Riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice (LDR) druhého a vyššieho rádu s konštantnými koeficientmi analyticky a algoritmicky v programovom prostredí MATLAB

ZADANIE:

Riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice (2. alebo 3. rádu) s konštantnými koeficientmi analyticky a algoritmicky v programovom prostredí MATLAB.

OBSAH ZADANIA:

1. *Zadaná LDR (2. alebo 3. rádu) s konštantnými koeficientmi s počiatočnými podmienkami (PP) a pravou stranou (PS). (Pozn. možnosť zmeny koeficientov)*
2. *Riešenie LDR v časovej oblasti.*
3. *Riešenie LDR v laplaceovej transformácií (LT) -> prechod do časovej oblasti.*
4. *Riešenie v programovom prostredí MATLAB.*

ÚLOHA:

1. *Vyriešte metódou špeciálnej pravej strany a následnej pomocou Laplaceovej transformácie LDR:* $y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 3e^{2t}$ *s počiatočnými podmienkami:* $y(0) = y'(0) = 0$

2. Riešenie DR so špeciálnou pravou stranou:

1. Charakteristická rovnica:

$$s^2 - 2s - 3 = 0$$

$$(s-3)*(s+1) = 0$$

Korene charakteristickej rovnice : $s_1 = 3$

$$s_2 = -1$$

Všeobecné riešenie vyplývajúce z charakteristickej rovnice: $\bar{y} = C_1e^{-t} + C_2e^{3t}$

2. Riešenie špeciálnej pravej strany : $f(t) = 3e^{2t}$

s=0, a=2, b=0, a+ib=2 => k=0

Partikulárne riešenie : $y^* = Ae^{2t}$

Derivovanie partikulárneho riešenia : $(y^*)' = 2Ae^{2t}$

$$(y^*)'' = 4Ae^{2t}$$

$$4Ae^{2t} - 4Ae^{2t} - 3Ae^{2t} = 3e^{2t}$$

$$A = -1$$

3. Všeobecné riešenie DR ($y = \bar{y} + y^*$): $y = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} - e^{2t}$

4. Derivovanie všeobecného riešenia: $y' = -C_1e^{-t} + 3C_2e^{3t} - 2e^{2t}$

5. Výpočet konštánt z počiatočných podmienok: $0 = C_1 + C_2 - 1$

$C_1 = 1 - C_2 \rightarrow C_1 = \frac{1}{4}$

$0 = -C_1 + 3C_2 - 2$

$3 = 4C_2 \rightarrow\; C_2 = \frac{3}{4}$

6. Celkové riešenie DR: $\boxed{y = \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{3t} - e^{2t}}$

3. Riešenie LDR pomocou laplaceovej transformácie:

Zadaná LDR: $y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 3e^{2t}$ $\quad PP: y(0) = y'(0) = 0$

1. Prepis na obraz LDR: $s^2Y(s) - 2sY(s) - 3Y(s) = \frac{3}{s-2}$

2. Prenosová funkcia LDR: $G(s) = \frac{3}{(s-2)(s-3)(s+1)}$

3. Rozklad prenosovej funkcie na parciálne zlomky: $\frac{3}{(s-2)(s-3)(s+1)} = \frac{-1}{s-2} + \frac{\frac{3}{4}}{s-3} + \frac{\frac{1}{4}}{s+1}$

4. Prevod spätnou transformáciou do času , výsledné riešenie: $y(t) = -e^{2t} + \frac{3}{4}e^{3t} + \frac{1}{4}e^{-t}$

Prepis do substitučného kanonického tvaru:

$$y(t) = x_1$$

$$y'(t) = x_1' = x_2$$

$$y''(t) = x_2' = \frac{1}{a_2} * (3e^{2t} - a_1 * x_2 - a_0 * x_1) = 3e^{2t} + 2x_2 + 3x_1$$

4. Riešenie v programovom prostredí MATLAB:

difrov.m

```
function xder = difrov(t,x)
%Zápis diferenciálnej rovnice 2.radu pomocou 2rovnic 1.radu
global a0 a1 a2;
xder=[x(2); (3*exp(2*t)-a1*x(2)+-a0*x(1))./a2];
return
```

analyt.m

```
%analytické riešenie
function d = analyt(t)
d=(1/4)*exp(-t)+(3/4)*exp(3*t)-exp(2*t);
return
```

chyba.m

```
%odhad chyby:

function chyba=rozdiel(d,y)

rozdiel=abs(d-y(:,1));        %vektor rozdielov v funkci9 v danom čase
chyba=max(rozdiel);
fprintf('Maximálna odchýlka = %d\n', chyba)
return
```

Grafické porovnanie analytického a numerického riešenia. Na grafe je vidieť, že analytické riešenie LDR sa rovná riešeniu numerickému: