Prednáška 2: NÁVRH DISKRÉTNEHO REGULÁTORA S PREDPÍSANOU ŠTRUKTÚROU

Riadenia a umelá inteligencia

doc. Ing. Anna Jadlovská, PhD.,

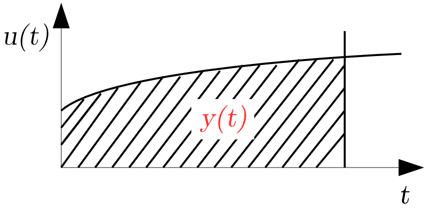
Katedra kybernetiky a umelej inteligencie
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Technická univerzita v Košiciach

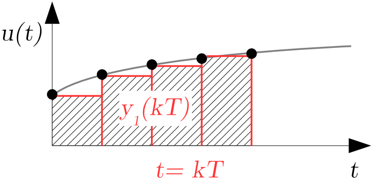
LS 2015/2016

Približné metódy diskretizácie $\cong$ aproximatívne prístupy určenia Z-obrazov

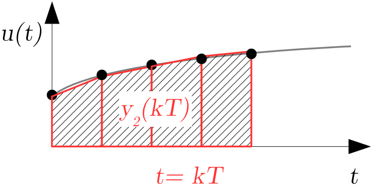
1. Numerická integrácia a derivácia: ako príklad náhrady spojitej funkcie zodpovedajúcou diskrétnou funkciou uvedieme algoritmy numerickej integrácie a derivácie (použitie: v časti pre PSD regulátor)
2. Medzi aproximatívne prístupy patrí náhrada spojitej funkcie:
   - obdĺžnikmi
   - lichobežníkmi

   a) spojitá funkcia





b) obdĺžniková náhrada



c) lichobežníková náhrada

Náhrada "PLOCHY"$\Rightarrow$ $u(t)$ a $y(t)$ platí:

$$y(t) = \frac{1}{T_1}\int_0^t u(t)dt \tag{1}$$

Laplaceov obraz (1):

$$Y(s) = \frac{1}{T_1 s}U(s) \tag{2}$$

3. Pre OBDĹŽNÍKOVÚ NÁHRADU ($T_{vz} \to$ malá) $\Rightarrow \int \cong \sum$:

$$y(k) \cong \frac{T}{T_1} \sum_{i=1}^{k} u(i-1) \qquad (3)$$

Pre posunuté vzorky:

$$y(k-1) \cong \frac{T}{T_1} \sum_{i=1}^{k-1} u(i-1) \qquad (4)$$

4. odčítaním (3) a (4) $\Rightarrow$ rekurzívny vzťah:

$$y(k) - y(k-1) \cong \frac{T}{T_1} u(k-1) \Rightarrow y(k) \cong y(k-1) + \frac{T}{T_1} u(k-1) \quad (5)$$

5. Aplikujeme Z-transf. na rovnicu (5):

$$Y(z)[1 - z^{-1}] \cong \frac{T}{T_1} U(z) z^{-1} \qquad (6)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T z^{-1}}{T_1(1 - z^{-1})} = \frac{T}{T_1} \frac{1}{z-1} \qquad (7)$$

6. Ak $T_{vz} = T \rightarrow$ malá $\Rightarrow (7) \cong (2)$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{T_1 s} \longrightarrow \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T}{T_1} \cdot \frac{1}{z-1} \tag{8}$$

- relácia medzi s a z pre aproximáciu obdĺžnikmi:

$$s \longrightarrow \frac{1}{T}(z-1) \tag{9}$$

$$\downarrow \quad \uparrow$$

$$F(s) \rightarrow F(z)$$

7. presnejšia náhrada → ak spojitú integráciu nahradíme LICHOBEŽNÍKOVOU APROXIMÁCIOU:

$$y(k) \cong \frac{T}{T_1} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2}[u(i) + u(i-1)] \tag{10}$$

pre $k = k - 1$:

$$y(k-1) \cong \frac{T}{T_1} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2}[u(i) + u(i-1)] \tag{11}$$

Odčítaním (10) a (11):

$$y(k) - y(k-1) \cong \frac{T}{2T_1}[u(k) + u(k-1)] \tag{12}$$

8. Za predpokladu rovnosti výrazov (2) a (12):

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{T_1 s} \longrightarrow \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T}{2T_1}\frac{z+1}{z-1} \tag{13}$$

- relácia medzi s a z pre aproximáciu lichobežníkom (TUSTINOV VZŤAH):

$$s \longrightarrow \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \tag{14}$$

Tustinova aproximácia: $z = e^{sT}$

$$\left[s = \frac{1}{T}\ln z = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1} + \frac{(z-1)^3}{3(z+1)^3} + \dots\right)\right]$$

9. Náhrada derivácie diferenciou → v definícii derivácie vstupu alebo výstupu sa prejde na diferenčnú predstavu:

$$y(t) = \frac{dy(t)}{dt} \cong y^*(kT) = \frac{u(kT) - u[(k-1)T]}{T} \tag{15}$$

- prenosová funkcia derivátora: $F_D(z) = \dfrac{Y(z)}{U(z)} = \dfrac{1 - z^{-1}}{T}$

Návrh diskrétnych regulátorov s predpísanou štruktúrou

1. spojitý PID regulátor a jeho ekvivalentná forma $\rightarrow$ číslicový PSD regulátor (aproximatívne prístupy)

- PSD (resp. PID) regulátory patria do skupiny regulátorov, pri ktorých sa hľadajú optimálne parametre pri zadanej štruktúre regulátora
- prepočet navrhnutého spojitého PID regulátora na diskrétny algoritmus (výsledky použiteľné pre $T_{vz} \ll$)
- predpokladajme, že máme navrhnutý spojitý PID regulátor $\rightarrow$ jeho koeficienty vyhovujú kvalite regulácie

- spojitý PID regulátor: $u(t) \rightarrow e(t)$

$$u(t) = K\left[e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(t)dt + T_d\frac{de(t)}{dt}\right] \tag{16}$$

K je zosilnenie, T_i je integračná časová konštanta, T_d je derivačná časová konštanta

pre $T_{vz} \ll$ je $\int$ nahradený $\sum$ a derivácia je nahradená diferenciou

Náhrada spojitej regulačnej odchýlky $e(t)$:

a) obdĺžnikmi b) lichobežníkmi

Poznámka: Prenosová funkcia PID regulátora má buď:

- zložkový tvar:

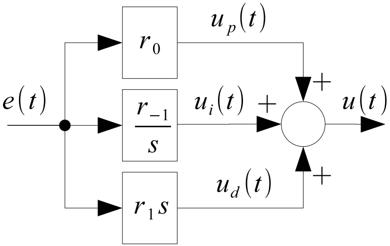
$$F_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s, \tag{17}$$

kde r_0 - koef. zosilnenia, r_{-1} - koef. integračnej zložky, r_1 - koef. derivačnej zložky

- interakčný tvar:

$$F_R(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) \tag{18}$$

K - zosil. prop. zl. T_i - int. čas. konšt. T_d - deriv. čas. konšt.	$r_0 = K$ $r_{-1} = \frac{K}{T_i}$ $r_1 = KT_d$	$T_i = \frac{K}{r_{-1}} = \frac{r_0}{r_{-1}}$ $T_d = \frac{r_1}{K} = \frac{r_1}{r_0}$



Obr.: Štruktúra ideálneho PID regulátora

$e(t)$ je regulačná odchýlka, $u(t)$ je akčný zásah

A. Aproximácia spojitého priebehu regulačnej odchýlky e(t) obdĺžnikmi

- diskretizácia (približná) rovnice pre spojitý PID pre $t = kT$:

$$u(kT) = u(k) = K\left\{e(k) + \frac{T}{T_i}\sum_{i=0}^{k-1} e(i) + \frac{T_d}{T}\left[e(k) - e(k-1)\right]\right\} \tag{19}$$

$\rightarrow$ nerekurentná forma $\cong$ polohový (position) algoritmus (nie je vhodný pre praktické použitie)

- rekurzívna forma PSD algoritmu $\cong$ rýchlostný (velocity) algoritmus:

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k), \tag{20}$$

dosadením $k = k - 1$:

$$u(k-1) = K\left\{e(k-1) + \frac{T}{T_i}\sum_{i=0}^{k-2} e(i) + \frac{T_d}{T}\left[e(k-1) - e(k-2)\right]\right\} \tag{21}$$

Odčítaním (19) od (21) a následnou úpravou získame vyjadrenie PSD regulátora:

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2), \qquad (22)$$

kde:

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k)$$

$$\boxed{q_0 = K\left(1 + \frac{T_d}{T}\right), \quad q_1 = -K\left(1 + 2\frac{T_d}{T} - \frac{T}{T_i}\right), \quad q_2 = K\frac{T_d}{T}}$$

B. Aproximácia spojitého priebehu regulačnej odchýlky e(t) lichobežníkmi

- diskretizácia (približná) rovnice pre spojitý PID pre $t = kT$:

$$u(k) = K\left\{e(k) + \frac{T}{T_i}\left[\frac{e(0)+e(k)}{2} + \sum_{i=0}^{k-1} e(i)\right] + \frac{T_d}{T}\left[e(k) - e(k-1)\right]\right. \qquad (23)$$

Rovnica (23) predstavuje polohovú (nerekurentnú) formu riadiaceho zásahu

- postup odvovednia je analogický ako v prípade aproximácie spojitého priebehu $e(t)$ obdĺžnikmi:

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2), \qquad (24)$$

kde $\boxed{q_0 = K\left(1 + \frac{T}{2T_i} + \frac{T_d}{T}\right),\ q_1 = -K\left(1 + 2\frac{T_d}{T} - \frac{T}{2T_i}\right),\ q_2 = K\frac{T_d}{T}}$

Rovnice (22) a (24) predstavujú RÝCHLOSTNÝ ALGORITMUS PSD regulátora

- prenosovú funkciu diskrétneho PSD regulátora dostaneme Z-transformáciou diferenčnej rovnice:

$$u(k) - u(k-1) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2):$$

$$U(z)(1 - z^{-1}) = (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2})E(z) \tag{25}$$

$$F_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{Q(z)}{P(z)} \tag{26}$$

C. Podmienky ekvivalentnosti PSD a PID regulátora

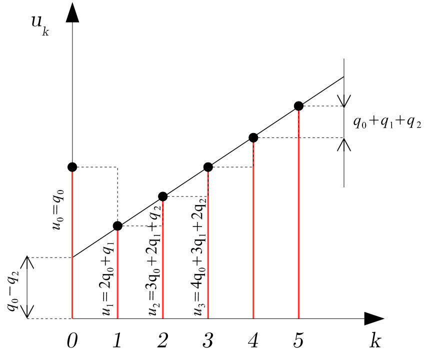
- sú to podmienky, pri ktorých má číslicový PSD regulátor analogický charakter ako spojitý PID
- vychádzame z tvaru prechodovej charakteristiky PSD regulátora opísaného rovnicou (24), resp. prenosovou funkciou (26)
- predpokladajme skokový vstupný signál do regulátora:

$$\begin{aligned} e(k) = 1(k) &= 1 \text{ pre } \quad k \geq 0 \\ &= 0 \text{ pre } \quad k < 0 \end{aligned} \tag{27}$$

- odozva regulátora podľa (24):

$$\begin{aligned} k = 0 : u(0) &= q_0 \\ k = 1 : u(1) &= u(0) + q_0 + q_1 = 2q_0 + q_1 \\ k = 2 : u(2) &= u(1) + q_0 + q_1 + q_2 = 3q_0 + 2q_1 + q_2 \\ &\vdots \\ k : u(k) &= u(k-1) + q_0 + q_1 + q_2 = \\ &= (k+1)q_0 + kq_1 + (k-1)q_2 \end{aligned} \tag{28}$$

- charakter PID regulátora ostane po prepočte na PSD zachovaný, ak tvar prechodovej charakteristiky bude ako na obr.:

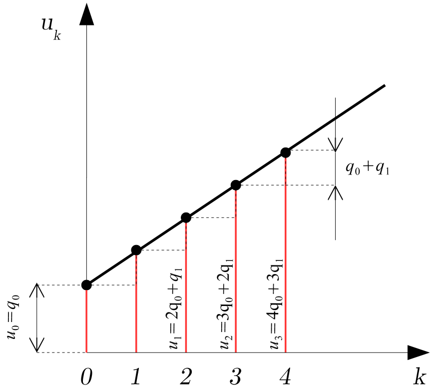


Obr.: Prechodová charakteristika číslicového PID regulátora

- $u(1) < u(0), u(k) > u(k-1)$ pre $k \geq 2$, ak $q_0 > 0$, tak $q_0 = u(0)$
- $F_{pid}(z^{-1}) = \dfrac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$
- $\boxed{u_0 = q_0}$, $\boxed{u_1 = 2q_0 + q_1}$ $\rightarrow$ v nasledujúcich krokoch začína integračný nárast o konštantný prírastok v každom kroku $\boxed{q_0 + q_1 + q_2}$

1. $u(1) < u(0) \Rightarrow q_0 + q_1 < 0$
$$\left.\begin{array}{rr} u_1 = & 2q_0 + q_1 \\ u_0 = & q_0 \end{array}\right\} 2q_0 + q_1 < q_0$$
2. $u(k) > u(k-1)$ pre $k \geq 2 \Rightarrow$ $q_0 + q_1 + q_2 > 0$

Podmienky ekvivalentnosti: $\boxed{q_0 > 0, q_1 < -q_0, -(q_0 + q_1) < q_2 < q_0}$

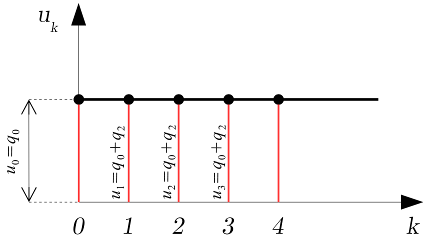


- $F_{pi}(z^{-1}) = \dfrac{q_0 + q_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$
- $q_0 + q_1 > 0, \; q_2 = 0,$
- $u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1)$

1. $u(1) > u(0) \wedge \boxed{q_0 > 0}$
2. $q_0 + q_1 > 0 \rightarrow \boxed{q_1 > -q_0}$

Obr.: Prechodová charakteristika číslicového PI regulátora

Podmienky ekvivalentnosti: $\boxed{q_0 > 0, q_1 > -q_0}$



Obr.: Prechodová charakteristika číslicového PD regulátora

$$q_0 = K(1 + \frac{T_D}{T});$$

$$q_1 = -K(1 + 2\frac{T_D}{T} - \frac{T}{T_i}); \quad q_2 = K\frac{T_D}{T}$$

- $F_{pd}(z^{-1}) = q_0 - q_2 z^{-1}$
- $q_0 + q_2 > 0$,

$$\boxed{u(k) = q_0 e(k) - q_2 e(k-1)}$$

$$q_1 = -q_0 - q_2$$

- $\frac{U(z)}{E(z)} =$

$$= \frac{q_0 - (q_0 + q_2)z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} =$$

$$= \frac{q_0(1 - z^{-1}) - q_2(1 - z^{-1})z^{-1}}{1 - z^{-1}} =$$

$$= q_0 - q_2 z^{-1}$$

Podmienky ekvivalentnosti $\boxed{q_0 > 0 \wedge q_0 + q_2 > 0 \Rightarrow q_0 > -q_2}$

Na základe tvaru prechodovej charakteristiky PSD regulátora možno definovať nasledujúce koeficienty PSD reg.:

- $K = q_0 - q_2$ (zosilnenie)
- $C_D = \frac{q_2}{K}$ (derivačná konštanta)
- $C_i = \frac{q_0+q_1+q_2}{K}$ (integračná konštanta)

Takto definované koef. sú viazané pre $T \ll$ s parametrami zodpovedajúceho PID reg. (K, T_D, T_i) vzťahmi (obdĺž. náhrada):

$$K = K, C_D = \frac{T_D}{T}, C_i = \frac{T}{T_i}$$

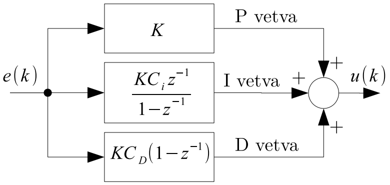
Prenosová funkcia:

$$F_R(z) = K\left[1 + C_i\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} + C_D(1 - z^{-1})\right] \tag{29}$$

Zo vzťahu (29) môžeme vyčleniť jednotlivé vetvy pre P, I, D zložku:

- proporcionálna zl.: $u_p(k) = Ke(k) = (q_0 - q_2)e(k)$
- integračná zl.:
  $u_i(k) = u_i(k-1) + KC_i e(k-1) = u_i(k-1) + (q_0 + q_1 + q_2)e(k-1)$
- derivačná zl.: $u_D(k) = KC_D e(k) - KC_D e(k-1) = q_2(e(k) - e(k-1))$

$$u(k) = u_p(k) + u_i(k) + u_D(k)$$



Obr.: Bloková štruktúra PSD regulátora

PS regulátor:

$$F_R(z) = \frac{K[1 + (C_i)z^{-1}]}{1 - z^{-1}},$$

$$K = q_0, C_D = 0,$$

$$C_i = \frac{q_0 + q_1}{K}, \text{pričom } K > 0, C_i > 0$$

$$u(k) = u(k-1) + Ke(k) + KC_i e(k-1)$$