_i sú pre dané módy:

Tab. 8: Hodnoty dopredných a spätnoväzobných zosilnení LQR

Mód	Spätnoväzobné zosilnenie \mathbf{k}_i	Dopredné zosilnenie N_i
A	(0.0253 0.0096)	0.0716
B	(0.0236 0.0163)	0.0377
D	(0.0241 0.0150)	0.0509

Vzťah pre výpočet vstupu do HHS je pre i -ty mód potom:

$$\Delta q_0(t) = -\mathbf{k}_i \Delta \mathbf{h}(t) + N_i \Delta y_{ref}(t) \quad (37)$$

kde $\Delta y_{ref}(t)$ je nový ustálený stav. Toto riadenie v takomto tvare je možné použiť priamo na lineárnu aproximáciu HHS, nie však na nelineárny model. Preto je nutné navrhnuť vhodnú schému na aplikovanie zákona riadenia (37) na nelineárny systém a zároveň zabezpečiť prepínanie medzi jednotlivými zosilneniami systému v závislosti od aktuálneho módu.

Postup pre získanie LQR na nový ustálený stav sa líši voči LQR na rovnovážny stav len výpočtom dopredného zosilnenia N_i .

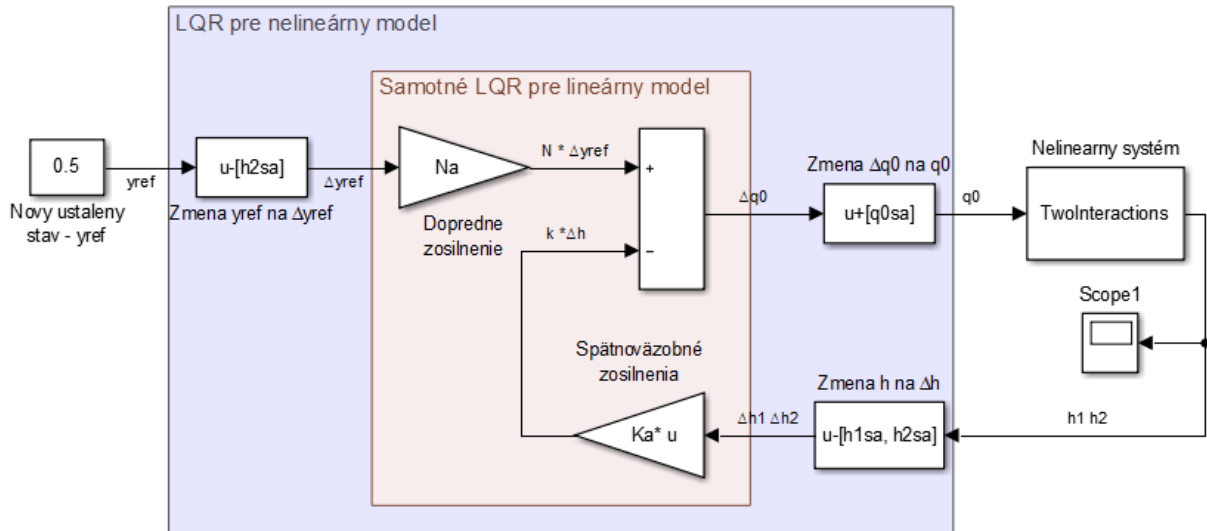
3.3. Aplikujte navrhnuté LQ riadenie na nový ustálený stav na nelineárny hybridný systém

Pre detailné zobrazenie LQ riadenia odvodeného z lineárnej aproximácie aplikovaného priamo na nelineárny hybridný systém je v tomto tutoriáli zobrazené aplikovanie LQR len na jeden mód, následné pridanie zosilnení pre všetky módy.

Vo vzťahu (37) vidíme, že vstupom do LQR riadenia je odchýlkový stavový vektor $\Delta \mathbf{h}(t)$ a odchýlkový nový ustálený stav $\Delta y_{ref}(t)$ a výstupom je odchýlkový prítok $\Delta q_0(t)$. Naopak, HHS má na vstupe $q_0(t)$ a na výstupe ($h_1(t)$ $h_2(t)$). Reálny stav voči odchýlkovému sa líši presne o hodnotu ustálených veličín, teda pre i -ty mód platí:

$$\begin{aligned} \Delta h_1(t) &= h_1(t) - h_{1si} \\ \Delta h_2(t) &= h_2(t) - h_{2si} \\ \Delta q_0(t) &= q_0(t) - q_{0si} \\ \Delta y_{ref}(t) &= y_{ref}(t) - h_{2si} \end{aligned} \quad (38)$$

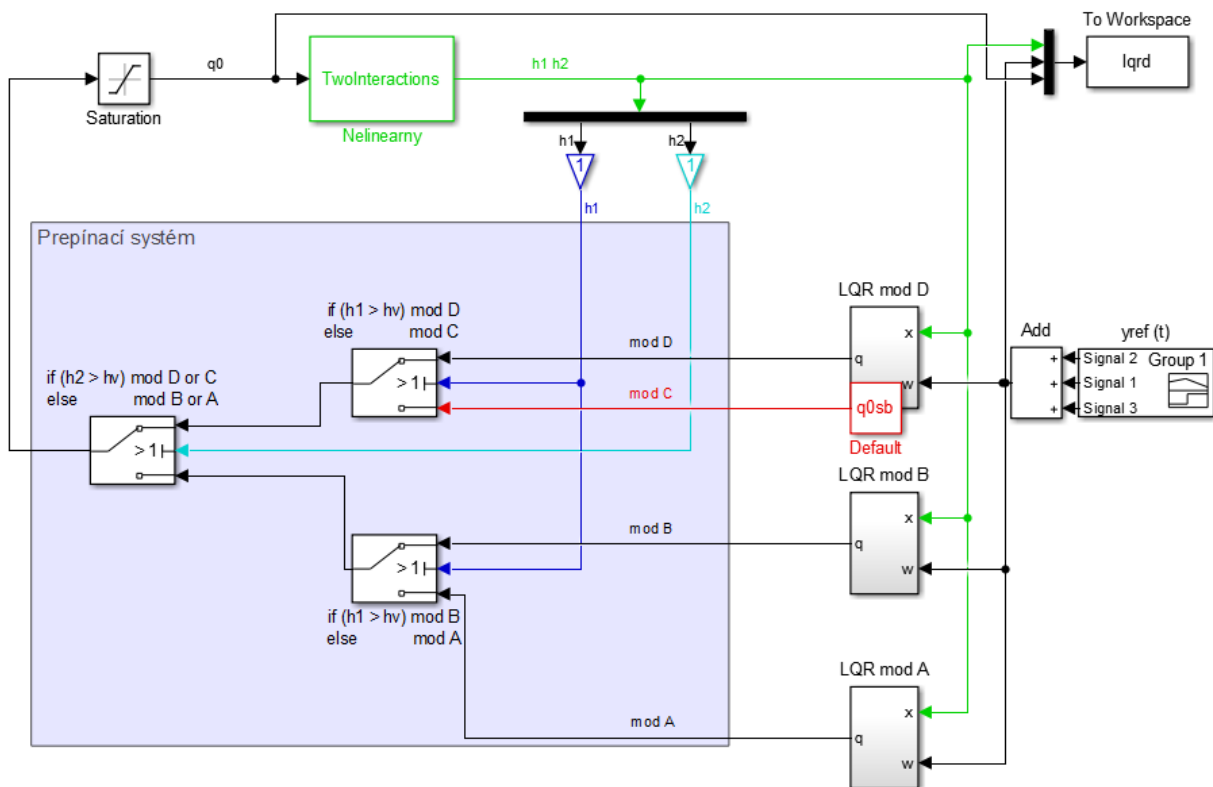
Vzťah pre $\Delta y_{ref}(t)$ sa líši o h_{2sa} voči skutočnej hodnote nového ustáleného stavu $y_{ref}(t)$, pričom nami zvolený nový ustálený stav má hodnotu $y_{ref}(t)$.



Obr. 9: Schéma LQR pre mód A, nelineárny systém

Na Obr. 9 je viditeľne zobrazené, ako sú na vstupe a výstupe LQR regulátora (červený blok) iba veličiny v odchýlkovom tvare ($\Delta h_1(t), \Delta h_2(t), \Delta q_0(t)$) a na vstupe a výstupe nelineárneho systému sú skutočné hodnoty veličín ($h_1(t), h_2(t), q_0(t)$). Je možné vytvoriť subsystém (modrý blok), ktorý bude priamo konvertovať skutočné hodnoty na odchýlkové, aplikuje zákon riadenia (37) a konvertuje odchýlkový prítok na skutočný.

Ďalším krokom je vytvoriť takýto subsystém (*LQR pre nelineárny model* na Obr. 9) pre každý mód, čiže meniť hodnoty $h_{1si}, h_{2si}, q_{0si}, N_i, k_i$. Následne sa vytvorí prepínací systém, ktorý zistí, v akom móde sa systém nachádza (na základe Tab. 3) a použije subsystém regulátora LQR príslušného módu na určenie akčného zásahu, pričom tento proces opakuje v každom časovom okamihu:

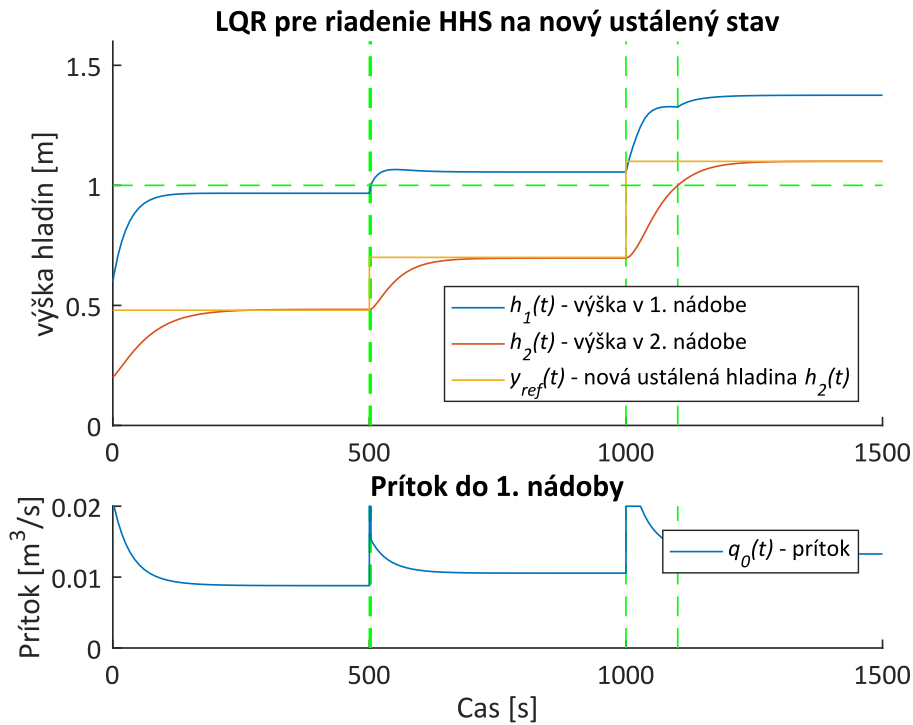


Obr. 10: Schéma aplikovania LQR na nový ustálený stav na HHS

LQR mod A/B/D obsahuje LQR regulátor pre mód A, B alebo D (sú to subsystémy *LQR pre nelineárny model* na Obr. 9).

Zvyšné prvky simulačného modelu majú rovnakú funkcionálnosť ako v schéme na Obr. 7, pričom táto schéma obsahuje v blokoch *LQR mod A/B/D* aj dopredné zosilnenia a blok nového ustáleného stavu $y_{ref}(t)$.

Simuláciou potom získavame priebehy výšok hladín $h_1(t)$, $h_2(t)$ a taktiež priebeh prítoku $q_0(t)$ na Obr. 11. Pri skokovitej zmene $y_{ref}(t)$ v čase $t = 500s$ a $t = 1000s$ vypočítaná hodnota prítoku $q_0(t)$ čiastočne prekročila saturáciu, na systém preto pôsobil maximálny povolený prítok $q_{0max} = 0.02m^3s^{-1}$. Pozoruhodné je, že LQR riadenie bolo navrhnuté na nelineárny systém, ale vhodnými úpravami riadi hladinu $h_2(t)$ na nový ustálený stav v každom móde. Skokovité zmeny hodnoty prítoku $q_0(t)$ v momente, kedy sa mení $y_{ref}(t)$ a v momente zmeny módu systému sú indikované zelenými čiarami, ktorou je rovnako zobrazená aj výška h_v horného ventila k_2 .



Obr. 11: Priebeh výšok hladín HHS pri aplikovaní LQR riadenia a priebeh akčného zásahu

Zhrnutie tutoriálu

Na záver môžeme zhodnotiť, že sme týmto tutoriálom načrtli základné vlastnosti hybridných systémov, spôsoby modelovania HS pomocou diferenciálnych rovníc a podmienok zotrvania v módoch HS. Z hľadiska implementácie HS do prostredia MATLABu a Simulinku je využitá S-funkcia, ktorej vlastnosti sú veľmi užitočné pri vytváraní simulačného modelu HS. V oblasti analýzy HS sú obzvlášť zaujímavé fázové portréty, nakoľko môžu priamo zobrazovať prechod medzi jednotlivými módmí HS. Lineárna aproximácia rozvojom do Taylorovho radu sa pri HS vypočíta štandardným postupom ako pri spojitých systémoch. Pri syntéze riadenia bolo možné vidieť aplikáciu riadenia navrhnutého pomocou lineárneho odchýlkového modelu na nelineárny systém, a to pre privedenie HS do rovnovážnych stavov a aj do nových ustálených stavov.