

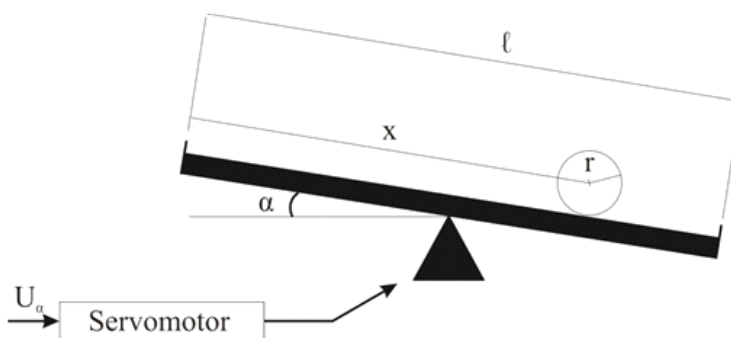
Programový modul pre modelovanie, riadenie a simuláciu výukového modelu Gul'ôčka na tyči

Nelineárny dynamický systém gul'ôčka na tyči (Ball & Beam) sa využíva prevažne vo výuke za účelom praktického overenia nadobudnutých poznatkov z modelovania a riadenia nestabilných nelineárnych dynamických SISO systémov. Pre tento model je typická nestabilita v otvorenej slučke a existencia viacerých metód návrhu riadenia, ktoré sú aplikovateľné na tento model.

S podobnými problémami pri riadení sa môžeme stretnúť napr. pri štarte rakety (popr. raketoplánu), kde je potrebné aktívne riadenie na zabezpečenie stability pred prevrátením alebo pri stabilizovaní a optimalizovaní správania lietadla pri jeho dizajnovaní.

1. Charakteristika výukového modelu Gul'ôčka na tyči

Na Obr. 1 je znázornená jedna z alternatív konštrukcie modelu Gul'ôčka na tyči. Servomotor, ktorý nakláňa tyč, môže byť tiež umiestnený aj na jednom z koncov tyče.



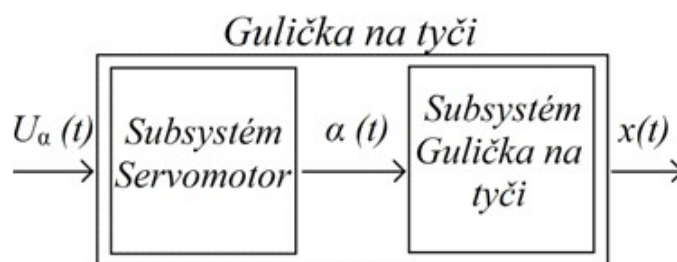
Obr. 1: Model Gul'ôčky na tyči

Popis fyzikálnych veličín a parametrov modelu Gul'ôčka na tyči je:

- $U_\alpha(t)$ – vstupné napätie privádzané do servomotora,
- $\alpha(t)$ – uhol natočenia tyče,
- $x(t)$ – poloha gul'ôčky na tyči,
- l – dĺžka tyče,
- m – hmotnosť gul'ôčky,
- r – polomer gul'ôčky.

2. Matematicko – fyzikálny opis systému

Nelineárny dynamický systém Gul'ôčka na tyči môžeme dekompozíciou rozdeliť na subsystém Servomotor a subsystém Gul'ôčka na tyči, ktoré sú znázornené na Obr. 2



Obr. 2 Rozdelenie modelu na subsystémy

2.1 Subsystém servomotora

Tyč je nakláňaná pomocou krokového servomotora, ktorý môžeme nahradiť lineárnou obrazovým prenosom 1. rádu

$$F_{servo} = \frac{K_u}{T_a s + 1} \quad (1)$$

2.2 Subsystém gul'ôčky na tyči

Na odvodenie matematického modelu subsystému Gul'ôčka na tyči použijeme Lagrangeove rovnice druhého druhu, ktorých základný tvar je

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

kde

- L – Lagrangeova funkcia predstavujúca rozdiel celkovej kinetickej a potenciálnej energie (tzv. kinetický potenciál),
- q_i – i -ta nezávislá zovšeobecnená súradnica,
- \dot{q}_i – derivácia i -tej zovšeobecnenej súradnice,
- Q_i – i -ta zovšeobecnená sila podľa.

Subsystém Gul'ôčka na tyči má jeden stupeň voľnosti (pohyb gul'ôčky po tyči), čo znamená, že subsystém má jednu nezávislú zovšeobecnenú súradnicu $q_i = x$.

Ak pre zjednodušenie modelu neuvažujeme zovšeobecnenú silu Q_i , potom rovnica (1) má tvar

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

kde

$$L = E_k - E_p \quad (4)$$

Pričom celkovú kinetickú energiu tvorí kinetická energia rotačného pohybu s momentom zotrvačnosti J a uhlovou rýchlosťou ω okolo osi prechádzajúcej stredom gul'ôčky a

kinetickej energie posuvného pohybu guľôčky, hmotnosti m a rýchlosťou v

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2(t) + \frac{1}{2}J\omega^2(t) \quad . \quad (5)$$

Po substitúcii za $\omega = \frac{v}{r}$ a po úprave dostaneme

$$E_k = \frac{1}{2}\left(m + \frac{J}{r^2}\right)v^2(t) \quad . \quad (6)$$

Celková potenciálna energia subsystemu je daná vzťahom

$$E_p = mgx(t)\sin\alpha(t) \quad . \quad (7)$$

Po úvahe, že rýchlosť je rovná prvej derivácii polohy, po dosadení rovníc (6), (7) do rovnice (4) a po úprave dostaneme kinetický potenciál v tvare

$$L = \frac{1}{2}\left(m + \frac{J}{r^2}\right)\dot{x}(t) - mgx(t)\sin\alpha(t) \quad . \quad (8)$$

Dosadením rovnice (8) do rovnice (3) a následnou úpravou dostaneme výslednú pohybovú rovnicu subsystemu Guľôčka na tyči v nasledovnom tvare

$$\left(m + \frac{J}{r^2}\right)\ddot{x}(t) - mg\sin\alpha(t) = 0 \quad . \quad (9)$$

2.3 Matematický model Guľôčky na tyči

Model Guľôčky na tyči je možné opísať vo forme nelineárneho stavového opisu v afinnom tvare

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u_{MU} \\ y_{MU} &= h(x) \quad . \end{aligned} \quad (10)$$

Uvažujme model Guľôčky na tyči ako model 3. rádu, kde vektor x je definovaný ako

$$x = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad (11)$$

kde x_1 reprezentuje pozíciu guľôčky na tyči, x_2 predstavuje rýchlosť guľôčky a x_3 uhol naklonenia tyče α .

Potom nelineárny dynamický systém modelu Guľôčky na tyči v afinnom tvare je definovaný nasledovne

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3) = x_2 \quad , \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{mg\sin(x_3)}{\left(m + \frac{J}{r^2}\right)} \quad , \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3) = -\frac{x_3}{T_a} \quad , \end{aligned} \quad (12)$$

alebo v stavovom priestore

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{mgsin(x_3)}{(m + \frac{J}{r^2})} \\ -\frac{x_3}{T_a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{T_a} \end{pmatrix} u \quad ,$$

$$y_{MU} = \begin{pmatrix} K_x x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (13)$$

3. Nelineárny simulačný model

Úloha 3.1:

Na základe rovníc (1) a (9) vytvorte simulačný model v programovom prostredí MatLab/Simulink. Nezabúdajte, že do simulačného modelu subsystému Gul'ôčky na tyči implementujte aj odrazenie gul'ôčky od okrajov tyče (s dĺžkou tyče l a konštantou odrazu b).

Úloha 3.2:

Otestujte model v otvorenej slučke na tieto signály

- pulzný signál,
- sínusoidný signál

a výsledky graficky zobrazte. Nezabúdajte, že vstup u privádzaný na servomotor musí byť v rozsahu $(-1, 1)$.

4. Lineárna syntéza

Úloha 4.1:

Pre zjednodušenie linearizácie uvažujme, že pri veľmi malých uhloch α platí $\sin \alpha \approx \alpha$. Potom na základe rovníc (1) a (9) určte výsledný obrazový prenos modelu Gul'ôčky na tyči, pričom vezmite v úvahu aj prenos K_x statického snímača.

Úloha 4.2:

Rozvojom nelineárneho modelu (9) do Taylorovho radu v pracovnom bode $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a pridaním 3. stavu reprezentujúceho uhol naklonenia servomotora (1) zostavte lineárny model v stavovom priestore v tvare

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx. \end{aligned} \quad (14)$$

Úloha 4.3:

Na obrazový prenos získaný po vypracovaní úlohy 4.1 navrhnete PID regulátory metódou štandardných tvarov podľa Butterwortha a Graham – Lathropa. Cieľom riadenia nech je sledovanie referenčnej trajektórie. Overte navrhnuté algoritmy riadenia na nelineárnom simulačnom modeli Gul'ôčky na tyči.

Úloha 4.4:

Na lineárny model (14) navrhnete stavové LQ riadenie do ustáleného stavu (stavová spätná väzba K, zosilnenie riadiacej veličiny N), s využitím funkcie *lqr* v MatLab-e. Cieľom riadenia nech je sledovanie referenčnej trajektórie. Overte navrhnuté algoritmy riadenia na nelineárnom simulačnom modeli Gul'ôčky na tyči.

Úloha 4.5:

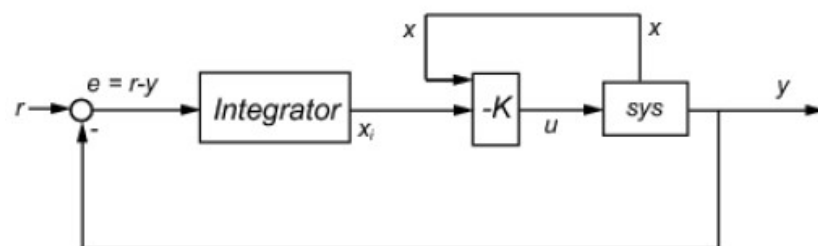
Na lineárny model (14) navrhnete stavové riadenie s integračnou zložkou (LQI). Najskôr je potrebné rozšíriť stavový opis lineárneho modelu (14) o ďalší stav (odchýlku e výstupu y od požadovanej hodnoty r), ktorý je definovaný

$$e = r - y. \quad (15)$$

Vektor x tak nadobudne 4. stav, a lineárny stavový model použitý pre návrh stavového LQI riadenia tak nadobudne tvar

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u_{MU} \\ y_{MU} &= (C \quad 0) \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

Na lineárny model (16) navrhnete stavové riadenie s integračnou zložkou (LQI) do ustáleného stavu (stavová spätná väzba K, zosilnenie riadiacej veličiny N), s využitím funkcie *lqi* v MatLab-e. Cieľom riadenia nech je sledovanie referenčnej trajektórie. Overte navrhnuté algoritmy riadenia na nelineárnom simulačnom modeli magnetickej levitácie v riadiacej štruktúre podľa Obr. 3.



Obr. 3 Schéma zapojenia LQI stavového regulátora

5. Nelineárna syntéza – metóda spätnoväzobnej exaktnej linearizácie

V tejto časti si ukážeme ako aplikovať metódu spätnoväzobnej exaktnej linearizácie v riadení SISO systémov. Táto metóda spočíva vo výpočte Lie derivácií, avšak najskôr si zdefinujeme niektoré základné pojmy.

5.1 Lieho operátor

Pre skalárnu funkciu $\lambda(x) = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorovej premennej $x(x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ a n – rozmernú vektorovú funkciu

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

definujme novú skalárnu funkciu premennej x nazývanú Lieho operátor, ktorá sa zvyčajne označuje $L_f \lambda(x)$, pričom

$$L_f \lambda(x) = L_f \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (18)$$

Po označení $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}, \frac{\partial \lambda}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} \right)$ možno funkciu $L_f \lambda(x)$ jednoducho vyjadriť

ako

$$L_f \lambda(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} f(x). \quad (19)$$

nová funkcia $L_f \lambda(x)$ sa nazýva aj derivácia $\lambda(x)$ pozdĺž $f(x)$. Možné je aj opakované použitie tejto operácie. Napríklad derivovaním $\lambda(x)$ najskôr pozdĺž $f(x)$ a potom pozdĺž $g(x)$ je možné skonštruovať funkciu

$$L_g L_f \lambda(x) = \frac{\partial L_f \lambda}{\partial x} g(x). \quad (20)$$

Derivovaním $\lambda(x)$ k – krát pozdĺž $f(x)$ môžeme rekurzívne definovať funkciu

$$L_f^k \lambda(x) = \frac{\partial L_f^{k-1} \lambda}{\partial x} f(x). \quad (21)$$

5.2 Relatívny rád systému

Pomocou Lieho operátora si zdefinujeme pojem relatívneho rádu systému. Daný nelineárny systém (10) má relatívny rád r v bode x_0 , ak pre všetky x z okolia x_0 a pre všetky $k < r-1$ platí výraz $L_g L_f^k \lambda(x) = 0$, pričom pre $k = r-1$ platí $L_g L_f^{r-1} \lambda(x) \neq 0$.

5.3 Lokálna transformácia súradníc

Predpokladajme, že nelineárny systém má relatívny rád r v bode x_0 a $r = n$, kde n je rád nelineárneho systému. Potom vieme rekurzívnym výpočtom Lieho operátorov získať lokálnu transformáciu súradníc $\phi(x)$, ktorá je definovaná nasledovne

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \dots \\ \phi_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x) \\ L_f \lambda(x) \\ \dots \\ L_f^{r-1} \lambda(x) \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Zobrazenie $\phi(x)$ má regulérnu Jaccobiho maticu v bode x_0 , a preto možno toto zobrazenie považovať za lokálnu transformáciu súradníc v okolí bodu x_0 .

Nech prvá nová súradnica je rovná $z_1 = y = h(x)$, potom opis systému v nových súradniciach je v tvare

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{\partial \phi_1(x)}{\partial x} \frac{\partial dx}{\partial dt} = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \frac{\partial dx}{\partial x} = L_f h(x) = \phi_2(x) = z_2(t), \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= L_g L_f^{r-1} h(x) u = \phi_r(x) = z_r, \\ \dot{z}_r &= L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) u. \end{aligned} \quad (23)$$

5.4 Implementácia metódy exaktnej linearizácie

Na získanie lineárnej formy nelineárneho systému sú potrebné dva kroky

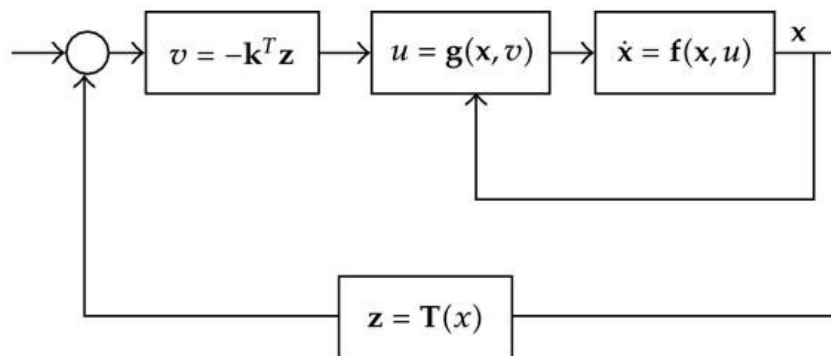
- lokálna zmena súradníc podľa rovnice (22),
- z poslednej rovnice sústavy rovníc (23) vieme definovať spätnú väzbu potrebnú na výpočet vstupu $u(t)$ nelineárneho systému v tvare

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} (v - L_f^r h(x)), \quad (24)$$

kde v predstavuje nový vstup do systému opísaného sústavou rovníc (23). Nový transformovaný systém, ktorý sme dosiahli spätnou väzbou (24) sa správa ako séria integrátorov zapojených za sebou. Tento transformovaný systém vieme zapísať v tvare

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v, \\ y &= (1 \ 0 \ \dots \ 0) z \end{aligned} \quad (25)$$

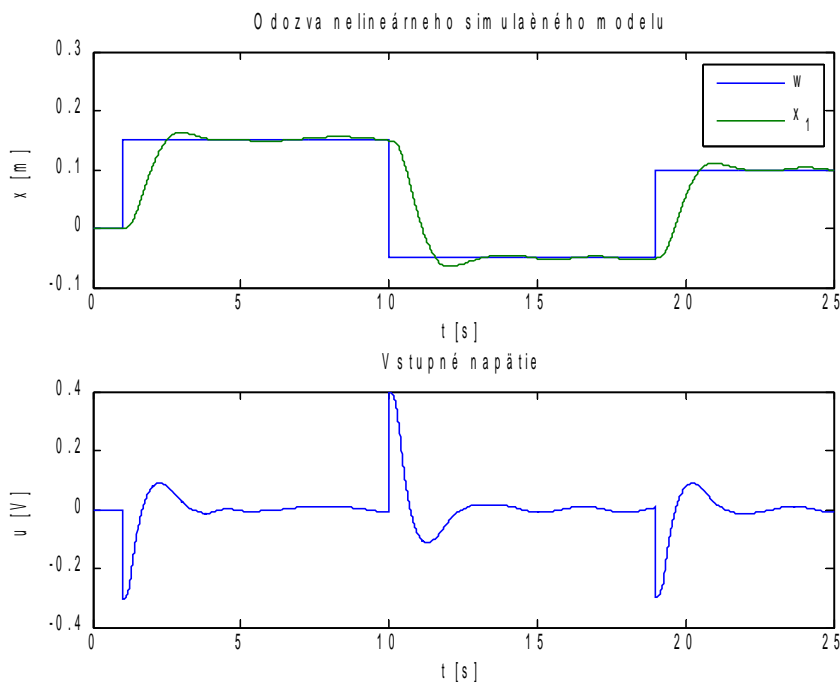
Na lineárny riaditeľný systém v tvare (24) môžeme aplikovať metódy lineárnej syntézy, ako sú napríklad stavové LQ, LQI riadenie, metóda umiestnenia pólov apod. Výsledky spätoväzobnej linearizácie a následný návrh lineárnej spätnej väzby implementujeme do riadiacej štruktúry podľa Obr. 4.



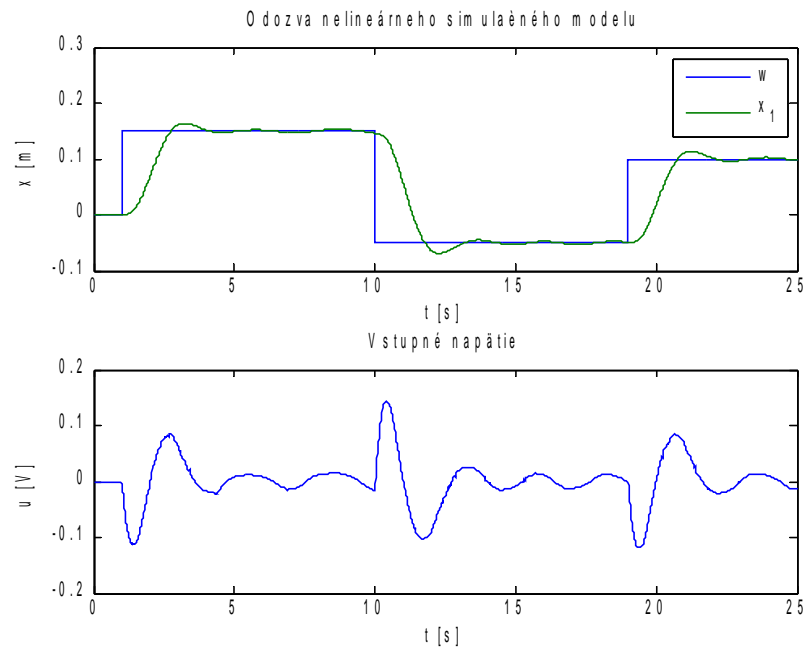
Obr. 4 Implementácia spätnoväzobnej exaktnej linearizácie v riadacej štruktúre

5.5 Simulácia riadenia Gul'ôčky na tyči s využitím metódy exaktnej linearizácie a stavových LQR, LQI regulátorov

Lineárne stavové LQR, LQI regulátory navrhne rovnakým spôsobom ako na lineárny systém získaný rozvojom do Taylorovho radu avšak na systém popísaný rovnicami (25). Pokiaľ boli nelineárna syntéza, LQR a LQI stavové riadenia transformovaného systému navrhnuté správne, výstup nelineárneho systému bude verne sledovať referenčnú trajektóriu. Na Obr. 5 je znázornený grafický výsledok simulácie riadenia lineárneho systému (25) LQR regulátorom a na Obr. 6 je zobrazený výsledok simulácie riadenia lineárneho systému (25) LQI regulátorom.



Obr. 5 Výsledok simulácie riadenia metódou exaktnej linearizácie spolu so stavovým LQR regulátorom



Obr. 6 Výsledok simulácie riadenia metódou exaktnej linearizácie spolu so stavovým LQI regulátorom