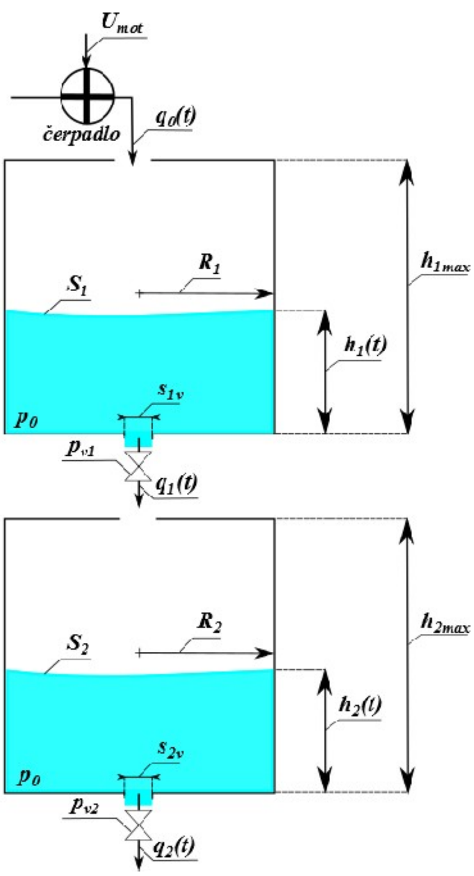
M5 Model "Valcové nádrže bez interakcie"

Úlohy:

1. **Zostavte matematický popis modelu M5**
2. **Vytvorte simulačný model v prostredí:**
   a. **Matlab**
      i. **riešenie funkciou ode45**
      ii. **riešenie naprogramovanou funkciou, ktorá využíva algoritmus metódy Runge Kutta**
   b. **Simulink**
      - **zostavenie programovej schémy metódou znižovania rádu derivácie**
3. **Simulujte dynamiku systému ako odozvu na rôzne vstupné signály**
4. **Navrhnite a simulujte riadenie hydraulického systému M5 v prostredí Simulink**
   a. **Linearizácia a prenosová funkcia hydraulického systému**
   b. **Výpočet parametrov PID regulátora metódou syntézy Butterworth (metóda štandardných tvarov)**

Pre riešenie úloh uvažujeme nasledovné:



Obr. 1 M5 Model Valcové nádrže bez interakcie

Parametre:

R_1 - polomer 1. nádoby
d_1 - priemer výtokového otvoru 1. nádoby
s_1 - plocha výtokového otvoru 1. nádoby
S_1 - plocha hladiny v 1.j nádrži
p_1 - percento otvorenia ventilu 1. nádrže
R_2 - polomer 2. nádoby
d_2 - priemer výtokového otvoru valcovej nádoby
s_2 - plocha výtokového otvoru valcovej nádoby
S_2 - plocha hladiny v 2. nádrži
p_2 - percento otvorenia ventilu 2. nádrže
ρ - hustota kvapaliny
g - gravitačné zrýchlenie

pozn.: obe nádoby sú valcového tvaru

Fyzikálne veličiny:

$q_0\,(t)$ - prítok do guľovej nádrže
$q_1\,(t)$ - voľný odtok z 1. nádrže
$q_2\,(t)$ - voľný odtok z 2. nádrže
$v_1\,(t)$ - rýchlosť poklesu hladiny v 1. nádrži
$v_{11}\,(t)$ - odtoková rýchlosť z 1. nádrže
$v_2\,(t)$ - rýchlosť poklesu hladiny v 2. nádrži
$v_{22}\,(t)$ - odtoková rýchlosť z 2. nádrže
$h_1\,(t)$ - výška hladiny v 1. nádrži
$h_2\,(t)$ - výška hladiny v 2. nádrži

pozn.:Fyzikálne veličiny ďalej v texte sú uvedené nasledovne: $q_0\,(t) = q_0$, $q_1\,(t) = q_1$, $q_1\,(t) = q_1$, $v_1\,(t) = v_1$, $v_{11}\,(t) = v_{11}$, $v_2\,(t) = v_2$, $v_{22}\,(t) = v_{22}$

Úloha č.1: Zostavte matematický popis modelu M5

Matematický popis uvažovaného hydraulického systému získame využitím rovnice kontinuity $Q_m = \rho . S . v = konšt.$ ($v(t) = v$ - *rýchlosť prúdenia kvapaliny)*, pre nestlačiteľnú kvapalinu:

$$Q_m = S_1 . v_1 = s_1 . v_{11} = S_2 . v_2 = s_2 . v_{22} = konšt., \quad (1.1)$$

ktorá hovorí, že hmotnostný tok Q_m vyjadrujúci objem kvapaliny s hustotou ρ, ktorý pretečie potrubím s prierezom S rýchlosťou v za jednotku času, je v každom mieste potrubia konštantný. Pomocou Torriceliho vzorca

$$v = \sqrt{2 . g . h}, \quad (1.2)$$

možno pre zmenu objemu kvapaliny v 1. nádrži písať:

$$S_1 . \frac{d\, h_1(t)}{dt} = q_0(t) - q_1(t) \quad (1.3)$$

(ďalej v text platí: $\dot{h}_1(t) = \frac{dh_1(t)}{dt}, q_0(t) = q_0, q_1(t) = q_1$)

$$S_1 . \dot{h}_1 = q_0 - s_1 . v_{11} \quad (1.4)$$

a výsledná diferenciálna rovnica je: $S_1 . \dot{h}_1(t) = q_0 - s_1 . \sqrt{2 . g . h_1(t)}$. (1.5)

Analogicky pre zmenu objemu kvapaliny v druhej nádrži platí:

$$S_2 . \dot{h}_2(t) = p_1 . s_1 . \sqrt{2 . g . h_1(t)} - p_2 . s_2 . \sqrt{2 . g . h_2(t)}, \quad (1.6)$$

kde p_1, p_2 je percento otvorenia ventilu 2. nádoby.

Úloha č.2: Vytvorte simulačný model v prostredí Matlab, Simulink

Uvažujte závislosť prietoku q_0 od napätia U, ktorá je daná tabuľkou č.1. Aproximujte dáta z tabuľky lineárnou funkciou:

$$q_0 = a . U + b \quad . \quad (2.1)$$

Netreba zabudnúť, že je nutné ošetriť, aby pri nulovom napätí bol prietok ($\boldsymbol{q_0}$) rovný 0.

Tab. 1 Závislosť medzi vstupným napätím prietokom čerpadla

U [V]	q_0 [cm^3/s]
2	8.6922
3	12.1942
4	14.5142
5	16.8240
6	19.3231

Simulačný model vytvoríme úpravou matematického modelu (diferenciálna rovnica) na substitučný kanonický tvar:

$$\boldsymbol{h_1(t) = x_1(t)} \tag{2.2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\dot{h}_1(t) = \dot{x}_1(t) = \frac{q_0 - p_1.s_1.\sqrt{2.g.x_1(t)}}{S_1}}} \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{h_2(t) = x_2(t)} \tag{2.4}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\dot{h}_2(t) = \dot{x}_2(t) = \frac{p_1.s_1.\sqrt{2.g.x_1(t)} - p_2.s_2.\sqrt{2.g.x_2(t)}}{S_2}}} \tag{2.5}$$

a. Matlab

Na základe rovníc (2.1), (2.3) a (2.5) vytvoríme v Matlabe simulačný model ako:

i) riešenie funkciou ode45:

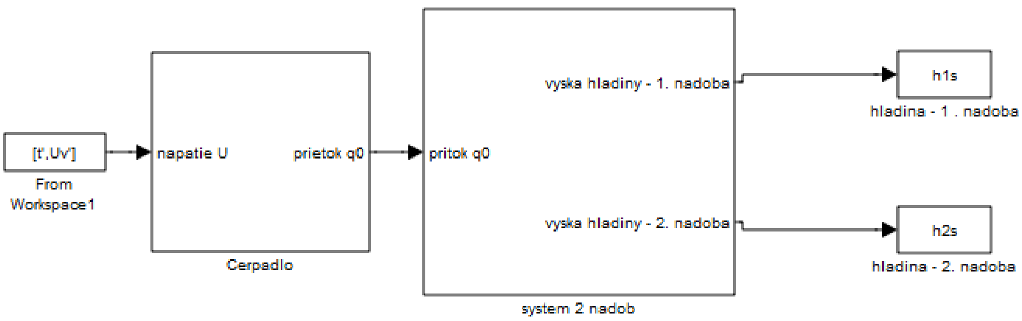
[t,y]=ode45(funkcia,[doba simulácie],[počiatočné podmienky]);

ii) riešenie naprogramovanou funkciou, ktorá využíva algoritmus metódy Runge Kutta

Na základe numerickej metódy riešenia diferenciálnych rovníc Runge Kutta navrhnite algoritmus a implementujte ho v prostredí Matlab, kde vstupom je počiatočná hodnota času, počiatočné podmienky a krok uvedenej metódy. Riešenie je možné realizovať ako 2 funkcie (funkcia pre 1. valcovú nádobu a funkcia pre 2. valcovú nádobu), kde návratová hodnota z oboch je priebeh výšky hladiny (ako vektor) alebo ako 1 funkcia, ktorej návratová hodnota je matica (2 x n, resp. n x 2, n ϵ N) obsahujúca v prvom riadku (resp. stĺpci) priebeh hladiny 1. valcovej nádrže a v druhom priebeh 2. valcovej nádrže.

b. Simulink - zostavenie programovej schémy metódou znižovania rádu derivácie

V jazyku Simulink vychádzame z rovnakých rovníc (2.1), (2.3), (2.5), ale rovnicu realizujeme pomocou funkčných blokov.



Obr. 2 Programová schéma v Simulinku modelu M5

Úloha č.3: Simulujte dynamiku systému ako odozvu na rôzne vstupné signály

Parametre simulovaného modelu:

$R_1 = 2$ cm, $d_1 = 0.325$ cm , $p_1 = 0.85$, $s_1 = \pi.(\frac{d}{2})^2 = 0.083\ cm^2$

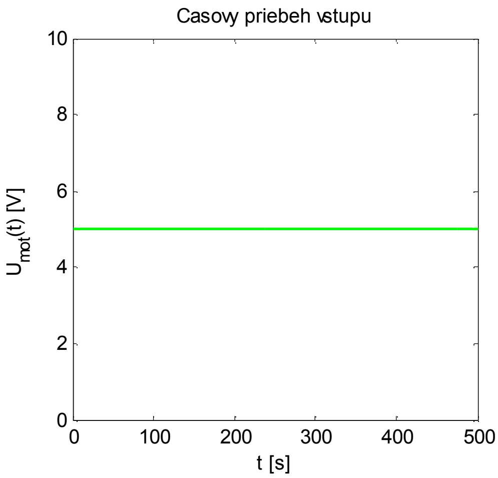
$R_2 = 2$ cm, $d_2 = 0.325$ cm , $p_2 = 0.95$, $s_2 = \pi.(\frac{d}{2})^2 = 0.083\ cm^2$

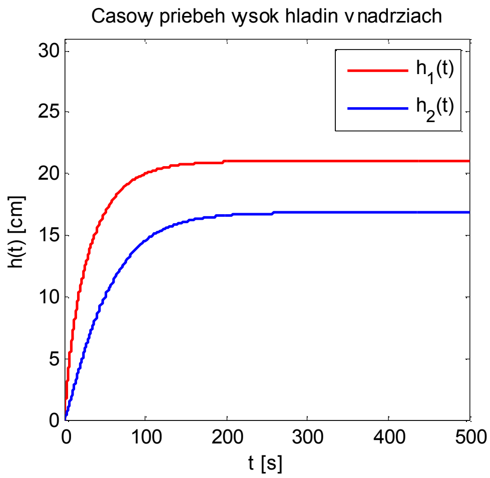
$T_{sim} = 500\ s$

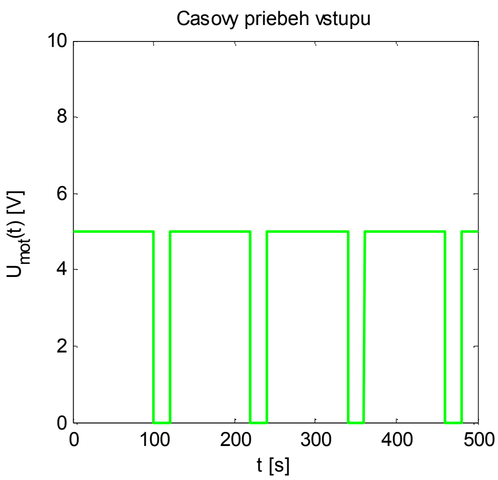
$dT = 0.1\ s$

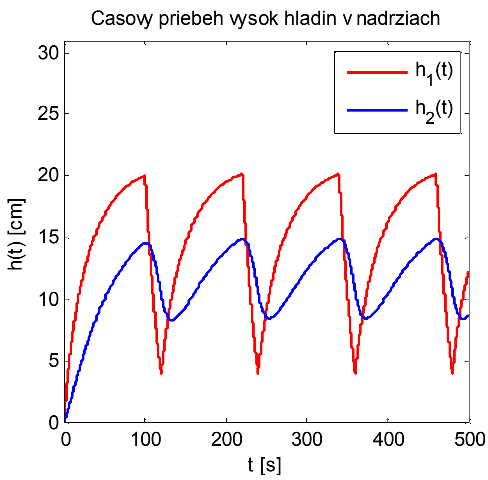
$U_{mot} = 3V$

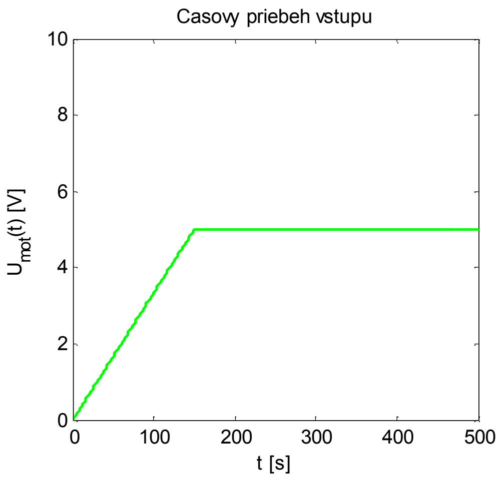
- **Simulačný model s počiatočnými podmienkami:**
  $h_1(0) = 0$ cm, $h_2(0) = 0$ cm

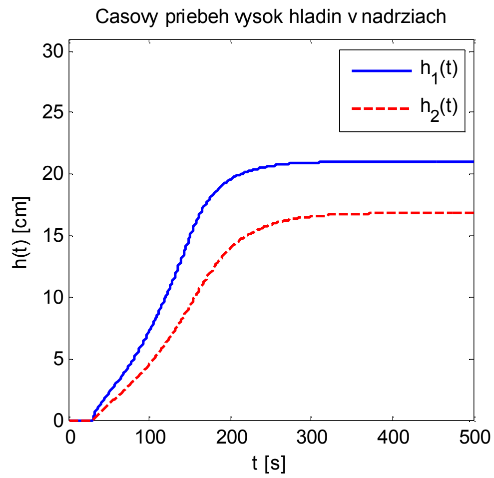




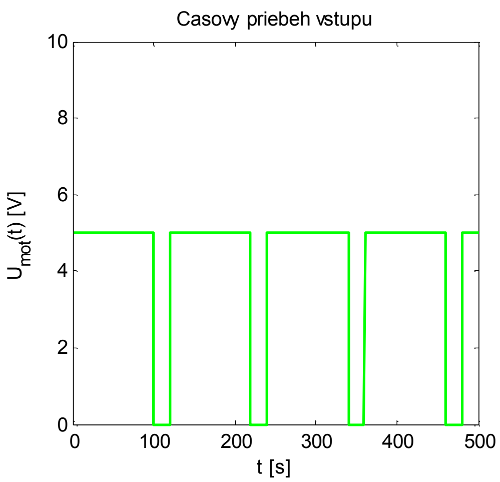


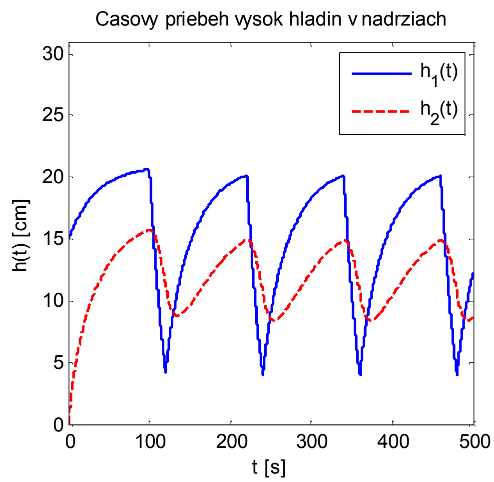


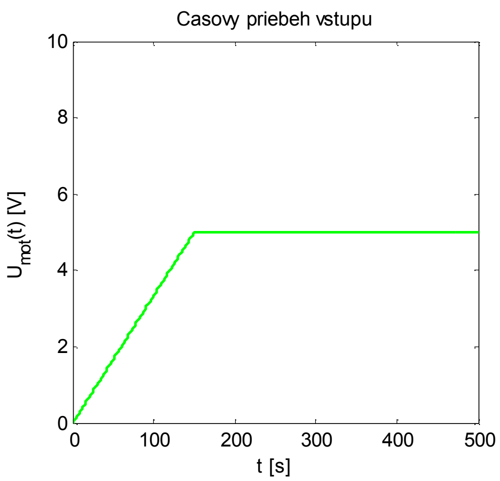


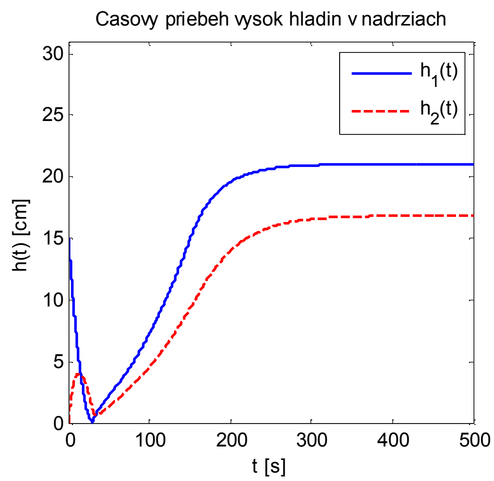


- **Simulačný model s počiatočnými podmienkami:**
  $h_1(0) = 15\ \mathrm{cm},\ h_2(0) = 0\ \mathrm{cm}$ **(2. nádoba)**









Úloha 4: Navrhnite a simulujte riadenie hydraulického systému M5 v prostredí Simulink

a. Linearizácia a prenosová funkcia hydraulického systému

Prvým krokom pri návrhu riadenia a teda regulátora je správny výber typu (P, PI, PD, PID), pretože na základe toho určíme charakteristickú rovnicu uzavretého regulačného obvodu (ďalej URO), ktorá má tvar:

$$1 + F_R . F_S = 0, \tag{4.1}$$

kde F_R je prenosová funkcia regulátora a F_S je prenosová funkciauvažovaného hydraulického systému.

Nelineárne diferenciálne rovnice systému M5 je pre návrh regulátora nutné linearizovať. Linearizácia prebieha v stanovenom pracovnom bode X_s s požadovanými hodnotami U_{mot}, p_1, p_2 a ustálenými výškami hladín h_1^s, h_2^s . Použitím Jacobiho matice pre maticu dynamiky A a maticu vstupu B platí :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{K_1}{S_1} & 0 \\ \frac{K_1}{S_2} & -\frac{K_2}{S_2} \end{bmatrix}_{|X_S}, \text{kde } K_1 = \frac{\mathrm{p_1.s_1}.\sqrt{2.9{,}8066.10^2}}{2.\sqrt{\mathrm{h_1^s}}}, K_2 = \frac{\mathrm{p_2.s_2}.\sqrt{2.9{,}8066.10^2}}{2.\sqrt{\mathrm{h_2^s}}} \tag{4.2}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{i}{S_1} \\ 0 \end{bmatrix}_{|X_S} . \tag{4.3}$$

V systéme neexistuje priama väzba a pri riadení sledujeme x_2 (výstup $y = x_2$) , teda pre maticu výstupu D a maticu výstupu C platí:

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ D = 0. \tag{4.4}$$

Stavový opis linearizovaného systému má tvar:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + B.u, \tag{4.5}$$

$$y = C^T. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D.u, \tag{4.6}$$

kde $x_1 = h_1 - \mathrm{h_1^s}$, $\mathrm{y} = x_2 = h_2 - \mathrm{h_2^s}$ a $u = a.U + b - (a.U^s + b)$.

Zo stavového opisu možno získať čitateľa a menovateľa prenosovej funkcie F_s na základe vzťahu:

1.

$$F_s = C.(sI - A)^{-1}.B + D \tag{4.7}$$

Rovnica (4.6) je implementovaná v prostredí Matlab ako funkcia:

[num, den] = ss2tf(A, B, C, D).

Prenosová funkcia pre náš uvažovaný systém má všeobecný tvar:

2. $$F_s = \frac{b_0}{a_2.s^2 + a_1.s + a_0},\tag{4.8}$$

kde $a_2 = 1$ v opačnom prípade je F_s nutné normovať. Pre riešenie v Matlabe platí:

$$num\ = b_0,\ a_2 = den(1),\ a_2 = den(2),\ a_2 = den(3).\tag{4.9}$$

b. Výpočet parametrov PI regulátora metódou syntézy Butterworth (metóda štandardných tvarov)

Prenosová funkcia regulátora $\mathrm{F_R}$, v prípade ak si zvolíme PI regulátor, je:

$$F_R = K.(1 + \frac{1}{T_i s})\tag{4.10}$$

a teda charakteristická rovnica URO (rovnica (4.1)) má na základe rovníc (4.8), (4.10) po úprave tvar:

3. $$a_2.s^3 + a_1.s^2 + (a_0 + b_0.K).s + b_0.\frac{K}{T_i} = 0.\tag{4.11}$$

Návrh riadenia je možné realizovať viacerými spôsobmi, ale pre ilustráciu riešenia použijeme len jeden konkrétny postup a to metódu štandardných tvarov Butterworth. Toto riešenie je totožné s riešením podľa Graham-Lathropa, líši sa len koeficientmi charakteristického polynómu, ktoré sú uvedené v Tab.2 a platí, že $q = \frac{s}{\omega_0}$.

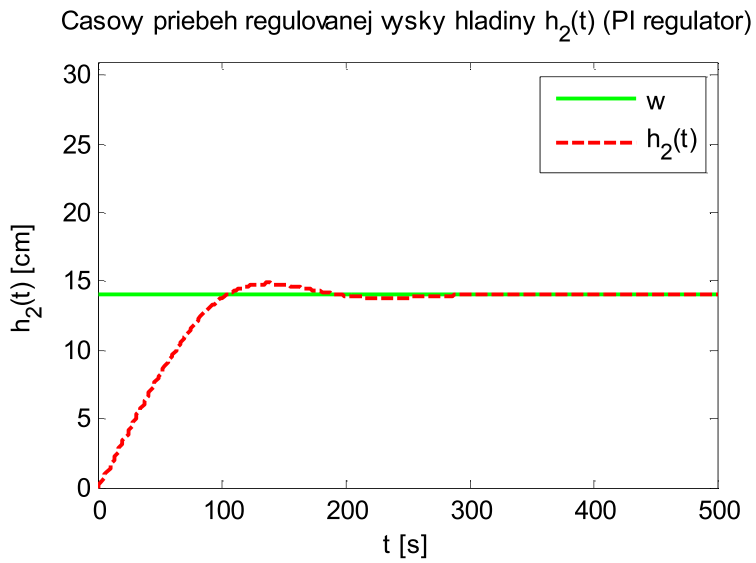
4.

Tab. 2 Štandardné tvary charakteristického polynómu URO - Butterworth

n	**Charakteristický polynóm**				
1	*1*	*q*	-	-	-
2	*1*	*1,4q*	q^2	-	-
3	*1*	*2q*	$2q^2$	q^3	-
4	*1*	*2,61q*	$3,41q^2$	$2,61q^3$	q^4

Koeficienty regulátora vypočítam tak, že porovnám koeficienty charakteristickej rovnice uvažovaného URO s koeficientmi polynómu príslušného stupňa podľa Butterworth -a (Tab. 2) pri rovnakých mocninách q. Dôležité je si uvedomiť, že v Simulinku do parametrov bloku *PID Controller* zadávame K pre proporčnú zložku a $\frac{K}{T_i}$ pre integračnú zložku.

Na záver je uvedený grafický priebeh výšky hladiny, ak nami zadaná žiadaná hodnota $h_2 = 14\ cm$, dĺžka simulácie T_{sim} = 500 s, otvorenie ventilov p_1=0.85, p_2=0.95 a počiatočné výšky hladín sú $h_1(0)$= 0 a $h_2(0)$ = 0 .



Obr. 3 Časový priebeh regulovanej výšky hladiny $h_2(t)$ pri použití PI regulátora