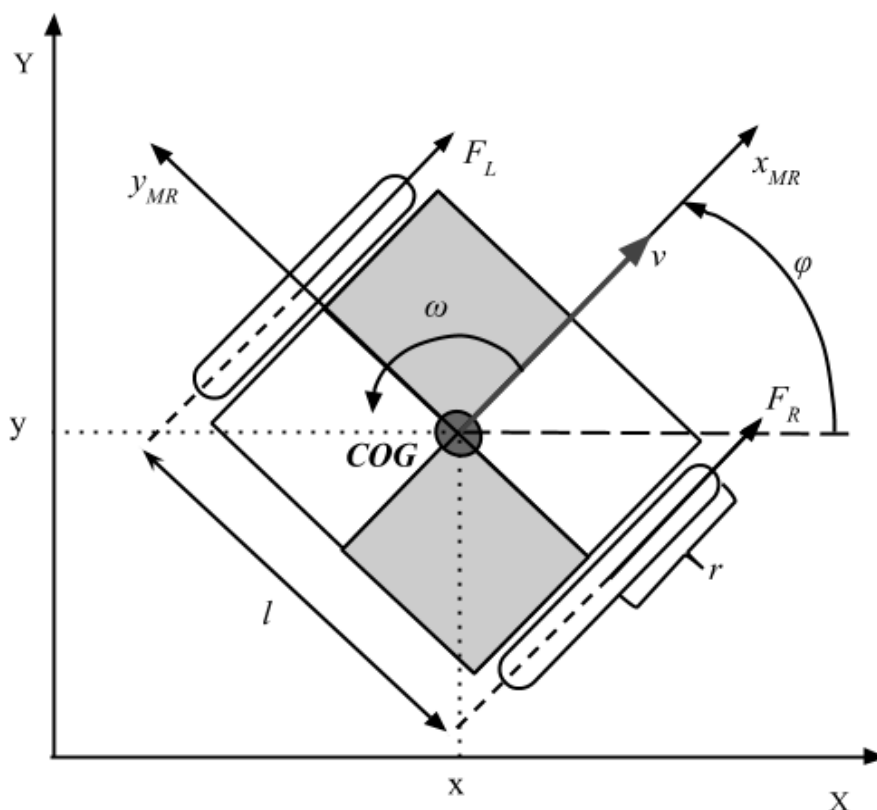


# Klasické modelovanie a riadenie – model MR „mobilný robot s diferenciálnym kolesovým podvozkom“

## Úlohy:

1. Zostavte matematický popis modelu MR
    - a) Kinematiku mobilného robota
    - b) Dynamiku mobilného robota
    - c) Regulátor kolies
    - d) Redukciu
  2. Vytvorte a overte simulačný model MR v simulačnom jazyku Matlab/Simulink
  3. Navrhňte algoritmus riadenia modelu MR pre sledovanie referenčnej trajektórie pomocou doprednej a spätnej väzby
  4. Naprogramujte algoritmus riadenia modelu MR v simulačnom jazyku Matlab/Simulink
  5. Vygenerujte referenčnú trajektóriu mobilného robota
  6. Verifikujte model mobilného robota v riadiacej štruktúre pre zvolený typ referenčnej trajektórie
- 

Pre model MR uvažujeme nasledujúcu schému mobilného robota:



Obr. 1 Schéma dynamického modelu mobilného robota s diferenciálnym kolesovým podvozkom

Parametre:	Fyzikálne veličiny:
$l$ - rozchod kolies	$x(t)$ - x-ová os mobilného robota
$r$ - polomer kolies	$y(t)$ - y-ová os mobilného robota
$M$ - hmotnosť podvozku	$F_R(t)$ - sila vyvinutá pravým kolesom
$J$ - zotrvačnosť podvozku	$F_L(t)$ - sila vyvinutá ľavým kolesom
	$v_R(t)$ - dopredná rýchlosť pravého kolesa
	$v_L(t)$ - dopredná rýchlosť ľavého kolesa
	$v(t)$ - dopredná rýchlosť mobilného robota
	$\varphi(t)$ - natočenie mobilného robota
	$\omega(t)$ - uhlová rýchlosť diferencielného podvozku

## 1. Zostavenie matematického modelu MR

Matematický model mobilného robota pozostáva z viacerých subsystémov. Na začiatok odvodíme kinematiku a dynamiku mobilného robota. Po ich odvodení navrhne reguláciu uhlových rýchlostí kolies  $\omega_R$  a  $\omega_L$ , čiže vnútornú riadiacu slučku a na záver odvodíme redukciu, ktorá prepočíta doprednú a uhlovú rýchlosť mobilného robota  $v$ ,  $\omega$  na uhlové rýchlosti kolies  $\omega_R$  a  $\omega_L$ . Takto odvodený matematický model MR potom použijeme v riadiacej štruktúre pre sledovanie referenčnej trajektórie.

### a) Kinematika mobilného robota

Kinematický model odvodíme z pohybu ťažiska mobilného robota bodu *COG* v rovine definovaného súradnicami  $x$ ,  $y$  a jeho uhla natočenia  $\varphi$ , analógia s pohybom hmotného bodu v rovine. Vektor doprednej rýchlosti mobilného robota  $v$ , pozostáva z dvoch zložiek, rýchlosti v osi  $x$  –  $v_x$  a rýchlosti v osi  $y$  –  $v_y$ . Daný typ kinematického modelu sa nazýva aj „jednokolesový“. Výsledný kinematický model mobilného robota je podľa [1] nasledovný:

$$\begin{aligned} v_x &= v \cdot \cos \varphi \\ v_y &= v \cdot \sin \varphi \\ \dot{\varphi} &= \omega \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 \\ \sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Vstupom do kinematického modelu mobilného robota je lineárna dopredná rýchlosť  $v$ , uhlová rýchlosť  $\omega$  a výstupom je pozícia a natočenie mobilného robota v rovine  $[x, y, \varphi]$ .

### b) Dynamika mobilného robota

Dynamický model mobilného robota je rozšírením kinematického modelu, ktorý sme odvodili vyššie. Tento typ dynamického modelu mobilného robota je možné nazvať jednoduchým dynamickým modelom. Sú zanedbané trecie sily medzi podložkou a kolesami robota, zároveň nepredpokladáme šmýkanie a preklzavanie kolies. V tomto modeli berieme do úvahy sily kolies  $F_R$  a  $F_L$ , ktoré sa vyvíjajú na jednotlivé motory potrebné pre pohyb

mobilného robota v rovine. Ďalej hmotnosť  $M$ , rozchod kolies  $l$ , moment zotrvačnosti kolesa  $J_w$  a podvozku  $J$  a polomer kolies  $r$  (Obr. 1).

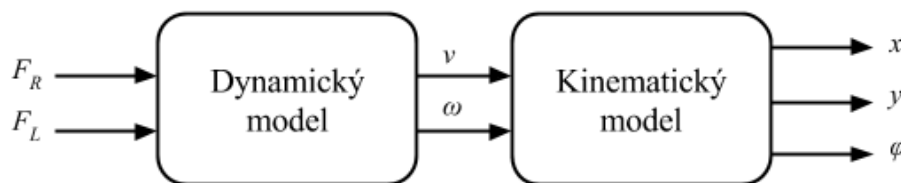
Podľa [2] je vektor doprednej rýchlosti mobilného robota  $v$  vyjadrený pomocou 2. Newtonovho zákona (zákona sily), čím dostaneme nasledujúci vzťah:

$$M \frac{\partial v}{\partial t} = F_R + F_L. \quad (2)$$

Ďalej potrebujeme vyjadriť analogicky rýchlosť otáčania  $\omega$  vzhľadom na bod *COG* pomocou 2. Newtonovho zákona v uhlových veličinách a podľa [2] dostávame vzťah:

$$J \frac{\partial \omega}{\partial t} = F_R \frac{l}{2} - F_L \frac{l}{2}. \quad (3)$$

Na nasledujúcom obrázku (Obr. 2) sa nachádza bloková schéma dynamického modelu mobilného robota. Vstupom do systému dynamického modelu mobilného robota sú sily jednotlivých kolies  $F_R$ ,  $F_L$  a výstupom je dopredná rýchlosť  $v$  a uhlová rýchlosť  $\omega$ , ktorá ďalej vstupuje do kinematického modelu mobilného robota.



Obr. 2 Bloková schéma dynamického modelu mobilného robota

### c) Návrh vnútornej riadiacej slučky – regulácia kolies

Návrh regulátora rýchlosti kolies mobilného robota je potrebný, z dôvodu regulácie uhlových rýchlosti pravého a ľavého kolesa  $\omega_R$ ,  $\omega_L$  na požadovanú hodnotu. Cieľom návrhu regulácie kolies je zabezpečiť to, aby sily vyvinuté motormi  $F_R$  a  $F_L$  v čase dosiahnutia požadovanej uhlovej rýchlosti  $\omega_R$ ,  $\omega_L$  boli nulové. To znamená, ohraničiť sily kolies  $F_R$  a  $F_L$  na reálnu hodnotu, ktorú je možné dosiahnuť vybranými motormi a zabezpečiť ich ohraničenie v dynamickom modeli mobilného robota. Hodnota síl vyvinutých motormi je daná nasledujúcimi rovnicami (4), ktorými zabezpečíme ohraničenie síl, ktoré môžu byť na motory reálne aplikovateľné.

$$\begin{aligned} F_R &= k(\omega_{Ref} - \omega_R) && \text{pre } |k(\omega_{Ref} - \omega_R)| < F_{max} \\ F_R &= F_{max} \cdot \text{sign}(\omega_{Ref} - \omega_R) && \text{pre } |k(\omega_{Ref} - \omega_R)| \geq F_{max} \end{aligned} \quad (4)$$

Rovnice sú odvodené len pre reguláciu uhlovej rýchlosti pravého kolesa  $\omega_R$  mobilného robota, pre ľavé koleso sú rovnice analogické. Podmienkou stability regulácie uhlových rýchlosti kolies  $\omega_R$ ,  $\omega_L$  je to, aby proporcionálna zložka regulátora bola kladne definovaná  $k > 0$  [3].

Návrh proporcionálnej zložky regulátora  $k$  teda závisí od parametrov mobilného robota. V našom prípade sme na základe experimentov, hodnotu proporcionálnej zložky definovali na rozsah  $k \in \langle 0,5; 3 \rangle$ , pričom ak chceme, aby mobilný robot reagoval rýchlo na zmenu uhlových rýchlostí, zadáme hodnotu blízku k maximálnej hodnote rozsahu  $k$ . V opačnom prípade zadáme minimálnu hodnotu rozsahu  $k$ .

#### d) Redukcia

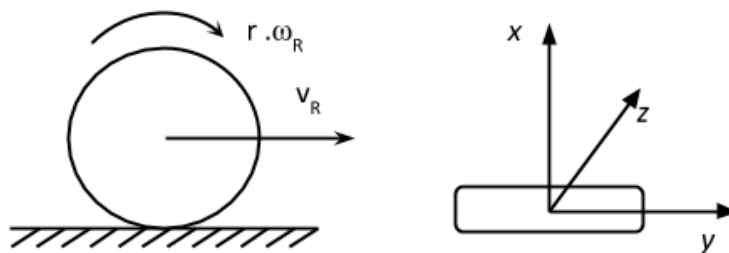
Redukcia má za úlohu prepočítať doprednú a uhlovú rýchlosť  $v$ ,  $\omega$ . Vzťah medzi doprednou rýchlosťou  $v$ , uhlovou rýchlosťou  $\omega$  a doprednou rýchlosťou kolies  $v_R$ ,  $v_L$  vieme vyjadriť podľa [4] v maticovej forme.

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ \frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_R \\ v_L \end{bmatrix} \quad (5)$$

Roznásobením matice (5) dostaneme vyjadrenie obvodových rýchlostí kolies  $v_R, v_L$  [4].

$$\begin{aligned} v_R &= v + \frac{l}{2} \omega \\ v_L &= v - \frac{l}{2} \omega \end{aligned} \quad (6)$$

Na nasledujúcom obrázku (Obr. 3) sa nachádza koleso mobilného robota, konkrétne pravé koleso, na ktorom je zobrazená dopredná rýchlosť  $v_R$ . Dopredná rýchlosť je daná súčinom uhlovej rýchlosti kolesa  $\omega_R$  a jeho polomerom  $r$ . Analogicky to platí aj pre ľavé koleso.

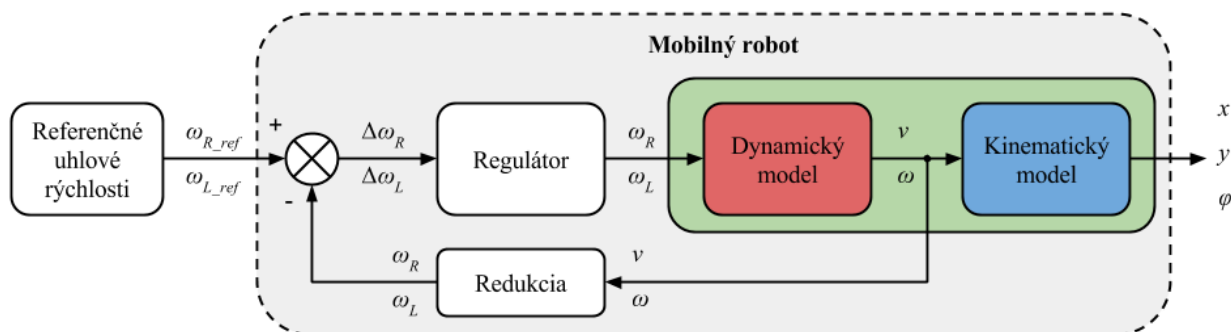


**Obr. 3** Zobrazenie obvodovej rýchlosti pravého kolesa mobilného robota a jeho osí

Vzťah medzi obvodovou a uhlovou rýchlosťou jednotlivých kolies je podľa [4] daný rovnicami (7).

$$\begin{aligned} v_R &= r \omega_R \\ v_L &= r \omega_L \end{aligned} \quad (7)$$

Bloková schéma zapojenia dynamického modelu mobilného robota s reguláciou uhlových rýchlostí kolies sa nachádza a nasledujúcom Obr. 4.



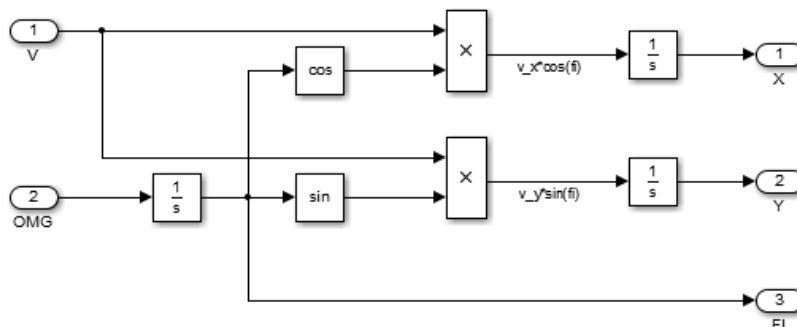
Obr. 4 Bloková schéma zapojenia dynamického modelu mobilného robota s regulátorom uhlových rýchlostí kolies  $\omega_R$  a  $\omega_L$

## 2. Vytvorenie a overenie simulačného modelu MR v simulačnom jazyku Matlab/Simulink

Naprogramovaním hore odvodených rovníc do funkčných subsystemov v simulačnom jazyku Matlab/Simulink, vytvoríme model mobilného robota. Jednotlivé subsystemy vyzerajú nasledovne:

### a) Kinematika mobilného robota

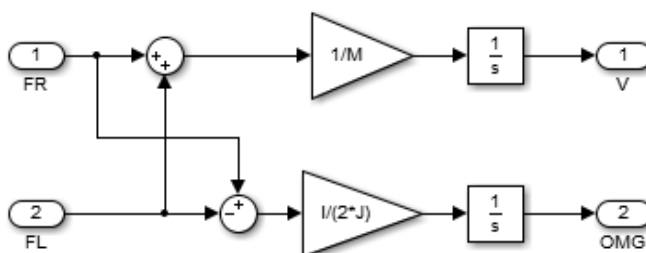
Naprogramovaním systému (1) dostávame subsystem kinematiky mobilného robota, zobrazený na Obr. 5.



Obr. 5 Kinematický model mobilného robota

### b) Dynamika mobilného robota

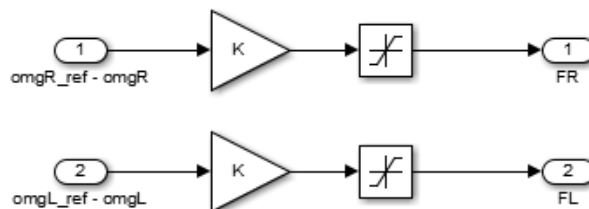
Naprogramovaním rovníc (2) a (3) dostávame subsystem dynamiky mobilného robota, zobrazený na Obr. 6.



Obr. 6 Dynamický model mobilného robota

### c) Návrh vnútornej riadiacej slučky – regulácia kolies

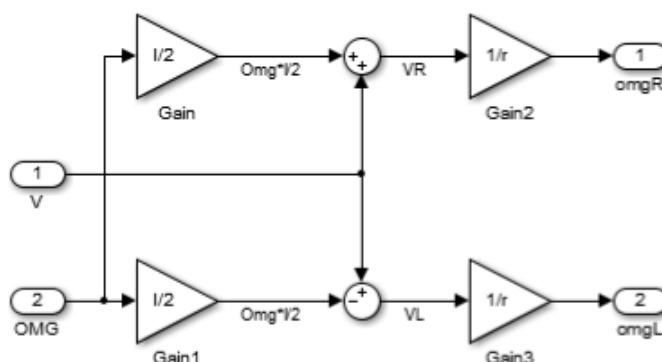
Naprogramovaním rovnice (4) pre ľavé a pravé koleso mobilného robota dostávame subsystém regulácie kolies – vnútornú riadiacu slučku zobrazenú na nasledujúcom Obr. 7.



Obr. 7 Regulator rýchlosti kolies mobilného robota

### d) Redukcia

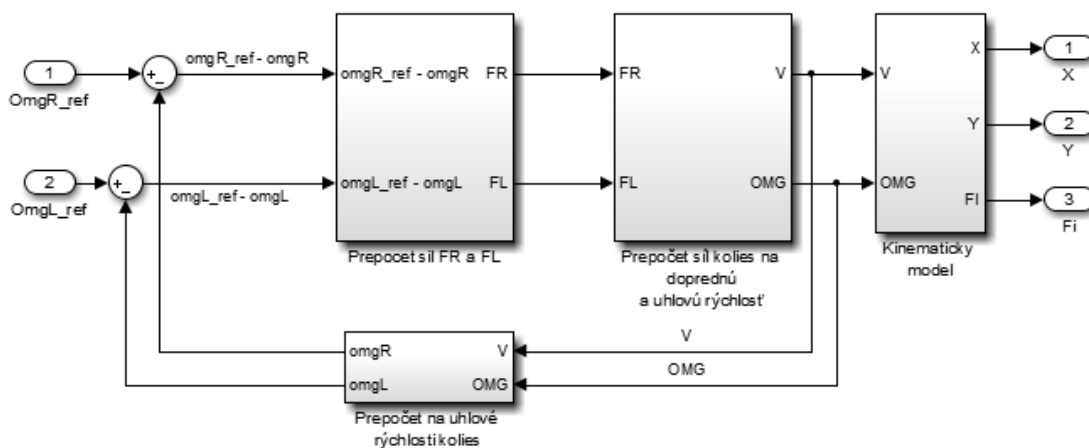
Naprogramovaním rovníc (6) a (7) dostávame redukciu, ktorá nám prepočíta doprednú a uhlovú rýchlosť mobilného robota  $v$ ,  $\omega$  na uhlové rýchlosti kolies  $\omega_R$  a  $\omega_L$ .



Obr. 8 Blok prepočtu doprednej rýchlosti  $v$  a uhlovej rýchlosti  $\omega$  na uhlové rýchlosti kolies  $\omega_R$ ,  $\omega_L$

### Výsledný simulačný model MR

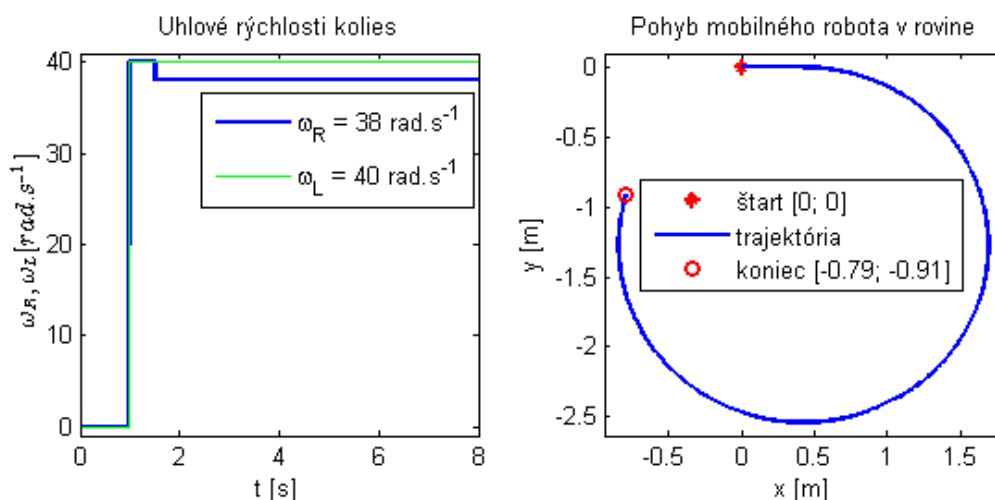
Zapojením naprogramovaných funkčných subsystémov Obr. 5 až Obr. 8 podľa blokovej schémy mobilného robota (Obr. 4) dostávame výsledný simulačný model mobilného robota, ktorý sa nachádza na Obr. 9.



Obr. 9 Simulačný model mobilného robota s reguláciou uhlových rýchlostí kolies  $\omega_R$  a  $\omega_L$

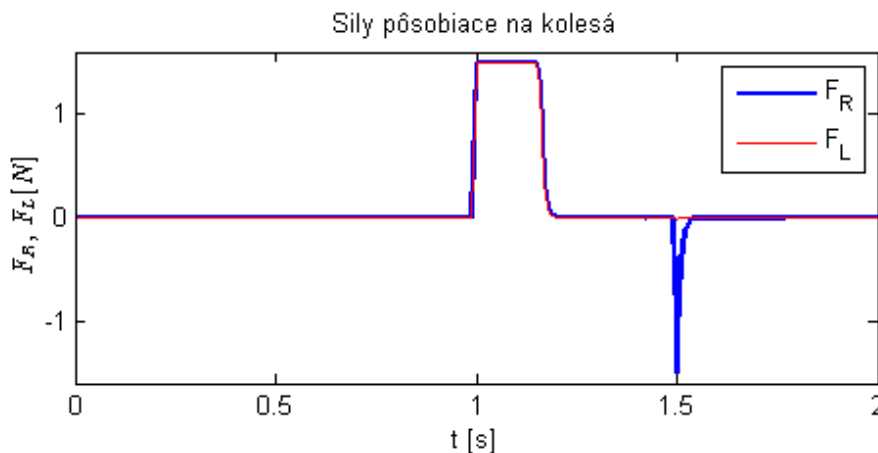
### Verifikácia modelu MR

Dynamický model mobilného robota spolu s vnútornou riadiacou slučkou verifikujeme pomocou jednoduchého experimentu. Nasledujúci Obr. 10 zobrazuje základné snímané veličiny a to vstup do systému mobilného robota, uhlové rýchlosti kolies  $\omega_R$ ,  $\omega_L$  a výstup zo systému, pohyb robota v rovine. Na kolesá mobilného robota začínajú pôsobiť budiace signály v čase  $t = 1$  s, hodnoty uhlových rýchlostí kolies sú  $\omega_R = \omega_L = 40 \text{ rad.s}^{-1}$  po dobu  $t = 0,5$  s. Z toho vyplýva, že trajektória ktorú mobilný robot vykoná je priamka po kladnej časti  $x$  – ovej osi. V čase  $t = 1,5$  s sa na vstup pravého kolesa privedie signál s odchýlkou  $\Delta\omega_R = 2 \text{ rad.s}^{-1}$  a dostávame odozvu v zatáčaní mobilného robota do pravej strany. Východza pozícia mobilného robota je  $[0,0]$ , natočenie  $\varphi = 0 \text{ rad}$  a doba experimentu je  $t = 8$  s.



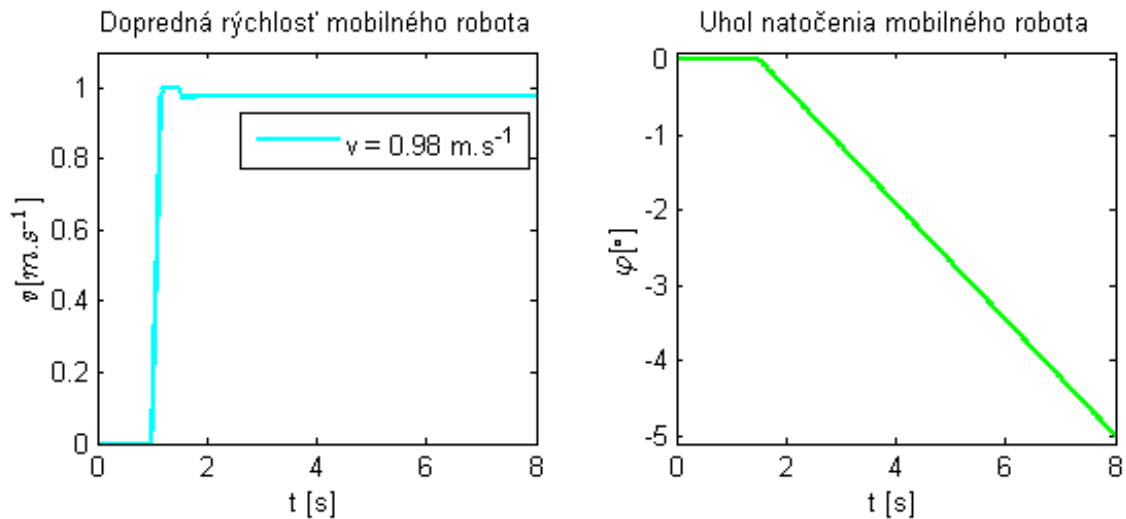
**Obr. 10** Výsledky experimentu dynamického modelu mobilného robota s reguláciou uhlových rýchlostí kolies  $\omega_R$  a  $\omega_L$

Sily vyvinuté motormi  $F_R$  a  $F_L$  sú v rozsahu  $\pm 1,5$  N (Obr. 11). V čase  $t = 1$  s začnú pôsobiť sily  $F_R = F_L = 1,5$  N, ktoré uvedú mobilného robota po priamke. Ustálenie síl  $F_R$  a  $F_L$  nastáva v čase dosiahnutia uhlových rýchlostí kolies  $\omega_R = \omega_L = 40 \text{ rad.s}^{-1}$ . Odchýlka na pravom kolese  $\Delta\omega_R = 2 \text{ rad.s}^{-1}$  v čase  $t = 1,5$  s spôsobí záporné pôsobenie sily pravého kolesa o hodnote  $F_R = -1,5$  N po dobu ustálenia uhlovej rýchlosti  $\omega_R$  na hodnotu  $\omega_R = 38 \text{ rad.s}^{-1}$ .



**Obr. 11** Graf síl  $F_R$  a  $F_L$  pôsobiacich na kolesá mobilného robota

Na Obr. 12 je zobrazená dopredná rýchlosť  $v$  a uhol natočenia mobilného robota  $\varphi$ . Mobilný robot zatáča v zápornom smere otáčania a jeho rýchlosť sa zníži o  $\Delta v = 0,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Ak by experiment pokračoval ďalej, mobilný robot by opisoval kružnicu s určitým polomerom v závislosti od veľkosti odchýlky na pravom kolese  $\Delta\omega_R$ . Uhol natočenia mobilného robota  $\varphi$  v čase  $t = 1,5 \text{ s}$  začína narastať v zápornom smere otáčania.



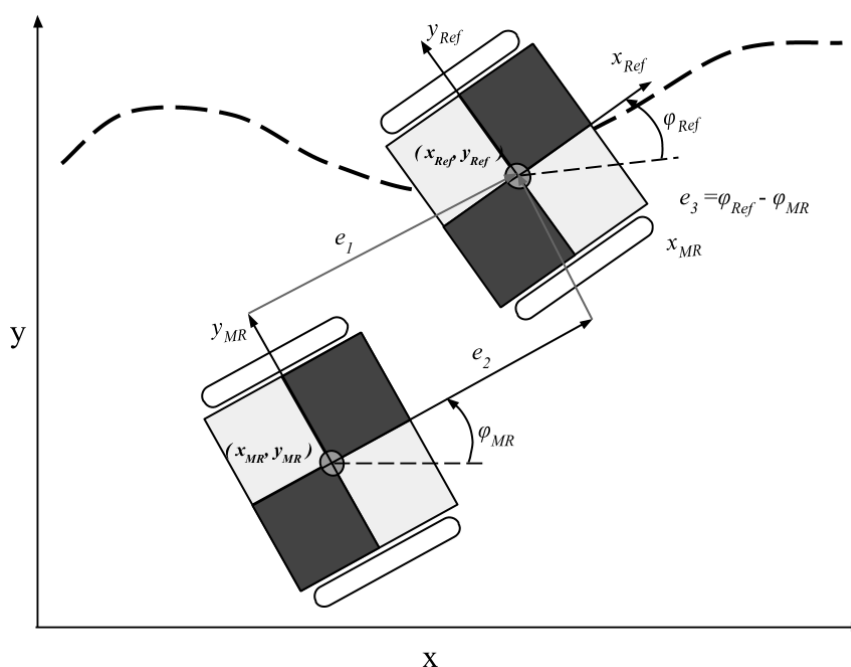
**Obr. 12 Graf doprednej rýchlosti  $v$  a uhlového natočenia  $\varphi$  mobilného robota**

Mobilný robot sa správal podľa očakávania, a týmto jednoduchým experimentom sme overili reguláciu uhlových rýchlostí kolies  $\omega_R$  a  $\omega_L$  mobilného robota. Sily kolies  $F_R$  a  $F_L$  boli motormi vyvíjané len pod dobu dosiahnutia doprednej rýchlosti  $v$  mobilným robotom.



### 3. Návrh algoritmu riadenia modelu MR pre sledovanie referenčnej trajektórie pomocou doprednej a spätnej väzby

Tento spôsob riadenia zabezpečuje sledovanie referenčnej trajektórie mobilným robotom pomocou riadiacej štruktúry s doprednou a spätnou väzbou. Dopredná väzba je vypočítaná z referenčnej trajektórie  $[x_{Ref}; y_{Ref}; \varphi_{Ref}]$  a spätná väzba definuje odchýlku medzi referenčnou trajektóriou a aktuálnou polohou mobilného robota  $[\Delta x; \Delta y; \Delta \varphi]$ . Pod doprednou väzbou si môžeme predstaviť aj virtuálny mobilný robot, ktorého pohyb v rovine chceme kopírovať pri minimálnej odchýlke od referenčnej trajektórie. Na začiatok si odvodíme doprednú väzbu – virtuálneho mobilného robota a následne spätnú väzbu.



**Obr. 13** Schéma sledovania referenčnej trajektórie mobilným robotom

Matematický model mobilného robota (1) použitím malej úpravy - zmenou súradníc mobilného robota podľa Obr. 13 môžeme vyjadriť nasledovne:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{MR} &= v \cdot \cos \varphi_{MR} \\ \dot{y}_{MR} &= v \cdot \sin \varphi_{MR} \\ \dot{\varphi}_{MR} &= \omega.\end{aligned}\quad (8)$$

Pre robota umiestnenom na referenčnej trajektórii – virtuálny mobilný robot (Obr. 13) platí nasledujúci matematický model:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{Ref} &= v_{FF} \cdot \cos \varphi_{Ref} \\ \dot{y}_{Ref} &= v_{FF} \cdot \sin \varphi_{Ref} \\ \dot{\varphi}_{Ref} &= \omega_{FF}.\end{aligned}\quad (9)$$

Odvedenie doprednej a spätnej väzby je podľa [6] nasledovné. Dopredná väzba (feedforward) pre výpočet požadovanej doprednej rýchlosti  $v$  je definovaná vzťahom (10).

$$v_{FF} = \pm \sqrt{\dot{x}_{Ref}^2(t) + \dot{y}_{Ref}^2(t)} \quad (10)$$

Požadovaný uhol natočenia mobilného robota vieme vypočítať z referenčnej trajektórie, použitím vzťahu (11).

$$\varphi_{FF} = \text{atan2}(\dot{y}_{Ref}(t), \dot{x}_{Ref}(t)). \quad (11)$$

Deriváciou rovnice (11) dostávame doprednú uhlová rýchlosť mobilného robota. Je daná nasledujúcim vzťahom (12).

$$\omega_{FF} = \frac{\dot{x}_{Ref}(t)\ddot{y}_{Ref}(t) - \dot{y}_{Ref}(t)\ddot{x}_{Ref}(t)}{\dot{x}_{Ref}^2(t) + \dot{y}_{Ref}^2(t)} \quad (12)$$

Pri odvodení spätnej väzby postupujeme vyjadrením odchýlok nasledovne. Použitím transformačnej matice globálneho súradnicového systému môžeme odchýlky definovať maticou (13).

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{MR} & \sin \varphi_{MR} & 0 \\ -\sin \varphi_{MR} & \cos \varphi_{MR} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{Ref} - x_{MR} \\ y_{Ref} - y_{MR} \\ \varphi_{Ref} - \varphi_{MR} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Roznásobením matice (13) dostávame rovnice (14) vyjadrujúce odchýlky bodu a pozície mobilného robota od referenčnej trajektórie.

$$\begin{aligned} e_1 &= (x_{Ref} - x_{MR}) \cos \varphi_{MR} + (y_{Ref} - y_{MR}) \sin \varphi_{MR} \\ e_2 &= -(x_{Ref} - x_{MR}) \sin \varphi_{MR} + (y_{Ref} - y_{MR}) \cos \varphi_{MR} \\ e_3 &= \varphi_{Ref} - \varphi_{MR} \end{aligned} \quad (14)$$

Derivovaním odchýlok rovnice (14) vyjadríme dynamiku vývoja odchýlok v čase a dostávame:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= (\dot{x}_{Ref} - \dot{x}_{MR}) \cos \varphi_{MR} - (x_{Ref} - x_{MR}) \dot{\varphi}_{MR} \sin \varphi_{MR} + \\ &+ (\dot{y}_{Ref} - \dot{y}_{MR}) \sin \varphi_{MR} + (y_{Ref} - y_{MR}) \dot{\varphi}_{MR} \cos \varphi_{MR} \\ \dot{e}_2 &= -(\dot{x}_{Ref} - \dot{x}_{MR}) \sin \varphi_{MR} - (x_{Ref} - x_{MR}) \dot{\varphi}_{MR} \cos \varphi_{MR} + \\ &+ (\dot{y}_{Ref} - \dot{y}_{MR}) \cos \varphi_{MR} - (y_{Ref} - y_{MR}) \dot{\varphi}_{MR} \sin \varphi_{MR} \\ \dot{e}_3 &= \dot{\varphi}_{Ref} - \dot{\varphi}_{MR}. \end{aligned} \quad (15)$$

Dosadením rovníc (8) a (9) do rovnice (15) vyjadríme dynamiku odchýlok v závislosti na hodnote referenčných a aktuálnych akčných veličín, ktoré vyzerajú nasledovne:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= v_{FF} \cos \varphi_{Ref} \cos \varphi_{MR} - v \cos^2 \varphi_{MR} - \\
&\quad - (x_{Ref} - x_{MR}) \dot{\varphi}_{MR} \sin \varphi_{MR} + v_{FF} \sin \varphi_{Ref} \sin \varphi_{MR} - \\
&\quad - v \sin^2 \varphi_{MR} + (y_{Ref} - y_{MR}) \dot{\varphi}_{MR} \cos \varphi_{MR} \\
&= v_{FF} \cos e_3 - v + \omega e_2 \\
\dot{e}_2 &= -v_{FF} \cos \varphi_{Ref} \sin \varphi_{MR} + v \cos \varphi_{MR} \sin \varphi_{MR} - \\
&\quad - (x_{Ref} - x_{MR}) \dot{\varphi}_{MR} \cos \varphi_{MR} + v_{FF} \sin \varphi_{Ref} \cos \varphi_{MR} - \\
&\quad - v \sin \varphi_{MR} \cos \varphi_{MR} - (y_{Ref} - y_{MR}) \dot{\varphi}_{MR} \sin \varphi_{MR} \\
&= v_{FF} \sin e_3 - \omega e_1 \\
\dot{e}_3 &= \dot{\omega}_{FF} - \dot{\omega}_{MR}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Zákon riadenia mobilného robota je daný súčtom akčných veličín  $v$  a  $\omega$  doprednej a spätnej väzby vyjadrený rovnicami:

$$\begin{aligned}
v &= v_{FF} + v_{FB} \\
\omega &= \omega_{FF} + \omega_{FB},
\end{aligned} \tag{17}$$

kde  $v_{FB}$  a  $\omega_{FB}$  sú odchýlky od referenčnej hodnoty akčných veličín. Dosadením rovnice (17) do (16) dostávame rovnice (18), ktoré predstavujú nelineárny systém so vstupom  $v_{FB}$  a  $\omega_{FB}$ .

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= v_{FF} \cos e_3 - (v_{FF} + v_{FB}) + (\omega_{FF} + \omega_{FB}) e_2 \\
\dot{e}_2 &= v_{FF} \sin e_3 - (\omega_{FF} + \omega_{FB}) e_1 \\
\dot{e}_3 &= -\omega_{FB}
\end{aligned} \tag{18}$$

Uvažujeme, že odchýlky  $e_1$ ,  $e_2$  a  $e_3$  od referenčnej trajektórie sú malé, podobne aj akčné zásahy spätnej väzby  $v_{FB}$  a  $\omega_{FB}$ . Systém rovníc (18) chceme teda linearizovať v okolí rovnovážnych bodov  $e_{10} = e_{20} = e_{30} = v_{FB} = \omega_{FB} = 0$  a výsledný tvar rovníc (18) potom vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= \omega_{FF} e_2 - v_{FF} \\
\dot{e}_2 &= -\omega_{FF} e_1 + v_{FF} e_3 \\
\dot{e}_3 &= -\omega_{FB}
\end{aligned} \tag{19}$$

Prepis rovnice (19) do maticovej formy je potom

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{FF} & 0 \\ -\omega_{FF} & 0 & v_{FF} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{FF} \\ \omega_{FB} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Systém (20) môžeme potom vyjadriť potom nasledovne:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{e}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t). \quad (21)$$

System (21) je lineárny a časovo variantný, vzhľadom k množine pracovných bodov na referenčnej trajektórii. Zapojením systému (21) do spätnej väzby dostávame stavový opis systému vývoja odchýlok v nasledujúcom tvare:

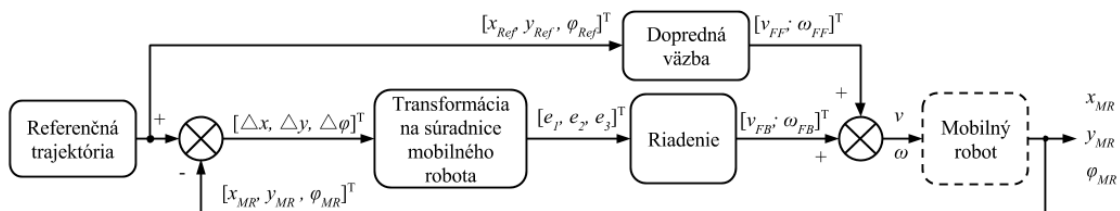
$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{e}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{K}(t)\mathbf{e}(t) = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{K}(t)]\mathbf{e}(t). \quad (22)$$

Cieľom je nájsť také  $\mathbf{K}(t)$ , ktoré zabezpečí konvergovanie odchýlok  $e_1$ ,  $e_2$  a  $e_3$  k nulovej hodnote. V našom prípade je matica  $\mathbf{K}$  konštantná a kladne definitná. Spätnoväzobné riadenie môžeme potom vyjadriť:

$$\begin{bmatrix} v_{FB} \\ \omega_{FB} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Matica  $\mathbf{K}$  má rozmery o počte riadkov  $n = 2$  a stĺpcov  $m = 3$ , pričom jej hodnoty  $k_1$ ,  $k_2$  a  $k_3$  musia zabezpečiť to, aby vlastné čísla systému sa nachádzali v ľavej časti komplexnej roviny.

Bloková schéma riadenia s doprednou a spätnou väzbou je na Obr. 14. Vstupom do riadiacej štruktúry je referenčná trajektória a odchýlka mobilného robota od referenčnej trajektórie a výstupom je dopredná rýchlosť  $v$  a uhlová rýchlosť  $\omega$  mobilného robota.



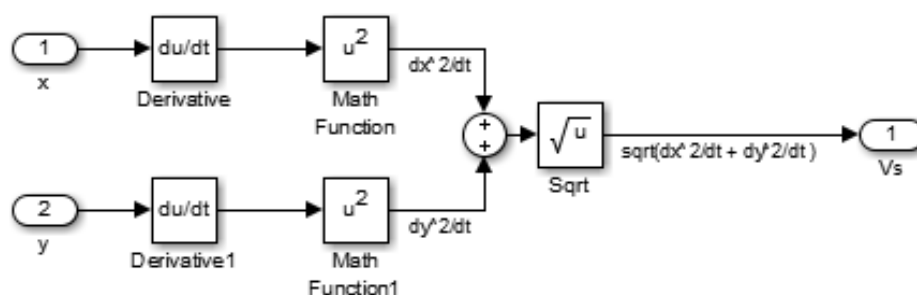
Obr. 14 Bloková schéma riadenia mobilného robota s doprednou a spätnou väzbou

#### 4. Naprogramovanie algoritmu riadenia modelu MR v simulačnom jazyku Matlab/Simulink

Naprogramovaním rovnice algoritmu riadenia mobilného robota pomocou doprednej a spätnej väzby do funkčných subsystémov v simulačnom jazyku Matlab/Simulink, vytvoríme funkčný blok riadenia mobilného robota. Jednotlivé funkčné bloky potom vyzerajú nasledovne:

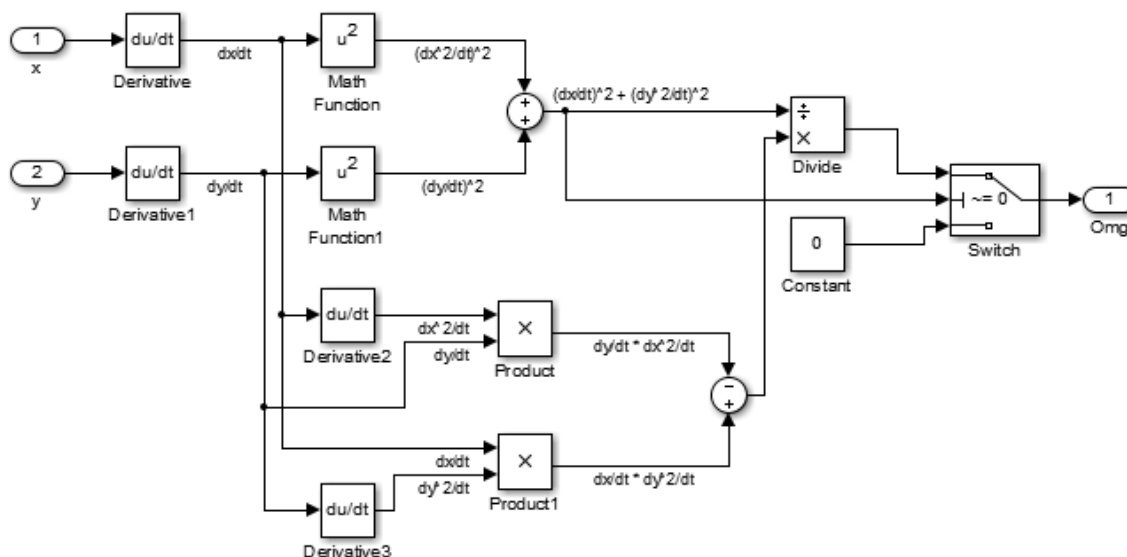
##### Dopredná väzba

Naprogramovaním rovnice (10) dostávame subsystém doprednej rýchlosti  $v_{FF}$ , zobrazený na Obr. 15.



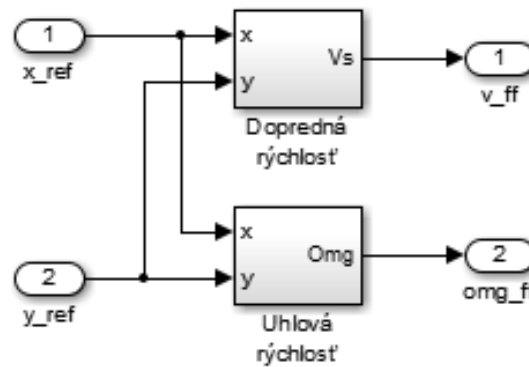
Obr. 15 Subsystém doprednej rýchlosti  $v_{FF}$

Naprogramovaním rovnice (12) dostávame subsystém uhlovej rýchlosti  $\omega_{FF}$ , zobrazený na Obr. 16.



Obr. 16 Subsystém uhlovej rýchlosti  $\omega_{FF}$

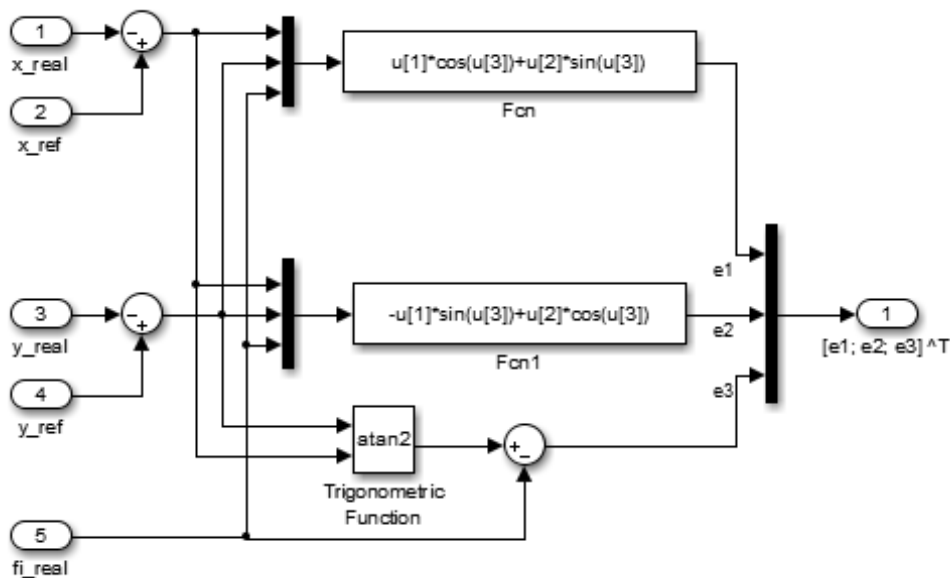
Výsledne zapojenie subsystémov doprednej a uhlovej rýchlosti  $v_{FF}$ ,  $\omega_{FF}$  sa nachádza na nasledujúcom Obr. 17, čím dostávame subsystém doprednej väzby mobilného robota.



Obr. 17 Funkčný blok doprednej väzby mobilného robota

### Spätná väzba

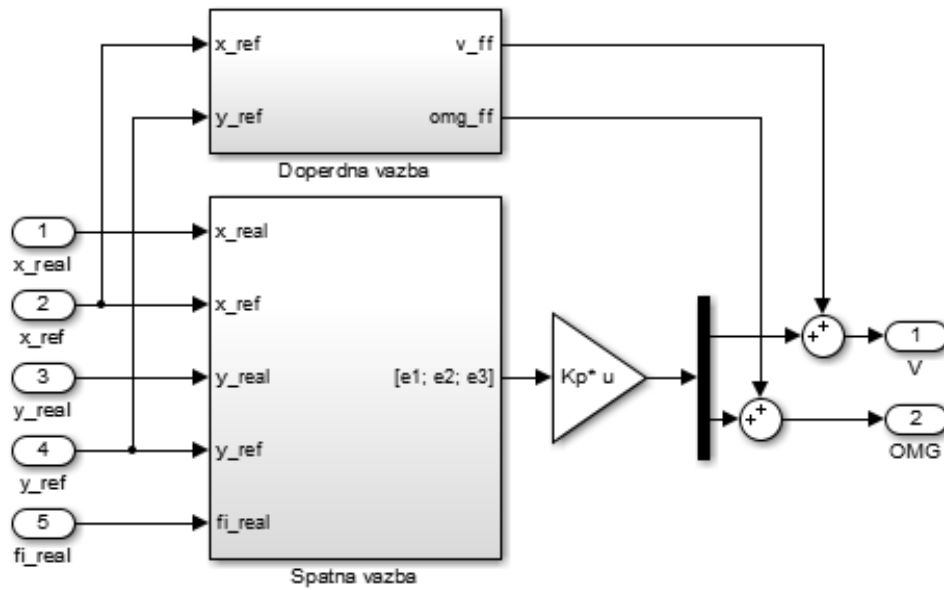
Naprogramovaním rovnice (13) dostávame subsystem vývoja odchýlok mobilného robota od referenčnej trajektórie, zobrazený na Obr. 18.



Obr. 18 Funkčný blok spätnej väzby riadenia

### Dopredná a spätná väzba

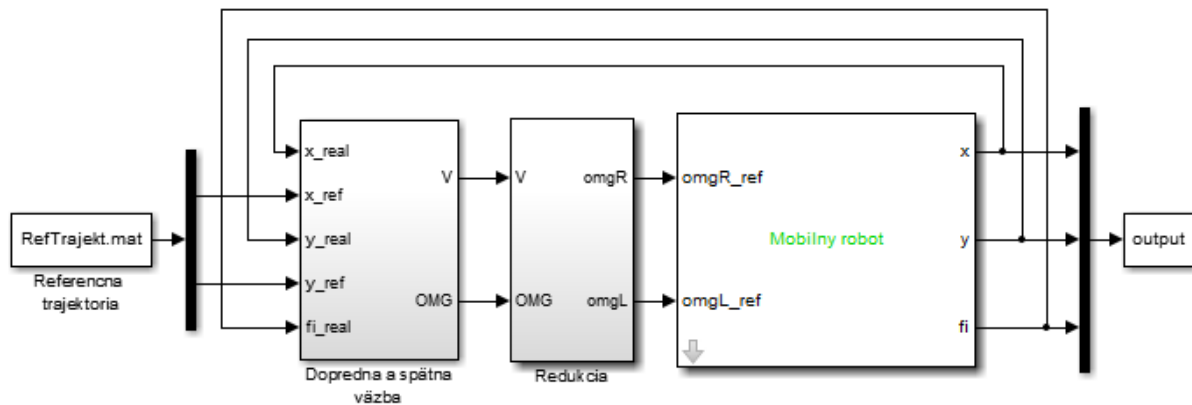
Zapojením doprednej väzby (Obr. 17) a spätnej väzby (Obr. 18) podľa rovnice (17) dostávame nasledujúci funkčný blok riadenia mobilného robota v sledovaní referenčnej trajektórie (Obr. 19).



Obr. 19 Funkčný blok riadenia mobilného robota s doprednou a spätou väzbou

### Výsledné zapojenie

Výsledné zapojenie funkčných blokov algoritmu riadenia doprednej a spätnej väzby podľa blokovej schémy riadenia na (Obr. 14) je zobrazené na Obr. 20 nižšie.



Obr. 20 Zapojenie riadiacej štruktúry riadenia mobilného robota pomocou doprednej a spätnej väzby

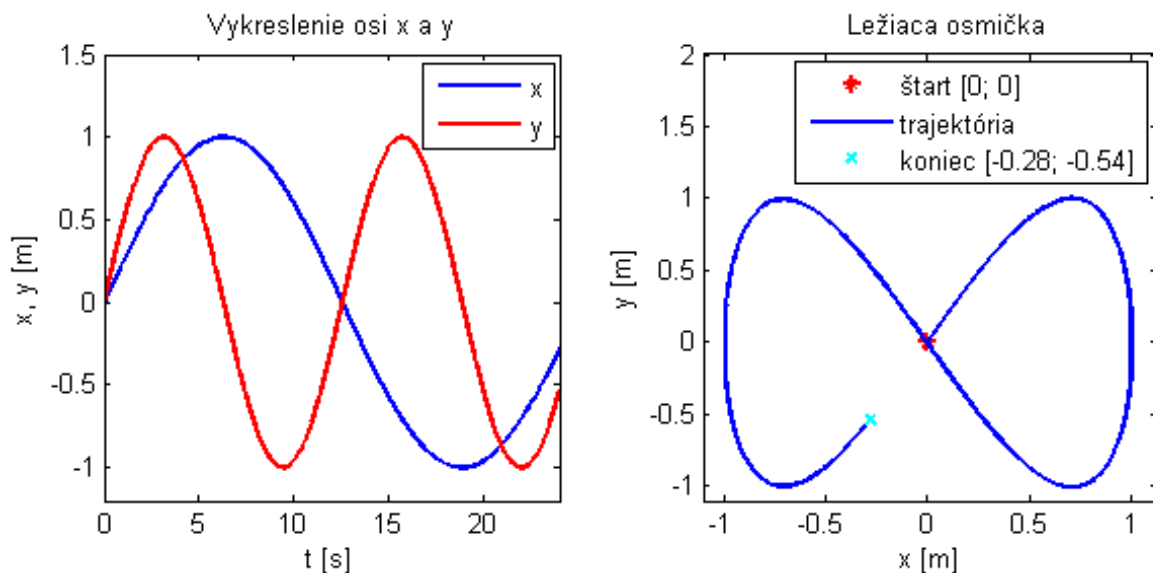
## 5. Vygenerovanie referenčnej trajektórie mobilného robota

Referenčnú trajektóriu mobilného robota tvaru ležiacej osmičky môžeme vygenerovať pomocou nasledujúcich príkazov, pričom po vygenerovaní ju uložíme do dátového typu *timeseries*.

```
dt = 0.01;           % perióda vzoriek [s]
t = 0:dt:24;        % vektor času
x = sin(t/4);       % referenčná trajektória v osi X [m]
y = sin(t/2);       % referenčná trajektória v osi Y [m]

RefTrajekt = timeseries([ x' y'], t, 'Name', 'Lamniscate_00')
save('RefTrajekt.mat', 'RefTrajekt', '-v7.3');
```

Vygenerovaná referenčná trajektória mobilného pomocou vyššie uvedeného kódu v programe Matlab potom vyzerá nasledovne (Obr. 21).

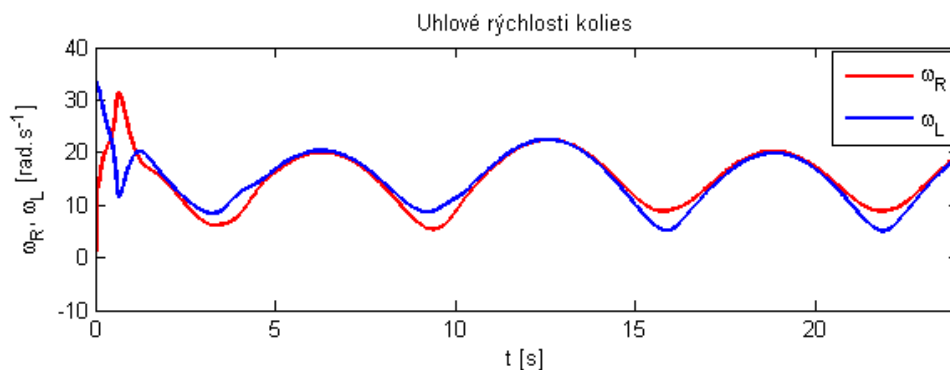


Obr. 21 Referenčná trajektória mobilného robota vygenerovaná v programe Matlab



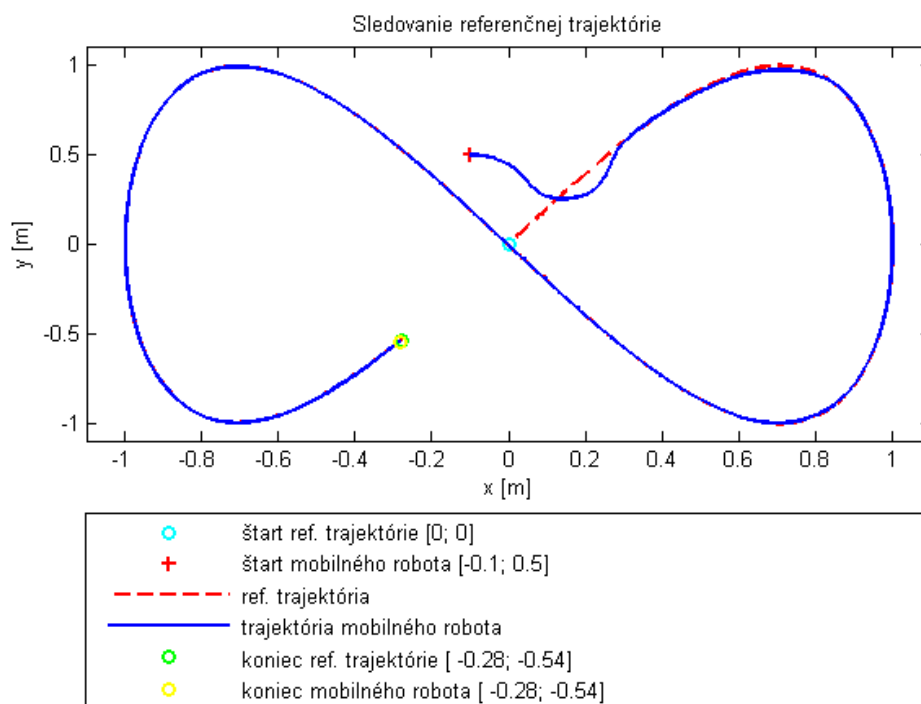
## 6. Verifikovanie modelu MR v riadiacej štruktúre pre zvolený typ referenčnej trajektórie

Overenie riadiacej štruktúry vykonáme na vygenerovanej referenčnej trajektórii tvaru ležiacej osmičky. Mobilný robot sa nachádza na východnom bode a pozícií  $[-0,1; 0,5; 0]$  a štartovací bod referenčnej trajektórie je  $[0; 0]$ . Doba experimentu je  $t = 24$  s a perióda vzorkovania je  $\Delta T = 0,01$  s. Na Obr. 22 sa nachádzajú priebehy uhlových rýchlosti kolies  $\omega_R$  a  $\omega_L$ , ktoré boli vypočítané funkčným blokom riadenia s doprednou a spätnou väzbou (Obr. 19).



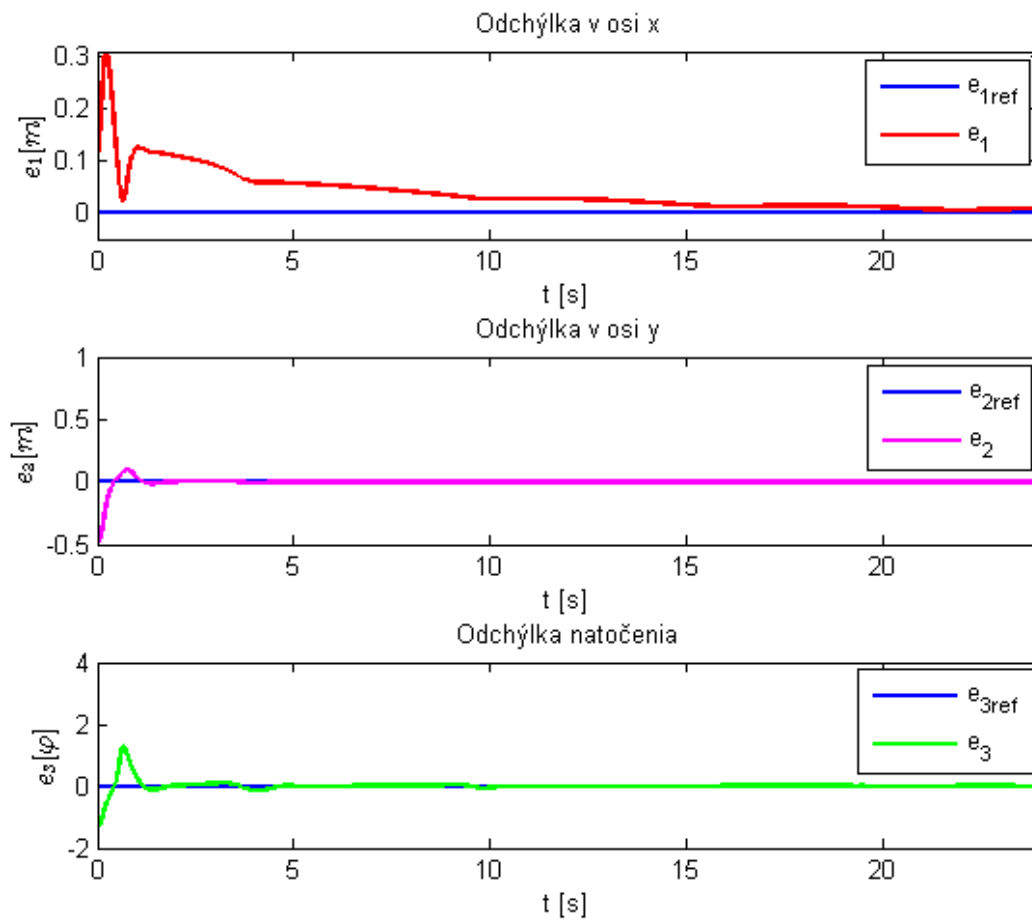
Obr. 22 Priebeh uhlových rýchlosti kolies mobilného robota

Na Obr. 23 je zobrazená referenčná trajektória spolu s trajektóriou mobilného robota a informácie o východných a koncových bodoch mobilného robota a referenčnej trajektórie. Ďalej vidíme vplyv spätnej väzby, ktorá nasmeruje a udržuje mobilného robota na referenčnej trajektórii a pôsobenie doprednej väzby, ktorá udáva doprednú a uhlovú rýchlosť  $v_{FF}$ ,  $\omega_{FF}$  vypočítanú z referenčnej trajektórie.



Obr. 23 Sledovanie referenčnej trajektórie mobilným robotom pomocou doprednej a spätnej väzby

Priebeh odchýlok mobilného robota v osiach  $x$  -  $e_1$  a  $y$  -  $e_2$  a odchýlke od požadovaného natočenia  $e_3$  sa nachádzajú na nasledujúcom Obr. 24. Odchýlky  $e_1$ ,  $e_2$  a  $e_3$  konvergujú k nulovej hodnote.



**Obr. 24** Priebeh odchýlok mobilného robota od referenčnej trajektórie

Verifikovaním riadiacej štruktúry sme overili správnosť riadenia v sledovaní referenčnej trajektórie mobilným robotom. Riadiaca štruktúra vyhovuje riadeniu a môžeme ju použiť v návrhu inteligentných metód riadenia mobilného robota v sledovaní referenčnej trajektórie (časť B).

---

**Zoznam použitej literatúry**

- [1] DUDEK, Gregory; JENKIN, Michael. *Computational principles of mobile robotics*. Cambridge university press, 2010.
- [2] ČERKALA, J. - JADLOVSKÁ, A.: *Mobile Robot Dynamic with Friction in Simulink*. In: Technical Computing Bratislava 2014: 22nd Annual Conference Proceedings: Bratislava - 2014 P. 1-10. - ISBN 978-80-7080-898-6.
- [3] JONSZTA, D.: *Modelování a řízení mobilních kolových robotů*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2008. 74 s. Vedoucí diplomové práce prof. Ing. František Šolc, CSc.
- [4] EE 5325/4315 – *Kinematics of Mobile Robots, Summer 2004 Jose Mireles Jr.*, Selected notes from 'Robótica: Manipuladores y Robotsmóviles' AníbalOllero.
- [5] JENNE, F., VASQUZ, D., KÄSTNER, R.: *Combined control of a mobile robot and a robot arm*.
- [6] ŠEMBERA, J.; ŠOLC, F. *Modelování a řízení mobilního robotu s diferenciálním podvozkem*. In Sborník MMaMS 2007. Košice: Technická univerzita v Košiciach, 2007. s. 203-207. ISBN: 978-80-8073-874- 7