

Prednáška 5: Návrh polynomiálneho regulátora na základe predpísania pólov (pole-placement design)

Riadenie a Umelá Inteligencia

doc. Ing. Anna Jadlovská, PhD.,

Katedra kybernetiky a umelej inteligencie
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Technická univerzita v Košiciach

LS 2015/2016

Návrh regulátora na základe predpísania pólov (pole-placement design)

Vypočítajte parametre diskrétného (polynomiálneho) regulátora s využitím metódy rozloženia pólov a aplikujte ho na riadenie prúdu jednosmerného motoru:

- 1 Požadujeme, aby póly URO boli: $z_1 = 0.1$; $z_2 = 0.2$; $z_3 = 0.3$; $z_4 = 0.4$;
- 2 Opis riadeného procesu:

$$F_P(z) = \frac{0.257z^{-1} + 0.21z^{-2}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.54z^{-2}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (1)$$

- 3 Volíme nasledujúci tvar regulátora:

$$F_R(z) = \frac{q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + p_1z^{-1})} = \frac{Q(z)}{P(z)} \quad (2)$$

Návrh regulátora na základe predpísania pólov (pole-placement design)

- 4 Charakteristická rovnica URO: $1 + F_P(z)F_R(z) = 0$;

$$F_P(z) = \frac{B(z)}{A(z)}, \quad F_R(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$$

$1 + F_P(z)F_R(z) = 0 \Rightarrow A(z)P(z) + B(z)Q(z) = C(z)$, - charakter. polynóm

- 5 Charakteristický polynóm URO $C(z)$:

$$C(z) = (1 - z^{-1})(1 + p_1z^{-1})(1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}) + (q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2})(b_1z^{-1} + b_2z^{-2}) \quad (3)$$

Návrh regulátora na základe predpísania pólov (pole-placement design)

- 6 želaný tvar charakteristického polynómu URO - $C_d(z)$:

$$\begin{aligned} C_d(z) &= (z - 0.1)(z - 0.2)(z - 0.3)(z - 0.4) = \\ &= (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) \end{aligned} \quad (4)$$

- 7 Porovnaním $C(z)$ a $C_d(z)$ pri rovnakých mocninách:

$$C(z) = C_d(z),$$

$$z^{-1} : p_1 + q_0 b_1 = -(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) + 1 - a_1,$$

$$z^{-2} : p_1(a_1 - 1) + q_0 b_2 + q_1 b_1 = z_1 z_2 + z_3 z_4 + (z_1 + z_2)(z_3 + z_4) + a_1 - a_2,$$

$$z^{-3} : p_1(a_2 - a_1) + q_1 b_2 + q_2 b_1 = -z_1 z_2(z_3 + z_4) + z_3 z_4(z_1 + z_2) + a_2,$$

$$z^{-4} : q_2 b_2 - p_1 a_2 = z_1 z_2 z_3 z_4 \quad (5)$$

Návrh regulátora na základe predpísania pólov (pole-placement design)

8 Po dosadení do (5):

$$\begin{aligned} p_1 + 0.2573q_0 &= 1.512 \\ -2.51p_1 + 0.2107q_0 + 0.257q_1 &= -1.7113, \\ 2.06p_1 + 0.21q_1 + 0.25q_2 &= 0.499, \\ -0.5493p_1 + 0.2107q_2 &= 0.0024 \end{aligned} \quad (6)$$

9 Vyriešením (6) \Rightarrow získame koeficienty regulátora:

$$p_1 = 0.533; q_0 = 3.803; q_1 = -4.55; q_2 = 1.4017$$

$$P(z) = 1 + p_1z^{-1}; Q(z) = q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2}$$

$$F_R(z) = \frac{3.803 - 4.55z^{-1} + 1.4z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + 0.533z^{-1})} = \frac{U(z)}{E(z)} \quad (7)$$

Návrh regulátora na základe predpísania pólov (pole-placement design)

10 z $F_R(z) \rightarrow$ vypočítame riadiaci zásah $u(k)$:

$$u(k) = 0.46u(k-1) + 0.53u(k-2) + 3.8e(k) - 4.55e(k-1) + 1.4e(k-2)$$

11 Kontrola ustálených stavov $y(k)$, $u(k)$, $e(k)$ s využitím vety o konečnej hodnote.

Návrh regulátora na základe predpísania pólov - 2. modifikácia

Zmena v prenosovej funkcii regulátora $F_R(z)$:

- 1 Uvažujme URO s príslušnými prenosovými funkciami regulátora a procesu:

$$F_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_\nu z^{-\nu}}{1 + p_1 z^{-1} + \dots + p_\mu z^{-\mu}} \quad (8)$$

$$F_P(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} z^{-d} \quad (9)$$

- 2 Prenosová funkcia riadenia $F_{Y/W}(z)$:

$$F_{Y/W}(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{F_R(z)F_P(z)}{1 + F_R(z)F_P(z)} = \frac{B(z)Q(z)}{B(z)Q(z) + A(z)P(z)}$$

Návrh regulátora na základe predpísania pólov - 2. modifikácia

- 3 Charakteristický polynóm URO:

$$P(z)A(z) + B(z)Q(z) = N(z) \quad (10)$$

- 4 Dynamické vlastnosti regulačného obvodu sú určené pólmi jeho prenosovej funkcie, t.j. pólmi (koreňmi) charakteristického polynómu $N(z)$ (10)
- 5 Cieľom návrhu regulátora s využitím metódy rozmiestnenia pólov je dosiahnutie predpísaných vlastností URO \Leftrightarrow žiadané póly určujeme tak, aby sa dosiahli požadované vlastnosti URO
- 6 Žiadaný charakteristický polynóm:

$$N_d(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_i) \dots (z - z_r), \quad (11)$$

kde z_i sú želané póly URO:

$$N_d(z) = 1 + \alpha_1 z^{-1} \dots + \alpha_i z^{-i} \dots + \alpha_r z^{-r}, \quad (12)$$

Návrh regulátora na základe predpísania pólov - 2. modifikácia

- 7 Hľadané neznáme koeficienty regulátora q_i, p_i môžeme určiť z rovnice:

$$N(z) = N_d(z) \quad (13)$$

porovnaním pri rovnakých mocninách

8

$$(1 + p_1 z^{-1} + \dots + p_\mu z^{-\mu})(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}) + (q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_\nu z^{-\nu})(b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}) \quad (14)$$

- 9 neznáme stupne μ, ν polynómov $P(z), Q(z)$ možno stanoviť z jednoznačnosti určenia $\mu + \nu + 1$ neznámych koeficientov q_i, p_i

Návrh regulátora na základe predpísania pólov - 2. modifikácia

- 10 Pre určenie q_i, p_i máme r rovníc, ktoré dostaneme porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách z (14) a rovnicu vyplývajúcu z nulovej trvalej regulačnej odchýlky:

$$[P(z)]_{z=1} = P(1) = 0; \text{ t.j. } \sum_{i=1}^{\mu} p_i = -1 \quad (15)$$

- 11 Z hľadiska jednoznačnosti riešenia:

$$\mu + \nu + 1 = r + 1 \quad (16)$$

a) $\mu \geq \nu + d \Rightarrow r = m + \mu$ (stupeň $N(z)$ je daný stupňom $P(z)A(z) \Rightarrow z$ (16))

$\mu + \nu + 1 = m + \mu + 1 \Rightarrow \nu = m$ rád čitateľa regulátora = rádu čitateľa procesu

b) $\mu \leq \nu + d \Rightarrow r = \nu + m + d + 1 \rightarrow$ dosadením do (16)

$\mu = m + d \Rightarrow$ rád menovateľa regulátora = rádu čitateľa procesu + oneskorenie

Návrh regulátora na základe predpísania pólov - 2. modifikácia

12 Stupne polynómov $P(z)$ a $Q(z)$:

$$\mu = m + d, \nu = m$$

a hľadané koeficienty získame riešením sústavy lineárnych rovníc (14) a (15)

Záver: Riešenie spočíva v 2 krokoch:

- určenie stupňov polynómov $P(z)$, $Q(z)$ (krok 12)
- riešenie sústavy lineárnych rovníc (14) a (15) pre neznáme koeficienty p_i, q_i

STABILITA je daná návrhom (predpísané póly musia byť z jednotkovej kružnice)

Návrh regulátora na základe predpisania pólov - príklad

Príklad s využitím metódy predpisania pólov - 2. modifikácia
Koefficienty procesu $G_P(z)$:

$$F_P(s) = \frac{1}{(s+1)(2s+1)} = \frac{1}{2s^2 + 3s + 1} \quad (17)$$

Navrhňte diskretný regulátor, ktorý umiestni póly regulovaného obvodu na predpísané hodnoty, $T_{VZ} = 1$

Riešenie:

1. Diskretná prenosová funkcia procesu:

$$F_P(z) = \frac{0.1548z^{-1} + 0.0939z^{-2}}{1 - 0.974z^{-1} + 0.2231z^{-2}} = \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \quad (18)$$

Návrh regulátora na základe predpísania pólov - príklad

2. $m = 2$, $d = 0$ (proces) :

$$\begin{aligned}\nu &= m = 2 \\ \mu &= m + d = 2\end{aligned}\tag{19}$$

ν -rád čitateľa regulátora, μ -rád menovateľa regulátora

$$F_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}}\tag{20}$$

3. charakteristický polynóm URO:

$$\begin{aligned}N(z) &= (1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2})(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) + \\ &+ (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2})(b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})\end{aligned}\tag{21}$$

4. želaný polynóm:

$$N_Z(z) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \alpha_3 z^{-3} + \alpha_4 z^{-4}\tag{22}$$

Návrh regulátora na základe predpísania pólov - príklad

5. $N(z) = N_Z(z)$ porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách:

$$\begin{aligned}z^{-1} : \quad & p_1 + b_1 q_0 = \alpha_1 - a_1 \\z^{-2} : \quad & a_1 p_1 + p_2 + b_2 q_0 + b_1 q_1 = \alpha_2 - a_2 \\z^{-3} : \quad & a_2 p_1 + a_1 p_2 + b_2 q_1 + b_1 q_2 = \alpha_3 \\z^{-4} : \quad & a_2 p_2 + b_2 q_2 = \alpha_4 \\p_1 + p_2 &= -1\end{aligned}\tag{23}$$

Návrh regulátora na základe predpísania pólov - príklad

6. pre proces:

$$a_1 = -0.97, a_2 = 0.22, b_1 = 0.15, b_2 = 0.09. \quad (24)$$

želaný polynóm $r = 4$ (umiestniť 4 póly):

$$\begin{aligned} a) \quad & z_1 = 0.5, z_2 = 0.4, z_3 = 0.3, z_4 = 0.2 \\ & \alpha_1 = -1.4, \alpha_2 = 0.7, \alpha_3 = -0.15, \alpha_4 = 0.012 \end{aligned} \quad (25)$$

výsledný prenos regulátora $F_R(z)$

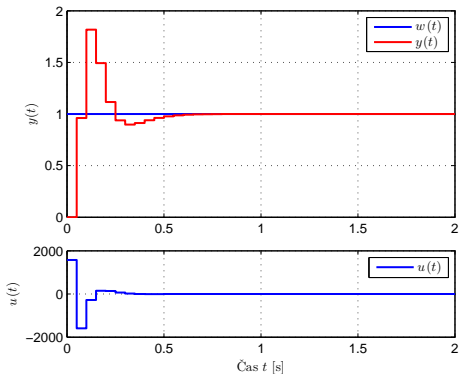
$$F_R(z) = \frac{2.56 - 2.43z^{-1} + 0.55z^{-2}}{1 - 0.82z^{-1} - 0.17z^{-2}} \quad (26)$$

Návrh regulátora na základe predpísania pólov - príklad

Prenos regulátora $F_R(z)$:
$$F_R(z) = \frac{2.56 - 2.43z^{-1} + 0.55z^{-2}}{1 - 0.82z^{-1} - 0.17z^{-2}} = \frac{U(z)}{E(z)}$$

$$u(k) = 2.56e(k) - 2.43e(k-1) + 0.55e(k-2) + 0.82u(k-1) + 0.17u(k-2),$$

pre $T_{vz} = 0.05$



Návrh regulátora na základe predpísania pólov - príklad

b)

$$\begin{aligned} z_1 &= -0.5, z_2 = 0.4, z_3 = 0.3, z_4 = -0.2 \\ \alpha_1 &= 0, \alpha_2 = -0.27, \alpha_3 = 0.014, \alpha_4 = 0.012 \end{aligned} \quad (27)$$

výsledný prenos regulátora $F_R(z)$

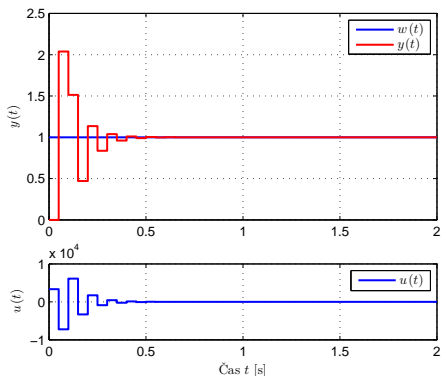
$$F_R(z) = \frac{8.9705 - 7.45z^{-1} + 1.519z^{-2}}{1 - 0.4142z^{-1} - 0.5858z^{-2}} \quad (28)$$

Návrh regulátora na základe predpísania pólov - príklad

Prenos regulátora $F_R(z)$:
$$F_R(z) = \frac{8.9705 - 7.45z^{-1} + 1.519z^{-2}}{1 - 0.4142z^{-1} - 0.5858z^{-2}}$$

$$u(k) = 8.9705e(k) - 7.45e(k-1) + 1.519e(k-2) + 0.4142u(k-1) + 0.5858u(k-2),$$

pre $T_{vz} = 0.05$



Návrh regulátora na základe predpísania pólov - príklad

Porovnanie regulátorov a), b), pre $T_{vz} = 0.05$:

