Modelovanie hydraulického systému troch spojených nádob v prostredí Simulink

(Tutoriál)

Ľudovít Hiľovský

2018/2019

Hydraulický systém troch spojených nádob

Systém troch nádob je typickým príkladom modelovania hydraulických systémov. Je vhodný pre implementáciu matematického modelu tvoreného nelineárnymi diferenciálnymi rovnicami v stavovom popise do simulačných a programových prostredí. V tomto tutoriáli sa oboznámime s fyzikálno-matematickými vzťahmi, ktoré sú potrebné pre vytvorenie matematického modelu troch nádob a s jeho následnou implementáciou do simulačného prostredia Simulink.

V tutoriáli sa budú nachádzať nádoby v 2 typoch spojenia, od ktorých budú závisieť vzájomné korelácie a to **vertikálne spojenie nádob –** v takomto spojení nebudú nádoby medzi sebou interagovať a **horizontálne spojenie nádob –** v tomto spojení budú existovať medzi nádobami vzájomné interakcie

Po odvodení matematického modelu využijeme simulačné prostredie Simulink na jeho implementáciu – vytvoríme simulačný model, ktorého základom budú nelineárne diferenciálne rovnice popisujúce systém. Následne budeme sledovať odozvy systémov a porovnávať hodnoty ustálených hodnôt vypočítaných analyticky a v simulačnom prostredí. Tým overíme platnosť matematického modelu.

Matematický model systému bude identifikovaný analytickou metódou a preto je potrebné definovať si určité fyzikálne zákonitosti, ktoré budeme využívať.

Z **rovnice kontinuity** pre nestlačiteľné kvapaliny(platí hustota kvapaliny $\rho = kon\check{s}t$) vyplýva vzťah:

$$Q(t) = Sv(t) = kon\check{s}t \qquad (1)$$

Kde $Q(t)$ je prietok, ktorý udáva objem kvapaliny, ktorá pretečie otvorom za určitý čas, S je prierez prietokového otvoru, $v(t)$ je rýchlosť prietoku kvapaliny.

Bernoulliho rovnica, ktorá má pre nestlačiteľnú kvapalinu za pôsobenia tiažového zrýchlenia a pre ustálené prúdenie tvar:

$$\frac{v^2(t)}{2} + \frac{p(t)}{\rho} + gh(t) = kon\check{s}t \qquad (2)$$

Kde predpokladáme, že nádoby v našom systéme majú rovnaké hodnoty tlakov $p(t)$ a kvapalinou v nich je voda, ktorej hustota je $\rho \cong 1$, tak po upravení má tvar:

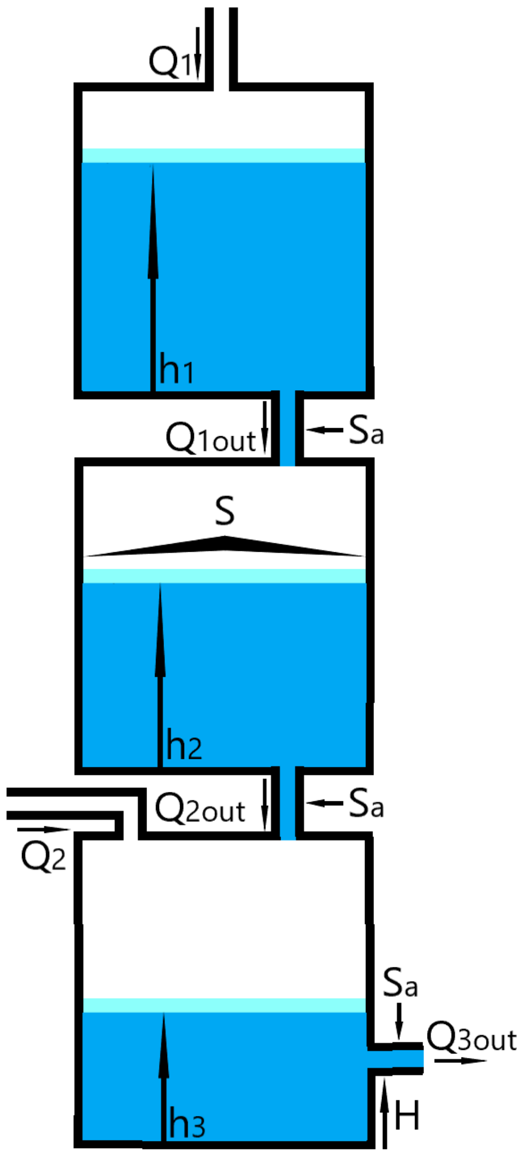
$$v(t) = \sqrt{2gh(t)} \qquad (3)$$

Vzťah (3) nazývame **Torricelliho vzorec,** kde $h(t)$ je premenlivá výška hladiny v nádobe.

Tieto fyzikálne vzťahy následne využijeme pri modelovaní troch nádob v spojení v simulačnom prostredí Simulink.

Systém troch nádob bez interakcie – analytická identifikácia systému

V hydraulickom systéme troch nádob bez interakcie sú tieto nádoby prepojené vertikálne pomocou spájajúceho výtokového otvoru, cez ktorý prúdi kvapalina z nádoby do nádoby vplyvom gravitácie. Systém si znázorníme na Obr. 1.



Obr. 1 Hydraulický systém troch nádob bez interakcie

Tento hydraulický systém je zložený z troch spojených nádob valcového tvaru s plochou podstavy S. Spojenie medzi nádobami je realizované pomocou výtokového otvoru kruhového prierezu s plochou S_a a prietokmi $Q_{1out}(t)$, $Q_{2out}(t)$. Do prvej a tretej nádrže je zavedený konštantný prítok $Q_1(t)$ a $Q_2(t)$. Výsledný prietok $Q_{3out}(t)$ zo systému bude realizovaný výtokovým otvorom z tretej nádrži, ktorý je zavedený vo výške H nad dnom tejto nádoby a jeho plocha prierezu S_a je rovnaká ako pri odtokových otvoroch spájajúcich nádrže. Pri tomto systéme sledujeme zmeny výšok hladín $h_1(t)$, $h_2(t)$ a $h_3(t)$.

Popis dynamiky **hladiny v prvej nádobe** $h_1(t)$ odvodíme z rovnice kontinuity kde do vzťahu (1) pre $Q_1(t)$ dosadíme za rýchlosť:

$$v_1(t) = -\frac{dh_1(t)}{dt} \tag{4}$$

Pričom rýchlosť prietoku $Q_{1out}(t)$ vyplýva z (3). Po dosadení do rovnice kontinuity a jej následnej úprave dostaneme homogénnu nelineárnu rovnicu popisujúcu dynamiku výšky hladiny $h_1(t)$:

$$\frac{dh_1(t)}{dt} + \frac{S_a}{S}\sqrt{2gh_1(t)} = 0 \tag{5}$$

Kde g je konštanta gravitačného zrýchlenia.

Pre zmenu výšok hladín následne platí vzťah:

$$S(\frac{dh_1(t)}{dt}) = Q_1(t) - Q_{1out}(t) \tag{6}$$

Kde po dosadení (3) do vzťahu platiaceho pre $Q_{1out}(t)$ a po úprave rovnici dostaneme nelineárnu rovnicu s pravou stranou, ktorá nám popisuje zmenu výšky hladiny:

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{Q_1(t)}{S} - \frac{S_a}{S}\sqrt{2gh_1(t)} \tag{7}$$

Rovnakým spôsobom odvodíme nelineárne diferenciálne rovnice popisujúce zmenu výšok hladín $\mathrm{h}_1(\mathrm{t})$ a $\mathrm{h}_3(\mathrm{t})$, pričom dostávame stavový popis dynamiky zmien hladín v nádržiach:

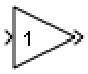
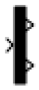
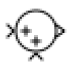
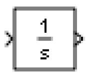
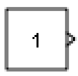
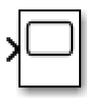
$$\begin{pmatrix} \frac{dh_1(t)}{dt} \\ \frac{dh_2(t)}{dt} \\ \frac{dh_3(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Q_1(t)}{S} - \frac{S_a}{S}\sqrt{2gh_1(t)} \\ \frac{S_a}{S}\sqrt{2gh_1(t)} - \frac{S_a}{S}\sqrt{2gh_2(t)} \\ \frac{Q_2(t)}{S} + \frac{S_a}{S}\sqrt{2gh_2(t)} - \frac{S_a}{S}\sqrt{2gh_3(t) - H} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Týmito matematicko-fyzikálnymi vzťahmi sme vytvorili matematický model systému. Pre overenie správnosti týchto vzťahov je dobré pretransformovať ho na simulačný model, ktorý vytvoríme pomocou funkcionality, ktorú nám ponúka simulačné prostredie Simulink. Výslednými grafmi následne porovnáme analytické a simulačné riešenie problému spojených nádob.

Systém troch nádob bez interakcie – modelovanie v prostredí Simulink

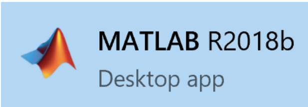
Simulačný model hydraulického systému troch nádob bez interakcie bude pozostávať z funkčných blokov prostredia Simulink, ktoré si zhrnieme v *Tab. 1*.

Tab. 1 Popis funkčných blokov v prostredí Simulink

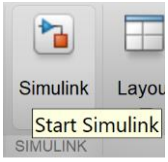
Funkčný blok	**Popis jeho funkcionality**
	Blok Gain násobí vstup konštantnou hodnotou, pričom vstup a daná hodnota môže byť skalár, vektor alebo matica. Gain sa prevedie z premennej typu double na dátový typ zadaný v maske bloku. Vstup a gain sa potom vynásobia a výsledok sa prevedie na výstupný typ údajov.
	Blok Mux kombinuje svoje vstupy do jedného vektorového výstupu. Vstup môže byť skalárny alebo vektorový signál. Všetky vstupy musia byť rovnakého dátového a číselného typu.
	Blok Sum vykonáva sčítanie alebo odčítanie vstupov, ktoré naň privedieme. Bloky sčítania a odčítania prvkov sú totožné, líšia sa len parametrami. Tento blok môže sčítať alebo odčítať skalárne, vektorové alebo maticové vstupy.
	Blok Integrator vypočíta hodnotu integrálu svojho vstupného signálu s ohľadom na čas. Simulink zaobchádza s blokom Integrator ako s dynamickým systémom s jedným stavom.
	Blok Constant generuje reálny alebo komplexný signál konštantnej hodnoty. Blok generuje skalárny, vektorový alebo maticový výstup.
 	Blok Inport/Outport prepája subsystém s ostatnými časťami schémy
	Blok Scope a zobrazuje vstupné signály v čase.

Systém v Simulinku bude modelovaný postupne, pričom sa začne pri modelovaní subsystémov nádrží. Výsledná schéma bude následne pozostávať z troch subsystémov so vzájomnými prepojeniami. Budeme pracovať vo verzii Matlab&Simulink 2018b. Modelovanie prvej nádrže si zhrnieme v bodoch:

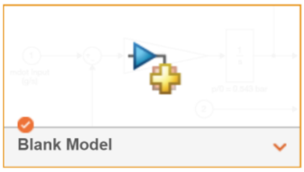
- Otvoríme si aplikáciu Matlab R2018b



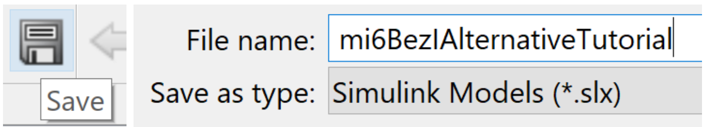
- Na hornej lište s názvom Home vyberieme možnosť Simulink



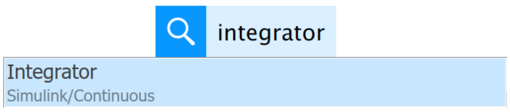
- Po otvorení okna Simulink Start Page vyberieme možnosť Blank Model



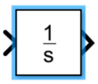
- Model si po vytvorení ihneď uložíme, aby sme ho počas vývoja modelu nestratili, ukladáme ho vo formáte .slx



- Začneme modelovať prvú nádrž - začíname blokom integrator. Tento blok vložíme do schémy kliknutím na ľubovoľnú časť okna v Simulinku(využijeme jeho interaktivitu), pričom po kliknutí začneme písať názov bloku

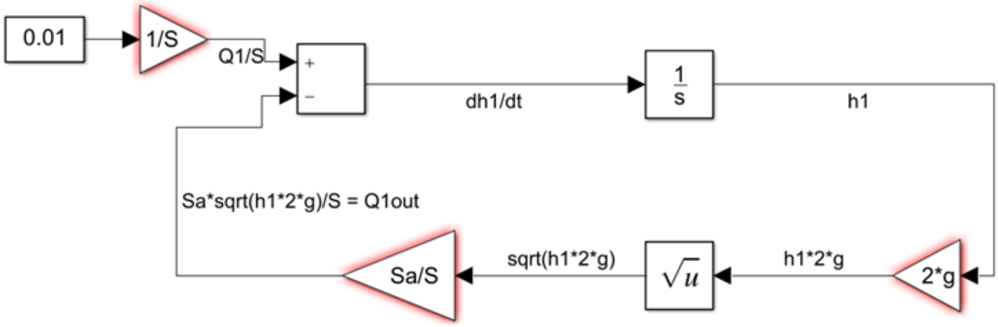


- Zobrazia sa nám viaceré možnosti výberu blokov, pričom vyberáme blok z knižnice Simulink/Continous – táto informácia sa zobrazí pod názvom bloku

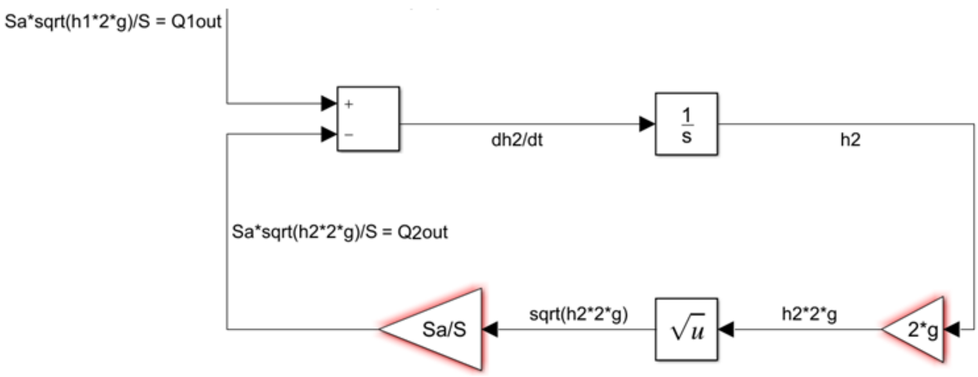


- Blok Integrator je základným funkčným blokom schémy, cez ktorý prechádza vstup vo forme derivácii hladiny $\frac{\mathrm{dh_1(t)}}{\mathrm{dt}}$, pričom na výstupe z bloku získame signál $h_1(t)$, ktorým samotnú rovnicu zo stavového popisu modelujeme.

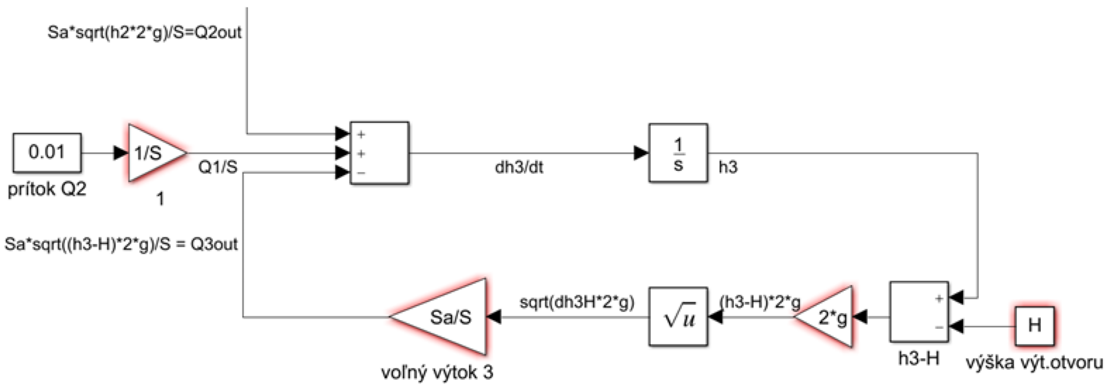
- V tomto kroku prejdeme k samotnému modelovaniu stavovej rovnice popisujúcej zmenu výšky hladiny v prvej nádrži , konkrétne zápornú časť jej pravej strany $\frac{S_a}{S}\sqrt{2gh_1(t)}$. Signál na výstupe z blokov je patrične označený



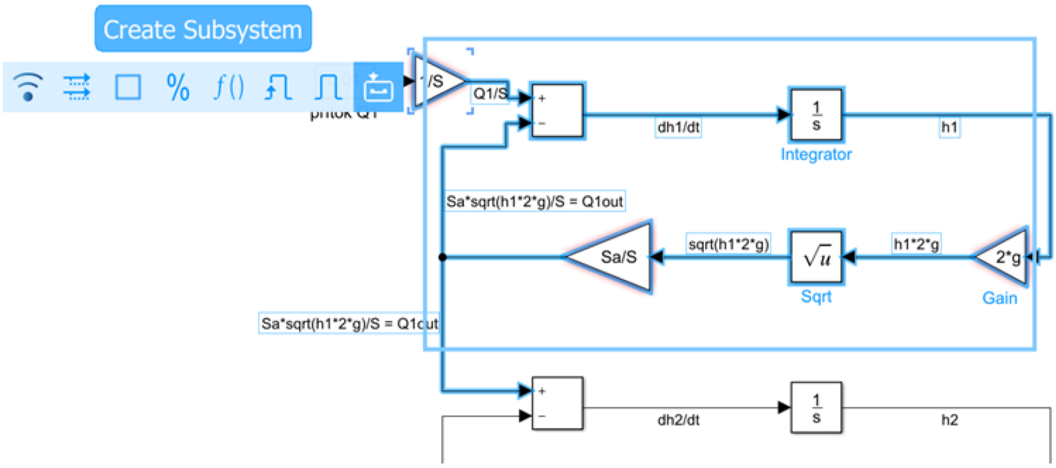
- Vznikol nám systém prvej nádoby, do ktorej prúdi kvapalina konštantným prietokom $Q_1(t)$ a z nádoby odteká voľným prietokom $Q_{1out}(t)$, ktorého rovnicu máme znázornenú za Blokom Gain s názvom voľný výtok 1, ktorý bude vstupom do ďalšej nádoby. Ďalšiu nádobu modelujeme podľa druhej stavovej rovnici $\frac{\mathrm{dh_2(t)}}{\mathrm{dt}}$, pričom volíme rovnaký postup ako pri prvej



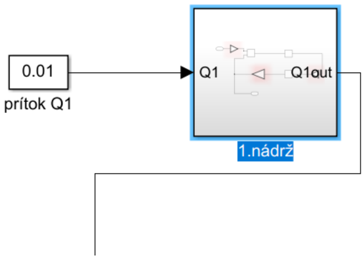
- Rozdiel v tretej nádrži bude v tom, že je potrebné brať do úvahy výtokový otvor, ktorý nebude na dne nádoby, ale v určitej výške nad ním. To sa zobrazí pri výslednej rovnici odtoku zo systému a teda v známom Torricelliho vzťahu, pričom modelujeme poslednú stavovovú rovnicu



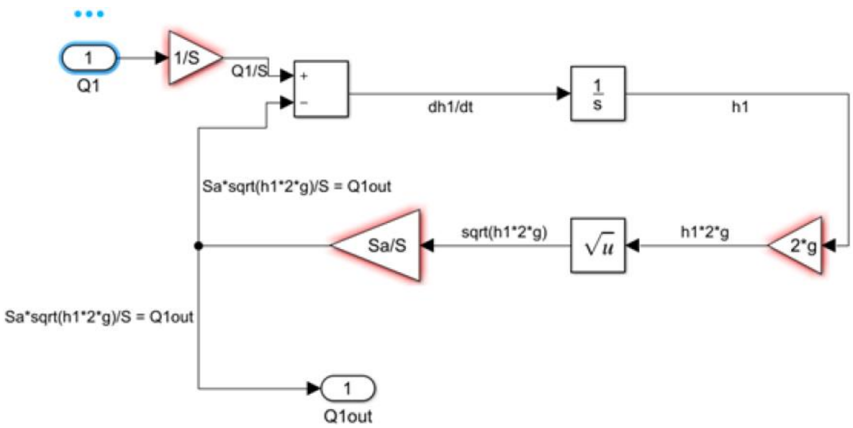
- Systém nádob je v súčasnom stave namodelovaný, avšak potrebujeme za príslušné premenné dosadiť reálne hodnoty – je potrebne nadimenzovať nádoby. Najspoľahlivejšie riešenie je tvorba jednotlivých subsystémov a následne ich masiek. Subsystém z nádrže vytvoríme označením prvkov, z ktorých chceme aby sa náš subsystém skladal a označením tlačidla Create Subsystem v ponuke, ktorá je znázornená troma bodkami na okraji modrého štvoruholníka



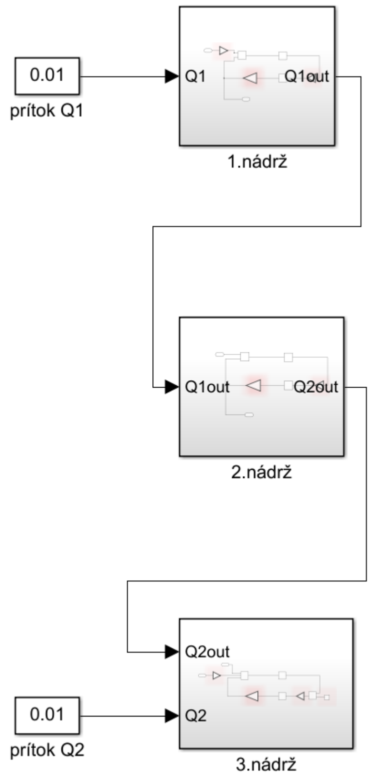
- Vznikol nám subsystém, ktorý sme pomenovali 1. nádrž. Názov subsystému zmeníme tak, že na daný blok klikneme ľavým tlačidlom myši a pod blokom sa zobrazí jeho pôvodný názov, ktorý jednoducho označíme a prepíšeme



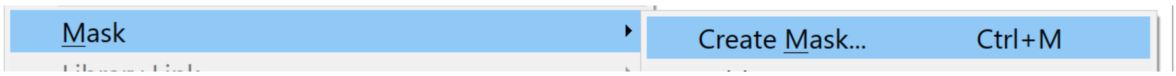
- Dvojitým kliknutím ľavého tlačidla myši sa dostaneme k schéme daného subsystému, kde môžeme vidieť a meniť vstupy a výstupy tohto systému(bloky Input/Output), v našom prípade sme ich podľa Obr. *1* popísali $Q_1(t)$ a $Q_{1out}(t)$



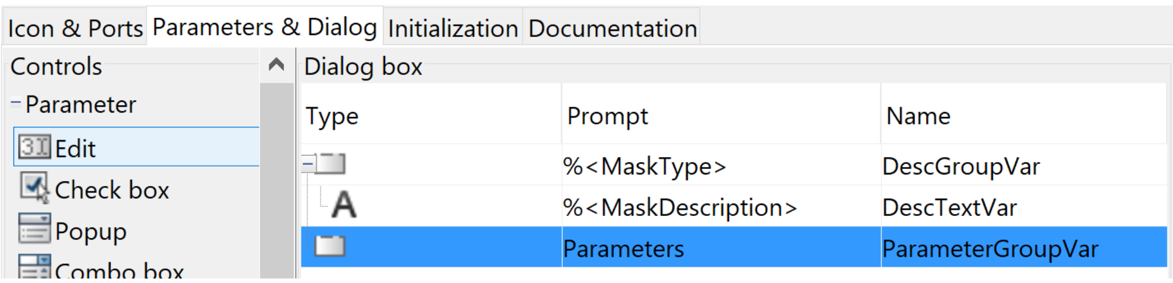
- Rovnako postupujeme pri všetkých nádobách, pričom sa dopracujeme k nasledujúcej schéme



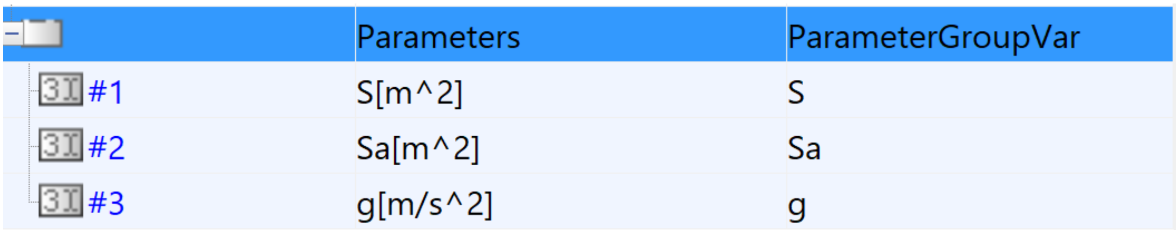
- Dimenzovanie parametrov nádrží prostredníctvom masiek subsystémov si ukážeme na systéme prvej nádrže. Klikneme pravým tlačidlom na subsystém a zvolíme Mask->Create Mask



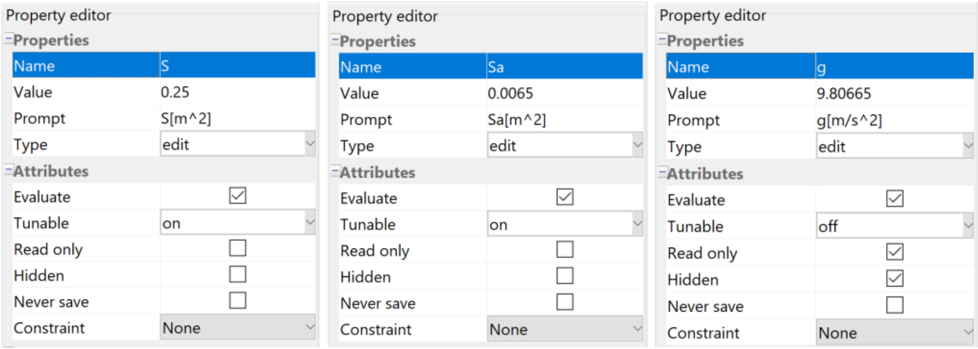
- Na hornej lište masky vyberieme možnosť Parameters & Dialog, v položke Dialog box označíme možnosť Parameters a v lište na ľavej strane klikneme na Edit



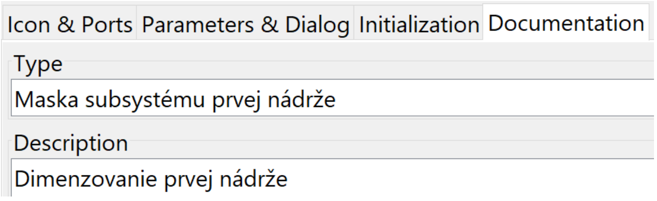
- Do masky subsystému potrebujeme zadať tri parametre a tými sú plocha prierezu valcovej nádoby S, plocha prierezu výtokového otvoru S_A a konštantu gravitačného zrýchlenia g



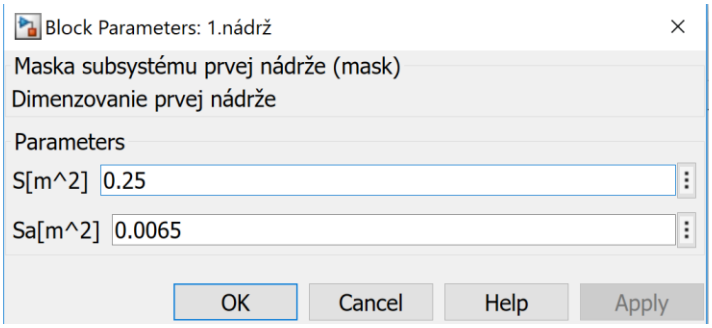
- Hodnoty parametrov nastavujeme na pravej lište do políčok v Property editor. Gravitačnú konštantu uvedieme ako parameter, ktorý sa nebude dať meniť



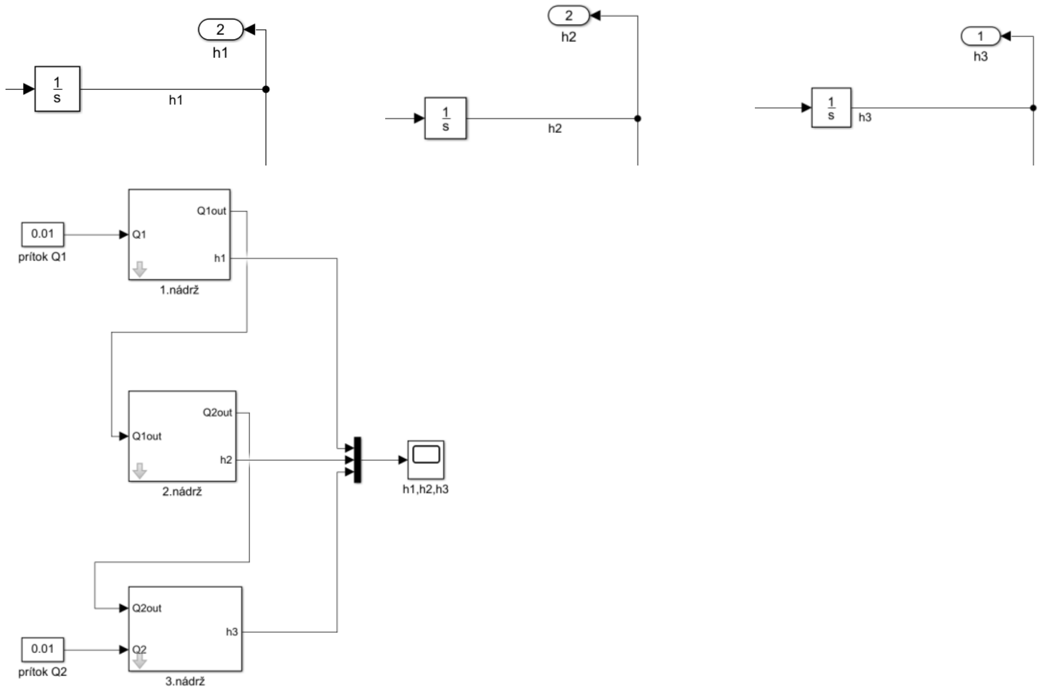
- Popis, ktorý sa zobrazí pri dvojkliku na subsystém s maskou nastavujeme v políčku Documentation, ktoré môžeme vidieť na hornej lište v maske



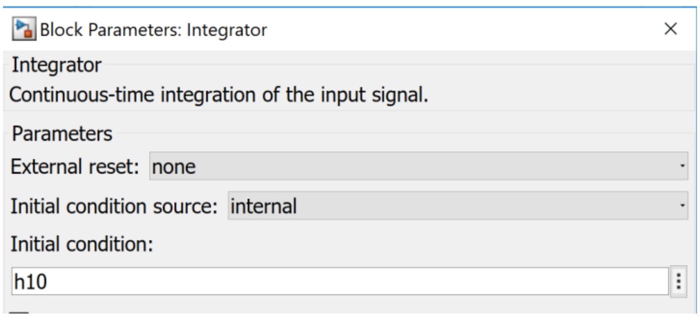
- Následne vieme upravovať parametre nášho systému a maska subsystému následne vyzerá takto



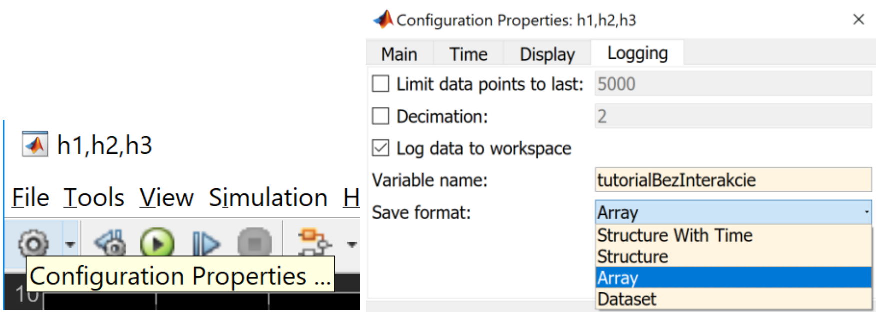
- Rovnako postupujeme aj pri ostatných nádržiach. Pre kontrolu odozvy systému je potrebné zaviesť 3 výstupy zo subsystémov, ktoré nám budú reprezentovať výsledné výšky hladín, ktoré budeme porovnávať vo funkčnom bloku Scope, do ktorého vstupuje zoskupenie troch signálov zo subsystémov v podobe daných výšok



- Systém rozšírime o počiatočné hodnoty výšky hladín v nádobách, ktoré nastavujeme počiatočnými podmienkami v bloku Integrator, pričom tento parameter pridáme opäť do masky subsystémov



- Pre viacej možností spracovania grafov a kvôli ich lepšiemu upravovaniu je vhodné si výsledné simulácie preniesť do prostredia Matlab. Jednou z možností je ukladanie výstupu zo systému do premennej v prostredí Matlab a to nasledovne. Otvoríme si funkčný blok Scope, klikneme na Configuration Properties -> Logging -> Log data to workspace -> Variable name(názov premennej v programovom prostredí Matlab) ->Save format -> Array(data budú vo formáte viacrozmerné pole)

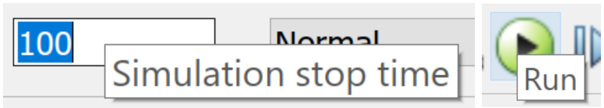


- V Tab. 2 si zhrnieme hodnoty parametrov systému

Tab. 2 Parametrizácia hydraulického systému troch nádob bez interakcie

Parameter	**Popis**	**Implicitné nastavenie**
S_a	Obsah plochy prierezu výtokového otvoru	$65 * 10^{-4}[m^2]$
S	Obsah plochy prierezu valcovej nádoby	$0.25[m^2]$
h_{10}	Počiatočná výška hladiny v prvej nádrži	$1.2[m]$
h_{20}	Počiatočná výška hladiny v druhej nádrži	$0.7[m]$
h_{30}	Počiatočná výška hladiny v tretej nádrži	$1[m]$
Špeciálny parameter, ktorý sa nastavuje pre 3. nádrž		
H	Vzdialenosť výtokového otvoru od dna nádoby	$0.2[m]$

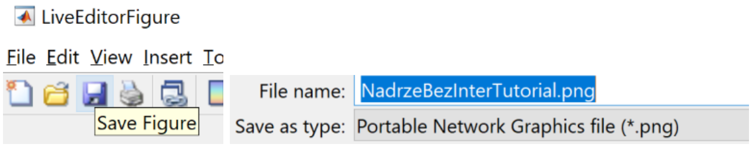
- Následne nastavíme čas zastavenia simulácie a proces odsimulujeme



- Výsledok simulácií si zobrazíme v grafe vytvorenom v prostredí Matlab, pri ktorom využijeme výsledky simulácii, ktoré sme si preniesli z funkčného bloku Scope do tohto prostredia vo forme viacrozmerného poľa. Zdrojový kód vytvárania grafu vyzerá napríklad takto

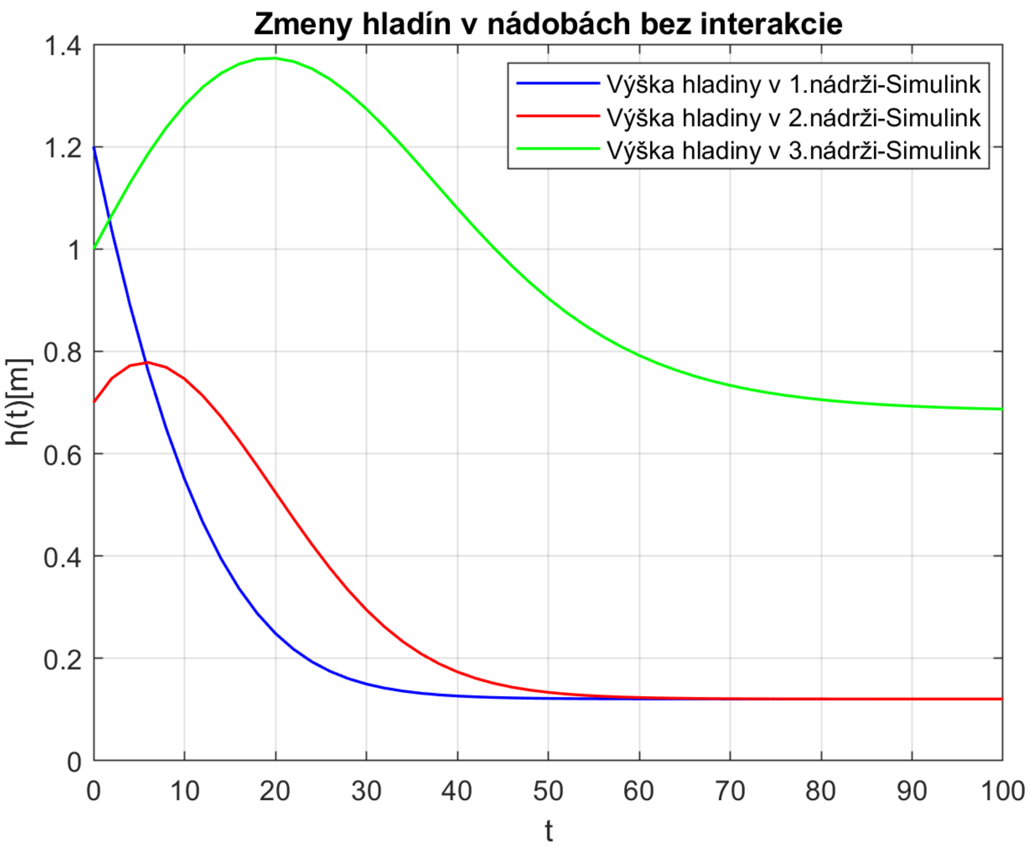
```
%zmena výšky hladiny v prvej nádrži
plot(tutorialBezInterakcie(:,1),
tutorialBezInterakcie(:,2),'Blue','LineWidth',1);
%príkaz pre zakresľovanie nasledujúcich priebehov do rovnakého grafu
hold on
%zmena výšky hladiny v druhej nádrži
plot(tutorialBezInterakcie(:,1),
tutorialBezInterakcie(:,3),'Red','LineWidth',1);
%zmena výšky hladiny v tretej nádrži
plot(tutorialBezInterakcie(:,1),
tutorialBezInterakcie(:,4),'Green','LineWidth',1);
%príkaz pre koniec zakresľovania priebehov do jedného grafu
hold off;
%vytvorenie mriežok pre lepšie zorientovanie sa v grafe
grid;
%názov grafu
title('Zmeny hladín v nádobách bez interakcie')
%popis osí
xlabel('t'); ylabel('h(t)[m]');
%legenda grafu
legend({'Výška hladiny v 1.nádrži-Simulink','Výška hladiny v 2.nádrži-
Simulink','Výška hladiny v 3.nádrži-Simulink'},'Location','best')
```

- Samotný graf výslednej odozvy systému si ako obrázok ukladáme stlačením možnosti Save Figure označenej obrázkom modrej diskety v hornej lište grafu, pričom súbor ukladáme pod formátom .png



- Po správnom nadimenzovaní systému by sa hladiny v nádržiach mali ustáliť na hodnotách, ktoré získame položením stavových rovníc systému (*8*) nule:

$$\begin{pmatrix} h_{1u} \\ h_{2u} \\ h_{3u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{Q_1(t)}{S_a}\right)^2 \dfrac{1}{2g} \\ h_{1u} \\ \left(\dfrac{Q_2(t)}{S_a}\right)^2 \dfrac{1}{2g} + H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.12[m] \\ 0.12[m] \\ 0.68[m] \end{pmatrix} \tag{9}$$

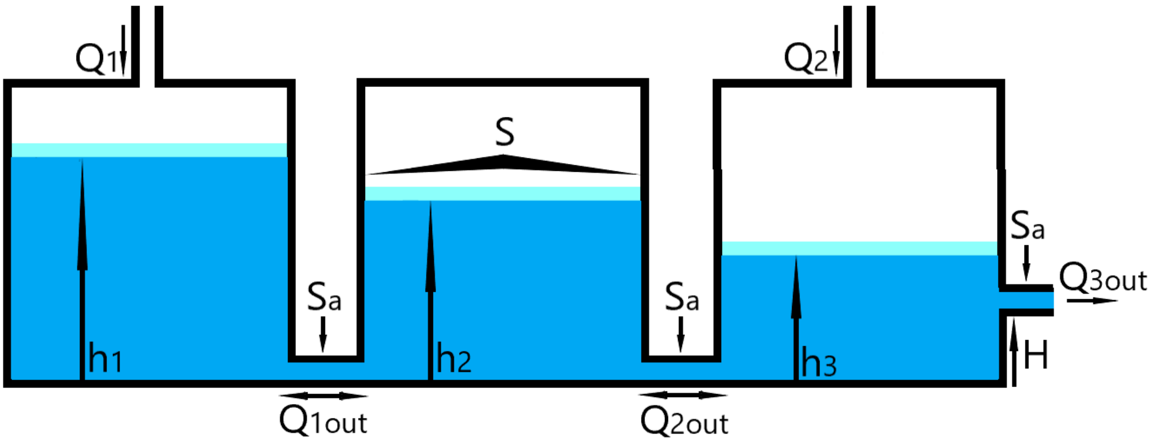


Obr. 2 Výsledná simulácia systému troch nádob bez interakcie

Z grafu je možné vidieť, že sa hladina prvej a druhej nádoby ustáli na hodnote $0.12\ \mathrm{m}$ a to v čase približne $60\ s$, zatiaľ čo hladina v tretej nádobe sa ustáli približne na hodnote $0.68\ \mathrm{m}$ v čase $100\ s$. Tieto hodnoty zodpovedajú ustáleným hladinám vyjadreným vo vzťahu (9).

Systém troch nádob s interakciou – modelovanie v prostredí Simulink

Hydraulický systém troch nádob v interakcii sa odlišuje od predošlého systému spôsobom prepojenia. V systéme nádob s interakciou sú tieto nádoby v horizontálnom spojení, pričom smer vzájomného prietoku kvapaliny závisí od výšky hladín a teda od objemu v nádobách. Rozloženie hydraulického systému troch nádob si znázorníme na Obr. *3*.



Obr. 3 Hydraulický systém troch nádob s interakciou

Tri nádoby sú rovnakého valcového tvaru, s rovnakými rozmermi, rozdiel bude medzi vzájomnými interakciami nádob. Smer prietoku(smer jeho rýchlosti) z nádoby do nádoby závisí od toho, v ktorej nádobe je väčší objem kvapaliny. Keď predpokladáme, že je v prvej nádobe vyššia hladina vody ako v druhej, prúdi kvapalina z prvej nádoby do druhej, pokiaľ výška hladiny v druhej nádobe nestúpne na vyššiu úroveň, ako v tej prvej. Keď táto situácia nastane, prietok kvapaliny nadobudne opačný smer. Keď budú v interagujúcich nádobách rovnaké výšky hladín hovoríme, že výšky nadobudnú ustálený stav(pri nezmenenom prítoku do systému).

V analytickom odvádzaní budeme vzájomný interakciu nádob reprezentovať zavedením funkcie Signum do vzťahov popisujúcich zmenu výšok hladín v systéme, tým pádom sa upraví Torriceliho vzorec (*3*) na tvar:

$$v(t) = F(\Delta h(t)) = sgn(\Delta h(t)) \sqrt{2g|\Delta h(t)|} \qquad (10)$$

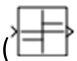
Kde $sgn(\Delta h(t))$ nám rozhoduje o tom, v ktorej nádobe je väčší objem vody a tým pádom o tom, ktorý smer nadobudne rýchlosť prietoku.

Následne bude upravením rovnice (7) zavedením vzťahu (10) vyzerať stavový popis systému nasledovne:

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \\ \dot{h}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Q_1(t)}{S} - \frac{S_a}{S} F(h_1(t) - h_2(t)) \\ \frac{S_a}{S} F(h_1(t) - h_2(t)) - \frac{S_a}{S} F(h_2(t) - h_3(t)) \\ \frac{Q_2(t)}{S} + \frac{S_a}{S} F(h_2(t) - h_3(t)) - \frac{S_a}{S} F(h_3(t) - H) \end{pmatrix} \tag{11}$$

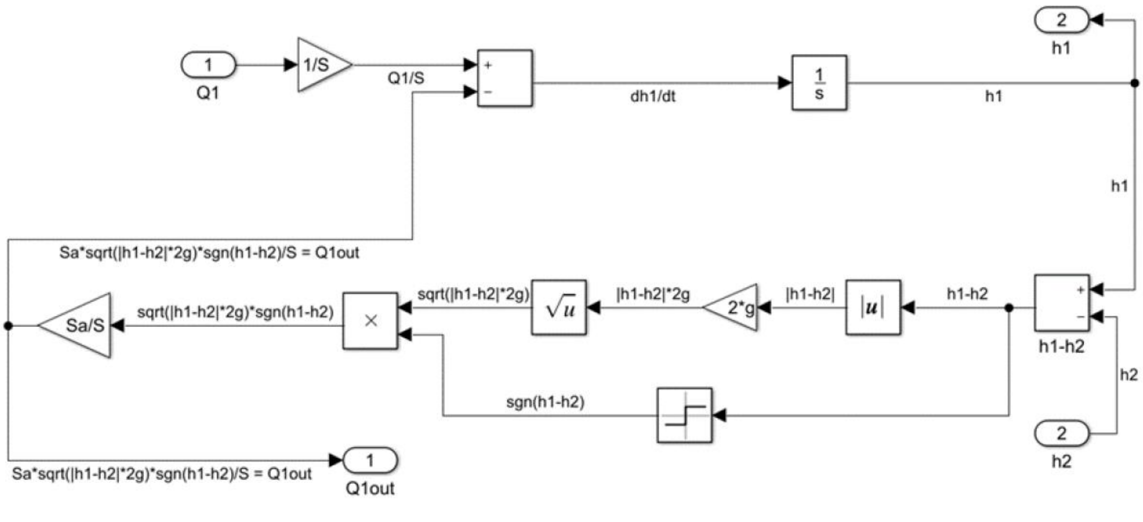
Následne je potrebné tento stavový popis implementovať do simulačného prostredia Simulink, aby sme overili jeho platnosť. Tento proces bude prebiehať rovnako ako pri systéme nádob bez interakcie, avšak v schémach subsystému a teda aj vo výslednej schéme systému budú menšie rozdiely.

Systém troch nádob s interakciou – modelovanie v prostredí Simulink

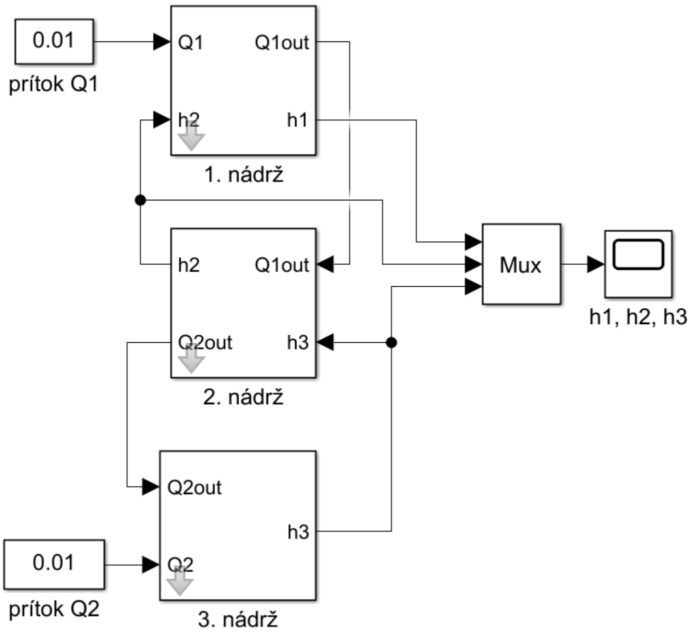
Na modelovanie tohto systému v prostredí Simulink budeme potrebovať funkčné bloky, ktoré sú zhrnuté v predošlej kapitole v *Tab. 1.*. Je ju však potrebné rozšíriť rozšírime o funkčný blok Sign, ktorý sme v predošlej kapitole nepoužívali. Blok Sign() má pre reálne vstupy na výstupe 1 ak je vstup > 0; 0 ak je vstup = 0; -1 ak je vstup < 0.

Pri modelovaní systému troch nádob s interakciou budeme postupovať rovnako, ako pri predošlom modely, avšak rozdiel bude v závislosti výšky hladín nádob medzi sebou. Podľa (11) modelujeme subsystémy:

- Vzájomnú koreláciu výšok znázorníme pridaním funkcie Signum, teda bloku Sign, ktorý nám ju znázorňuje



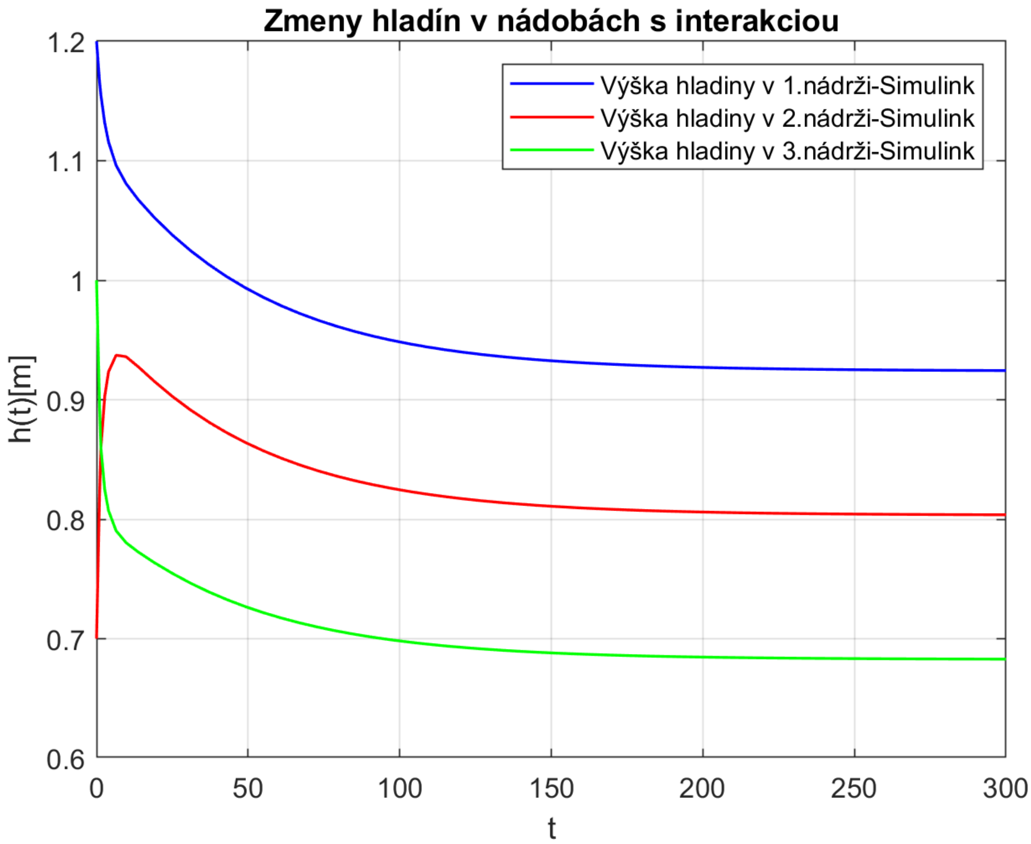
- Na obrázku vyššie môžeme vidieť zakomponovanie funkcie Sign, ktorá znázorňuje výškový rozdiel v nádržiach. Týmto spôsobom namodelujeme aj ostatné nádrže, pričom sa dostaneme ku konečnej schéme, kde budeme nádoby dimenzovať pomocou masky a výslednú simuláciu prenášať do programového protredia Matlab za cieľom lepšej manipulácie s grafom. Tento postup sme rozpísali v predošlej kapitole.



- Dimenzovanie nádob je rovnaké ako pri predošlom systéme a je zhrnuté v Tab. *2* rovnako ako počiatočné hodnoty hladín v nádobách. Čas simulácie sme zvolili dostatočne veľký nato, aby sa systém dostal do ustáleného stavu - $300s$
- Výsledný graf simulácie sme získali opäť rovnako, ako pri predošlom systéme, pričom ustálené výšky hladín vypočítame opäť položením stavových rovníc systému(11) nule:

$$\begin{pmatrix} h_{1u} \\ \mathrm{h}_{2u} \\ h_{3u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{h}_{2u} + \left(\frac{Q_1(t)}{S_a}\right)^2 \frac{1}{2g} \\ h_{3u} + \left(\frac{Q_1(t)}{S_a}\right)^2 \frac{1}{2g} \\ \left(\frac{Q_1(t)+Q_2(t)}{S_a}\right)^2 \frac{1}{2g} + \mathrm{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.92[m] \\ 0.8[m] \\ 0.68[m] \end{pmatrix} \qquad (12)$$

- Odozva systému bude ilustrovaná grafom na Obr. *4*



Obr. 4 Výsledná simulácia systému troch nádob s interakciou

Na grafe môžeme vidieť zmeny výšok hladín v systéme troch hydraulických nádob v prepojení, ktoré medzi sebou interagujú. Výška hladiny v prvej nádobe sa ustáli na hodnote $0.92m$, pričom nato bude potrebovať čas $200s$. Hladina v druhej nádrži bude na ustálenie potrebovať rovnaký čas, pričom sa ustáli na hodnote $0.8m$ a tretia hladina sa ustáli na hodnote $0.68m$ v takom istom čase. Ustálené hladiny sa zhodujú s hladinami vypočítanými analyticky.