Prednáška 6: MODÁLNE RIADENIE

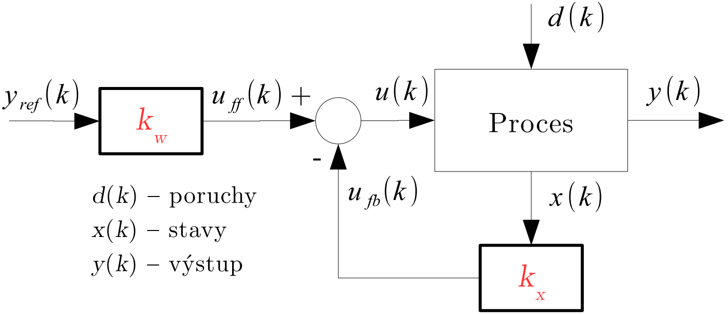
Riadenie a Umelá Inteligencia

doc. Ing. Anna Jadlovská, PhD.,

Katedra kybernetiky a umelej inteligencie
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Technická univerzita v Košiciach

LS 2015/2016

Modálne riadenie DS - riadiaca štruktúra s dopredným riadením

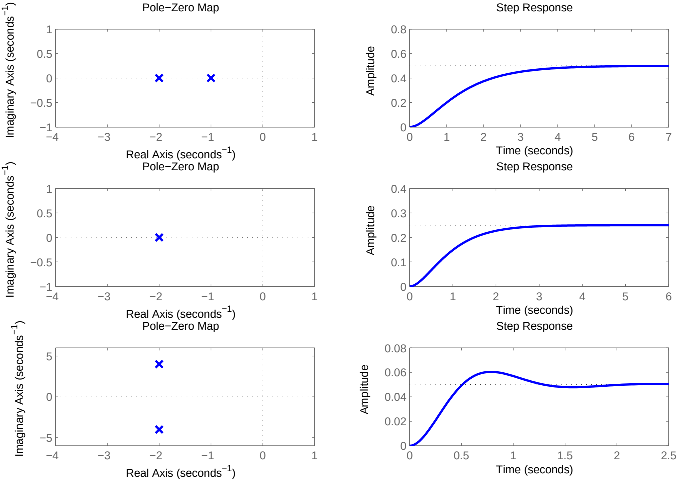


Obr.: Bloková schéma modálneho riadenia

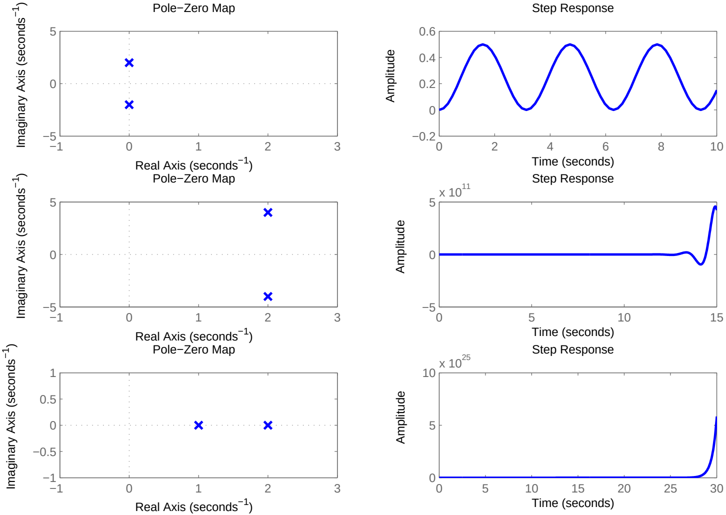
- k_x - spätnoväzobné zosilnenie určujeme z dopredu zadaných pólov, $u_{fb} = k_x x(k)$
- k_w - dopredné zosilnenie zabezpečuje nulovú regulačnú odchýlku v ustálenom stave $u_{ff} = k_w y_{ref}(k)$

Modálne riadenie DS - vplyv polohy pólov na dynamiku systému

Uvažujme systém druhého rádu s dvojicou pólov $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$



Modálne riadenie DS - vplyv polohy pólov na dynamiku systému

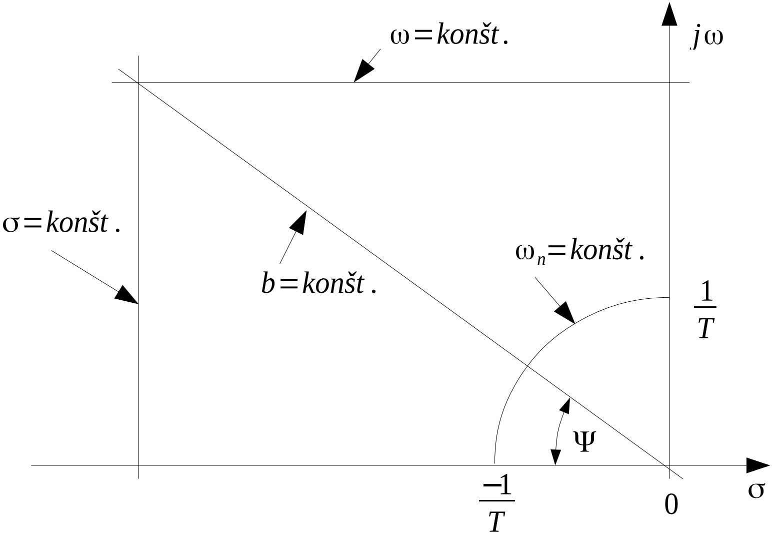


Modálne riadenie DS - vplyv polohy pólov na dynamiku systému

Pre systém zadaný prenosovou funkciou $G(s) = 1/(T^2s^2 + 2bTs + 1)$, ktorý má póly $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega = -b/T \pm j(\sqrt{1-b^2})/T$ platí nasledovné:

- ak prirodzená kruhová frekvencia $\omega_n = 1/T =$ konšt., potom póly systému so zmenou koeficientu pomerného tlmenia b sa pohybujú po kružnici
- ak $b =$ konšt., potom so zmenou časovej konštanty T sa póly pohybujú po priamke odchýlenej od zápornej reálnej poloosi o uhol $\Psi = \arccos(b)$
- ak sa súčasne mení b a T tak, že ich pomer $\sigma = b/T =$ konšt., potom sa mení len vlastná frekvencia systému $\omega = \omega_n\sqrt{1-b^2}$ a póly sa pohybujú po priamke rovnobežnej s imaginárnou osou
- ak b a T sa menia tak, že $\omega = (\sqrt{1-b^2})/T =$ konšt., potom sa póly pohybujú na priamke rovnobežnej s reálnou osou

Modálne riadenie DS - vplyv polohy pólov na dynamiku systému



Modálne riadenie DS - vplyv polohy pólov na dynamiku systému

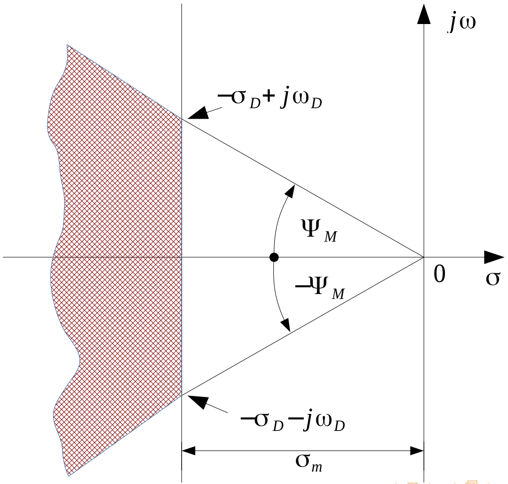
Z hľadiska praxe sa vyžaduje, aby regulačný obvod:

- bol stabilný, t.j. aby jeho póly ležali v ľavej polrovine komplexnej roviny $\sigma, j\omega$
- nebol príliš kmitavý, t.j. aby kmitavosť systému $\tan \Psi$ neprekročila určitú danú maximálnu hodnotu $\tan \Psi_M$
- nemal menšie tlmenie, ako určité predom dané minimálne tlmenie σ_m, t.j. aby pre reálne časti všetkých pólov systému platila nerovnica $-\sigma_i \leq -\sigma_m, i = 1, 2, \dots, n$

Pri systémoch vyšších rádov na dynamiku systému najviac vplýva ten reálny pól alebo tá komplexne združená dvojica pólov, ktorá leží najbližšie k imaginárnej osi. Preto ich nazývame dominantnými pólmi a označujeme ich indexom D, t.j. $s_D = -\sigma_D \pm j\omega_D$

Modálne riadenie DS - vplyv polohy pólov na dynamiku systému

Uvedené požiadavky vymedzujú v komplexnej rovine $\sigma, j\omega$ šrafovanú oblasť pólov.



Rozmiestňovanie pólov systému (pole-placement design) - proces vo V/V opise

- nevyhovujúce dynamické vlastnosti systému $\rightarrow$ dôsledok zlého rozmiestnenia pólov $s_{1,2} = -\tau \pm j\omega$ v komplexnej rovine
- úlohou MODÁLNEHO RIADENIA - posun pólov do polohy, ktorá zabezpečí požadované vlastnosti riadiacej štruktúry
- môžeme zadať aj s využitím koeficientov ŠTANDARDNÝCH TVAROV charakteristických polynómov URO

$$\boxed{P_n = s^n + c_{n-1}s^{n-1}\omega_n + \ldots + c_1 s^1 \omega_n^{n-1} + \omega_n^n}$$

ω_n - prirodzená kruhová frekvencia URO

c_i - koeficienty určené číselne s využitím integrálnych kritérií kvality prechodového javu

Rozmiestňovanie pólov systému (pole-placement design) - proces vo V/V opise

Koeficienty c_i sú určené na základe minimalizácie regulačnej plochy podľa integrálneho kritéria ITAE:

Tabuľka: Štandardné tvary - metóda Graham-Lathrop

n	c_5	c_4	c_3	c_2	c_1	c_0
1					1	1
2				1	1.4	1
3			1	1.75	2.15	1
4		1	2.1	3.4	2.7	1
5	1	2.8	5	5.5	3.4	1

Pozn.: Zvyšovaním hodnoty ω_n pre $n =$ konšt. $\rightarrow$ póly posúvame doprava $\Rightarrow$ skracujeme čas nábehu prechodovej charakteristiky URO, T_r - čas regulácie pri zachovaní konštantného tlmenia

Modálny regulátor v stavovom priestore

- návrh regulátorov na základe vonkajšieho $\cong$ V/V opisu procesu a s využitím metódy umiestnenia pólov alebo metód na základe štandardných tvarov (G-L, BW)
- pri návrhu z vonkajšieho modelu sa predpokladá, že URO je pred príchodom zmeny (vstupnej veličiny alebo poruchy) v ustálenom stave,
- kvalitatívne odlišný je návrh riadenia v STAVOVOM PRIESTORE $\cong$ vnútorný $\cong$ stavový model procesu
- návrh pre vnútorný model zohľadňuje nenulové počiatočné podmienky, t.j. URO nemusí byť v ustálenom stave

  CIEĽ MODÁLNEHO RIADENIA: návrh vektora proporcionálnych regulátorov (pre spätnú väzbu od vektora stavov systému) tak, aby sa dosiahli predpísané vlastné čísla matice systému.

Vlastné čísla určujú jednotlivé MÓDY vnútornej dynamiky systému.

Modálny regulátor v stavovom priestore

Formulácia úlohy:

1. uvažujme model systému opísaný v stavovom priestore:

$$
\begin{aligned}
x[(k+1)T] &= A_D x(kT) + b_D u(kT) \\
y(kT) &= C_D^T x(kT) + d_D u(kT)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

2. rovnako ako pre spojitý systém, riadenie má tvar:

$$
u(kT) = \underbrace{-k_x x(kT)}_{u_{fb}} + \underbrace{k_w w(kT)}_{u_{ff}} \tag{2}
$$

3. systém s riadením (2) je opísaný rovnicou:

$$
x[(k+1)T] = (A_D - b_D k_x)x(kT) + b_D k_w w(kT) \tag{3}
$$

Dynamické vlastnosti systému v riadiacej štruktúre (3) sú definované vlastnými číslami $\cong$ (koreňmi charakteristickej rovnice) matice systému $\boxed{A_D - b_D k_x}$

Pozn.: Vlastné čísla matice systému = pólom prenosovej funkcie systému

Formulácia úlohy:

4. Cieľ návrhu Modálneho riadenia je určiť takú maticu (vektor) spätnoväzobného zosilnenia k_x, aby matica riadeného systému $(A_D - b_D k_x)$ mala predpísané vlastné čísla

Riešiteľnosť úlohy $\rightarrow$ riadenie (2) umiestňujúce vlastné čísla systému do predpísaných hodnôt sa dá k systému (1) navrhnúť práve vtedy, ak systém (model procesu v stavovom priestore) je dosiahnuteľný, t.j. ak matica riaditeľnosti má plnú hodnosť.

Modálny regulátor v stavovom priestore

$$F(s) \to F(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \text{ pri zvolenej } \quad T_{vz}$$

5. uvažujme systém v kanonickej forme riaditeľnosti:

$$A_D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{dn} & -a_{dn-1} & -a_{dn-2} & \dots & -a_{d1} \end{bmatrix} \quad b_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$C_D = \begin{bmatrix} b_{dn} & b_{dn-1} & \cdots & b_{d1} \end{bmatrix}$$

6. Žiadaný charakteristický polynóm má tvar daný želanými vlastnými číslami:

$$\begin{aligned} N_{\check{z}}(z) &= (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) \\ &= z^n + q_1 z^{n-1} + \cdots + q_{n-1} z + q_n \end{aligned} \tag{5}$$

Modálny regulátor v stavovom priestore

7. Matica systému s riadením $A_C = (A_D - b_D k_x)$:

$$A_C = (A_D - b_D k_x) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{dn} - k_n & -a_{dn-1} - k_{n-1} & \dots & \dots & -a_{d1} - k_1 \end{bmatrix} = \tag{6}$$

$$A_{\check{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -q_n & -q_{n-1} & \dots & \dots & -q_1 \end{bmatrix}$$

8. z $A_C = A_{\check{z}} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} k_i &= q_i - a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \ \text{kde} \\ k_x &= [k_n, \dots, k_1]^T \end{aligned} \tag{7}$$

Modálny regulátor v stavovom priestore

9. Kvalita v ustálenom stave $\rightarrow$ kvalitu riadenia v ustálenom stave (nulovú regulačnú odchýlku) môžeme zabezpečiť pomocou DOPREDNEJ VÄZBY:

$$\lim_{k\to\infty} e(kT) = \lim_{k\to\infty} [w(kT) - y(kT)] =$$

$$\lim_{z\to 1} \left\{(z-1)\left[W(z) - C_D^T(zI - A_C)^{-1} b_D k_w W(z)\right]\right\} =$$

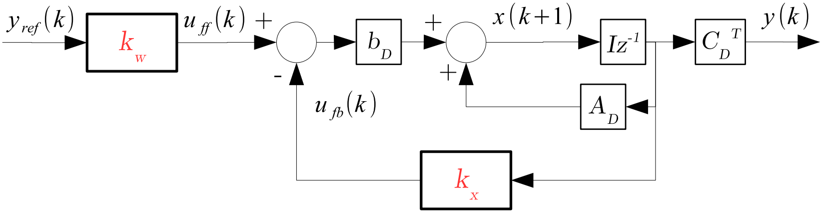
$$\lim_{z\to 1} \left\{(z-1)\left[1 - C_D^T(zI - A_C)^{-1} b_D k_w\right] W(z)\right\} = 0$$

pre $W(z) = \dfrac{z}{(z-1)}$ dostaneme:

$$k_w = \frac{1}{C_D^T(I - A_C)^{-1} b_D} \tag{8}$$

Pozn.: Ak opis procesu nie je v kanonickej forme riaditeľnosti - dá sa do tejto formy transformovať

Modálny regulátor v stavovom priestore



Obr.: Bloková schéma regulačného obvodu s modálnym regulátorom (detail - proces v stavovom opise) - riadiaca štruktúra s dopredným riadením

Modálny regulátor v stavovom priestore - príklad

Pre lineárny dynamický systém $F_P(s) = \dfrac{1}{2s^2 + 3s + 1}$ vypočítajte spätnoväzobné k_x a dopredné zosilnenie k_w diskrétneho modálneho regulátora pre $T_{VZ} = 1\text{s}$ a zvolené póly riadiacej štruktúry:

- a) (0.2, 0.3)
- b) (0.4, 0.5)
- c) (-0.2, 0.3)

naprogramujte funkciu v prostredí Matlab, ktorej výstupom budú zosilnenia k_x a k_w.
Simulačne overte riadenie zvoleného systému v stavovom opise. Simulačné výsledky modálneho riadenia porovnajte pre sadu pólov a), b), c)

Modálny regulátor v stavovom priestore - príklad

Riešenie: Diskrétna prenosová funkcia procesu:

$$F_P(z) = \frac{0.15z^{-1} + 0.093z^{-2}}{1 - 0.974z^{-1} + 0.22z^{-2}} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

1. Opis v stavovom priestore:

$$x(k+1) = A_D x(k) + b_D u(k)$$

$$y(k) = C_D^T x(k)$$

$$A_D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.22 & 0.97 \end{pmatrix}, \quad b_D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_D^T = \begin{pmatrix} b_2 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0939 & 0.1548 \end{pmatrix}$$

Modálny regulátor v stavovom priestore - príklad

2. $k_x = [k_2 \quad k_1]$,
   $k_i = q_i - a_{di}$, pričom q_i sú koeficienty
   $N_{\check{z}}(z) = z^n + q_1 z^{n-1} + \ldots + q_n = 0$

3. zosilnenie v doprednej väzbe:
   $k_w = \dfrac{1}{C_D^T (I - A_c)^{-1} b_D}, \quad A_c = (A_D - b_D k_x)$

Modálny regulátor v stavovom priestore - príklad

4

- a) $N_1 = (z-0.3)(z-0.2) = z^2 - 0.5z + 0.06 \Rightarrow q_1 = -0.5, q_2 = 0.06$

$$k_2 = q_2 - a_2 = 0.06 - 0.22 = -0.161$$

$$k_1 = q_1 - a_1 = -0.5 + 0.97 = 0.474$$

$$k_x = [-0.163, \quad 0.4744], \quad A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.06 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad k_w = 2.2517$$

- b) $N_2 = (z-0.4)(z-0.5) = z^2 - 0.9z + 0.2 \Rightarrow q_1 = -0.9, q_2 = 0.2$

$$k_2 = q_2 - a_2 = 0.2 - 0.22 = -0.0231$$

$$k_1 = q_1 - a_1 = -0.9 + 0.97 = 0.0744$$

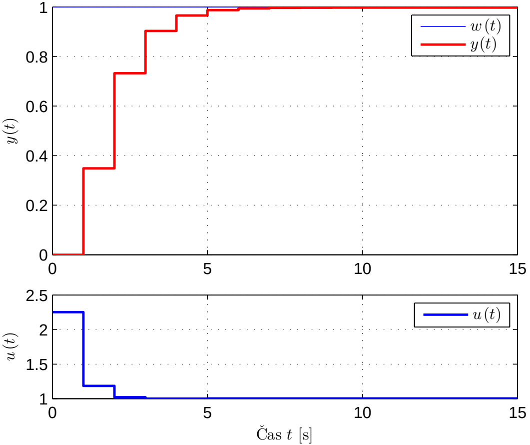
$$k_x = [-0.0231, \quad 0.0744], \quad A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.2 & 0.9 \end{pmatrix}, \quad k_w = 1.2063$$

Modálny regulátor v stavovom priestore - príklad

4. ▸ c) $k_x = [-0.2831, \quad 0.8744], \quad A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.06 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad k_w = 3.3776$

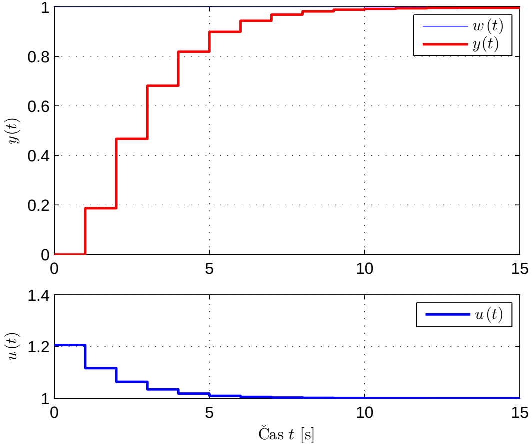
Na rozdiel od regulátora Pole-placement navrhnutého z prenosovej funkcie procesu $\rightarrow$ Modálne riadenie nezvyšuje rád systému, počet pólov URO je rovnaký ako počet pólov riadeného systému

Modálny regulátor v stavovom priestore - póly a) $[0.2, 0.3]$



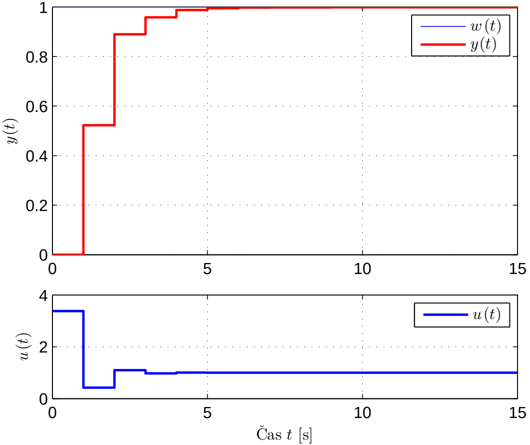
Obr.: Výsledky diskrétneho modálneho regulátora so zvolenými pólmi riadiacej štruktúry a) $[0.2, 0.3]$

Modálny regulátor v stavovom priestore - póly b) $[0.4, 0.5]$



Obr.: Výsledky diskrétneho modálneho regulátora so zvolenými pólmi riadiacej štruktúry b) $[0.4, 0.5]$

Modálny regulátor v stavovom priestore - póly c) $[-0.2, 0.3]$



Obr.: Výsledky diskrétneho modálneho regulátora so zvolenými pólmi riadiacej štruktúry c) $[-0.2, 0.3]$