

Riešenie rovníc s aplikáciou na elektrické obvody

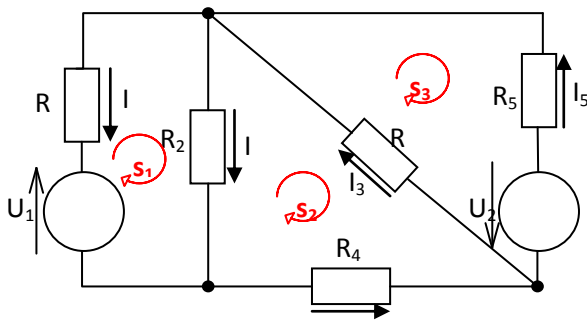
Nasledujúce uvedené poznatky z oblasti riešenia elektrických obvodov pomocou metódy slučkových prúdov a uzlových napätí je potrebné využiť pri riešení zadania č. 1. Vzorové zadanie číslo 1 sa nachádza nižšie.

Metóda slučkových prúdov

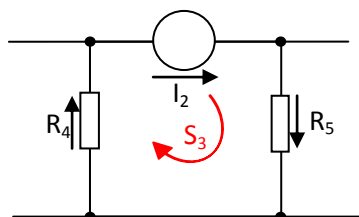
- je založená na poznatku, že prúdy vo vetvách stromu grafu sú jednoznačne určené prúdmi v nezávislých vetvách grafu
- spočíva v aplikácii 2. Kirchoffovho zákona na všetky základné slučky grafu za predpokladu, že nimi tečie fiktívny, tzv. slučkový prúd, čím získame podmienkové rovnice pre daný obvod.

Postup

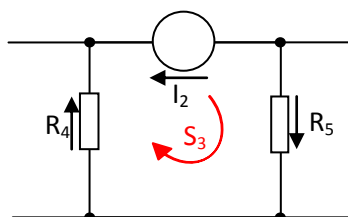
1. Zvolíme si smery slučkových prúdov v jednotlivých slučkách, smery napätia na zdrojoch a prúdy pretekajúce rezistormi.



2. Zistíme či sa v niektorej vetve nenachádza prúdový zdroj, potom sa hodnota slučkového prúdu bude rovnáť prúdu zdroja s kladným alebo záporným znamienkom závisiacim od orientácie týchto prúdov.

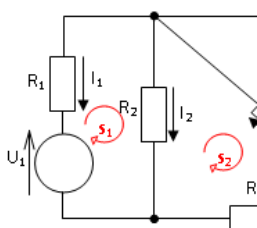


$$I_{s1} = I_2$$



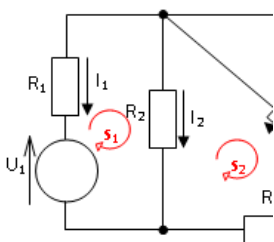
$$I_{s1} = -I_2$$

3. Rovnice zostavujeme nasledovne: slučkovým prúdom danej slučky vynásobíme súčet odporov danej slučky, ak niektorý rezistor susedí s ďalšími slučkami, potom odčítame ich súčin (odporu a slučkového prúdu), a nakoniec ak sa nachádza v slučke aj napäťový zdroj pričítame ho s kladným alebo záporným znamienkom podľa jeho smeru prúdenia.



$$\Leftrightarrow I_{s1} * (R_1 + R_2) - I_{s2} * R_2 + U_1 = 0$$

4. Za jednotlivé odpory a napätia a prúdy zdrojov dosadíme ich hodnoty a zapíšeme do rozšírenej matice (prúdy, ktoré sme dostali v 2.bode už do tejto matice nezapisujeme), z ktorej vypočítame hodnoty zvyšných slučkových prúdov. Konštanty dávame na pravú stranu matice. Ak sme zostavili rovnice správne matrica by mala byť zrkadlová vzhľadom na hlavnú diagonálu.
5. Vytvoríme si podmienkové rovnice, z ktorých dostaneme konkrétne prúdy na jednotlivých rezistoroch.

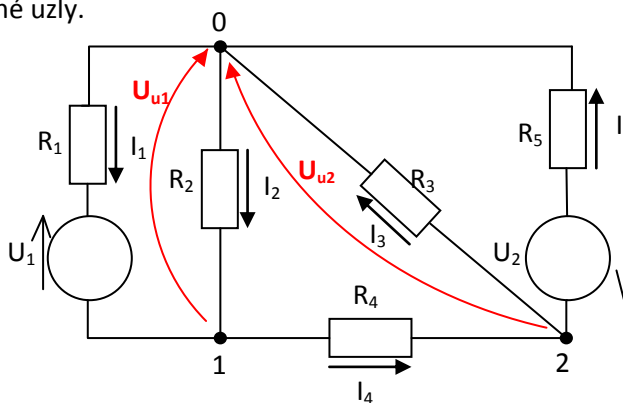


$$\begin{aligned} \Rightarrow I_1 &= -I_{s1} \\ \Rightarrow I_2 &= I_{s1} - I_{s2} \\ \Rightarrow &\dots \end{aligned}$$

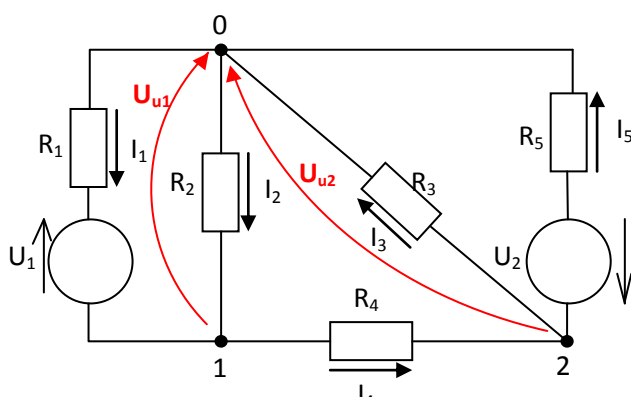
Metóda uzlových napätí

- je založená na poznatku, že napätia na nezávislých vetvách grafu sú jednoznačne určené napätiami na vetvách stromu grafu.
- spočíva v aplikácii 1. Kirchhoffovho zákona na všetky nezávislé uzly grafu za predpokladu, že na vetvách stromu grafu sú fiktívne, tzv. uzlové napätia, čím získame podmienkové rovnice pre daný obvod

1. Zvolíme si smery napätia na zdrojoch, prúdy pretekajúce odpormi a referenčný uzol označíme si aj zvyšné uzly.



2. Rovnice pre metódu uzlového napätia tvoríme nasledovne: pre každý uzol okrem referenčného vytvoríme rovnicu tak, že napätie od uzla vynásobíme súčtom prevrátených hodnôt odporov na prislúchajúcich vetvách a od toho odčítame súčin napätia a prevrátených hodnôt z susedných uzlov. Nakoniec ešte pričítame súčin napätia na napätovom zdroji a súčet prevrátených hodnôt na spoločnej vetve. Vo vetva s ideálnym napätovým zdrojom je uzlové napätie rovné napätiu na zdroji.



$$U_{u1} * \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) - U_{u2} * \frac{1}{R_4} - U_1 * \frac{1}{R_1} = 0$$

Zadanie č.1

3. Zo zostavených rovníc zostavíme rozšírenú maticu dosadením za odpory a známe napätia ich hodnoty. Konštanty dávame na pravú stranu matice. Ak sme správne zostavili rovnice mala by byť matica zrkadlová vzhľadom na hlavnú diagonálu.
4. Vypočítaním matice dostaneme hodnoty uzlových napätí z ktorých si následne vytvoríme podmienkové rovnice pre výpočet jednotlivých prúdov.

$$\Rightarrow I_1 = \frac{U_1 - U_{u1}}{R_1}$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{U_{u2}}{R_3}$$

ZADANIE:

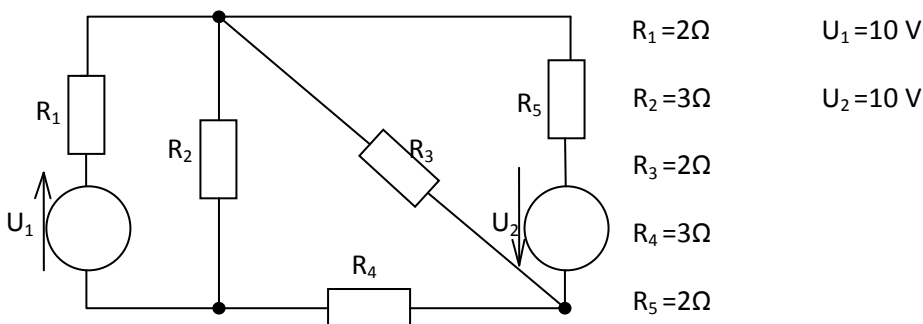
Z navrhutej topológie elektrického obvodu vypočítajte prúdy vo vetvách metódou slučkových prúdov (MSP) a metódou uzlových napätí (MUN).

OBSAH ZADANIA:

1. Topológia obvodu, analytický výpočet pre obidve metódy a skúška správnosti.
2. Riešenie v programovom prostredí MATLAB s využitím funkcií (MSP a MUN).

[minimálne požiadavky na elektrický obvod: 3 slučky, 5 rezistorov, 2 zdroje]

ÚLOHA: Vyrieš zadaný obvod pomocou metódy slučkových prúdov a uzlových napätí a vytvor v programovom prostredí MATLAB program pre výpočet prúdov tohto obvodu.

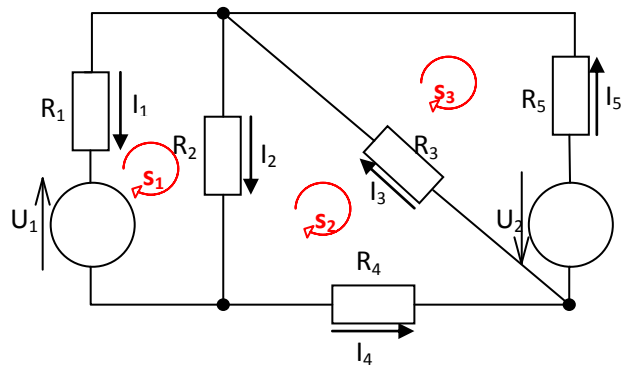


1.a) Slučkové prúdy

$$S1: I_{s1} * (R_1 + R_2) - I_{s2} * R_2 = -U_1$$

$$S2: I_{s2} * (R_2 + R_3 + R_4) - I_{s1} * R_2 - I_{s3} * R_3 = 0$$

$$S3: I_{s3} * (R_3 + R_5) - I_{s2} * R_3 = -U_2$$



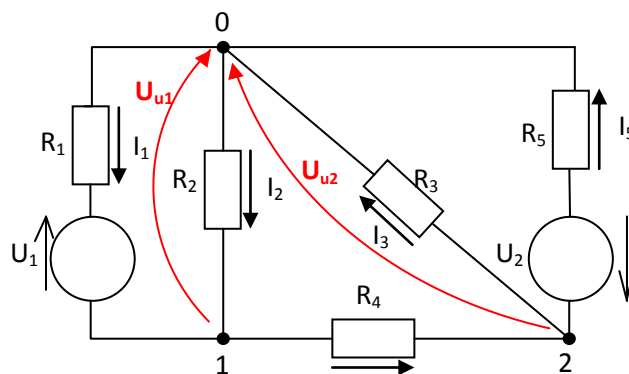
Zadanie č.1

Zo získaných rovníc vieme zostaviť maticu odporov, ktorá má tvar: $Ax = B$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 0 & -10 \\ -3 & 8 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -10 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} I_{s1} = -\frac{85}{26} \\ I_{s2} = -\frac{55}{26} \\ I_{s3} = -\frac{185}{52} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} I_1 = -I_{s1} = \frac{85}{26} \\ I_2 = I_{s1} - I_{s2} = -\frac{15}{13} \\ I_3 = I_{s3} - I_{s2} = -\frac{75}{52} \\ I_4 = -I_{s2} = \frac{55}{26} \\ I_5 = -I_{s3} = \frac{185}{52} \end{array}$$

1.b) Uzlové napätie

$$\begin{array}{l} 1: U_{u1} * \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) - U_{u2} * \frac{1}{R_4} = U_1 * \frac{1}{R_1} \\ 2: U_{u2} * \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - U_{u1} * \frac{1}{R_4} = -U_2 * \frac{1}{R_5} \end{array}$$



Zo získaných rovníc zostavíme maticu odporov:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -1 & 5 \\ 7 & 3 & -5 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} U_{u1} = \frac{45}{13} \\ U_{u2} = -\frac{75}{26} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} I_1 = \frac{U_1 - U_{u1}}{R_1} = \frac{85}{26} \\ I_2 = \frac{U_{u1}}{R_2} = \frac{15}{13} \\ I_3 = \frac{U_{u2}}{R_3} = \frac{75}{52} \\ I_4 = \frac{U_{u1} - U_{u2}}{R_4} = \frac{55}{26} \\ I_5 = \frac{U_{u2} + U_2}{R_5} = \frac{185}{52} \end{array}$$

otázka – prečo vyšli aj záporné prúdy?

⇒ Pre jednotlivé výpočty si vytvoríme samostatné funkcie a pre hlavný program vytvoríme skript, v ktorom naše vytvorené funkcie použijeme.

Metóda pre výpočet slučkových prúdov a prúdov v jednotlivých vetvách

MSP.m

function I = MSP(U,R)

% Funkcia pre výpočet metódou slučkových prúdov

% vytvorte maticu A, ktorá bude obsahovať hodnoty ľavých strán rovníc

$$A = \begin{bmatrix} R(1)+R(2) & -R(2) & 0; \\ -R(2) & R(2)+R(3)+R(4) & -R(3); \\ 0 & -R(3) & R(3)+R(5) \end{bmatrix}$$

% vytvorte maticu B, ktorá bude obsahovať hodnoty pravých strán rovníc

$$B = \begin{bmatrix} -U(1); \\ 0; \\ -U(2) \end{bmatrix}$$

% výpočet uzlových napätí realizujte ľavým delením

$$IS = A \setminus B$$

```
%dopočítajte zvyšné hodnoty prúdov
```

```
I(1) = -IS(1);
I(2) = IS(1) - IS(2);
I(3) = IS(3) - IS(2);
I(4) = -IS(2);
I(5) = - IS(3);
```

Metóda výpočtu uzlových napätí a prúdov v jednotlivých vetvách

MUN.m

```
function I=MUN(U,R)
```

```
%metóda uzlových napätí
```

```
%vytvorte maticu A, ktorá bude obsahovať hodnoty ľavých strán rovníc
A = [(1/R(1)+1/R(2)+1/R(4)) -1/R(4); -1/R(4) (1/R(3)+1/R(4)+1/R(5)) ]
```

```
%vytvorte maticu B, ktorá bude obsahovať hodnoty pravých strán rovníc
B = [ U(1)*(1/R(1)); -U(2)*(1/R(5))]
```

```
% výpočet uzlových napätí realizujte ľavým delením
Uu = A\B
```

```
%dopočítajte zvyšné hodnoty prúdov
```

```
I(1) = (U(1)-Uu(1))/R(1);
I(2) = Uu(1)/R(2);
I(3) = Uu(2)/R(3);
I(4) = (Uu(1)-Uu(2))/R(4);
I(5) = (Uu(2)+U(2))/R(5);
```

Skúška správnosti výpočtu

skuska.m

```
function skuska(I)
```

```
if I(1)-I(2)-I(4)<1e-6
    if I(4)+I(3)-I(5)<1e-6
        if I(2)-I(1)-I(3)+I(5)<1e-6
            disp('Prúdy vo všetkých vetvách vyhovujú 1.KZ.')
```

```
        else disp('Prúdy vo všetkých vetvách nevyhovujú 1KZ. ')
        end
    else disp('Prúdy vo všetkých vetvách nevyhovujú 1KZ. ')
    end
else disp('Prúdy vo všetkých vetvách nevyhovujú 1KZ. ')
end
```

Prečo nie je možné v Matlab-e porovnávať s 0?

Hlavný program – načítanie hodnôt odporov a napätí a použitie nami vytvorených funkcií MUN a MSP

hl_prog.m

```
% zadávanie hodnôt odporov
R1 = input ('Zadaj hodnotu R1 = ');
R2 = input ('Zadaj hodnotu R2 = ');
R3 = input ('Zadaj hodnotu R3 = ');
R4 = input ('Zadaj hodnotu R4 = ');
R5 = input ('Zadaj hodnotu R5 = ');
disp('*****')
% zadávanie hodnôt prúdov
U1 = input ('Zadaj hodnotu napät'ového zdroja U1 = ');
U2 = input ('Zadaj hodnotu napät'ového zdroja U2 = ');

disp('*****')
disp('')
disp('')
R = [R1, R2, R3, R4, R5];
U = [U1, U2];
disp ('metoda sluckovych prudov')
I=MSP(U,R)
disp('*****skúška*****')
skuska(I)
disp('*****')
disp('metoda uzlovych napati')
I=MUN(U,R)
disp('*****skúška*****')
skuska(I)
```