1 Popis lineárneho dynamického systému pomocou matematického modelu v tvare lineárnej diferenciálnej rovnice n-tého rádu

1.1 Ciele cvičenia

- riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice s rôznymi reálnymi koreňmi
  - s využitím Laplaceovej transformácie ($\mathcal{L}$) a spätnej Laplaceovej transformácie ($\mathcal{L}^{-1}$) a
  - analyticky v časovej oblasti

1.2 Riešenie LDR pomocou LT a spätnej LT pre rôzne reálne korene charakteristickej rovnice

Postup:

1. Popis lineárneho dynamického systému pomocou matematického modelu v tvare LDR $n-$tého rádu.
2. Laplaceová transformácia diferenciálnej rovnice
3. Riešenie diferencialnej rovnice pomocou Laplaceovej transformácie
4. Spätná Laplaceová transformácia riešenia do časovej oblasti
5. Skúška správnosti

Systém s rôznymi reálnymi koreňmi - stabilný

Zadanie: Riešte lineárnu diferenciálnu rovnicu

$$2y'''(t) + 16y''(t) + 38y'(t) + 24y(t) = 8u(t), \tag{1.1}$$

s nulovými počiatočnými podmienkami $y''(0) = y'(0) = y(0) = 0$ a $u(t) = 3$.

Riešenie pomocou LP a SLP: Najprv vydelíme lineárnu diferenciálnu rovnicu najvyšším koeficientom 2.

$$y'''(t) + 8y''(t) + 19y'(t) + 12y(t) = 12 \tag{1.2}$$

Ďalej pomocou Laplace slovníka prepíšeme diferenciálnu rovnicu na

$$s^3Y(s) + 8s^2Y(s) + 19sY(s) + 12Y(s) = \frac{12}{s} \tag{1.3}$$

Z predošlej rovnice vyjadríme obraz riešenia $Y(s)$. Postup je nasledovný:

$$\begin{aligned} Y(s)(s^3 + 8s^2 + 19s + 12) &= \frac{12}{s} \\ Y(s) &= \frac{12}{s(s^3 + 8s^2 + 19s + 12)} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Aby bolo možné použiť spätnú Laplaceovú transformáciu, je nutné vyjadriť obraz riešenia $Y(s)$ vo forme parciálnych zlomkov. Preto ďalej potrebujeme určiť korene menovateľa $Y(s)$. Je zjavné, že jeden z koreňov je 0, ten je v dôsledku pôsobiaceho jednotkového skoku. Ostatné korene určíme na základe možných deliteľov koeficientu najnižšieho stupňa. V tomto prípade sú to delitele čísla 12 a to $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6$. Postupným dosadzovaním do rovnice

$$s^3 + 8s^2 + 19s + 12 = 0 \tag{1.5}$$

je možné zistiť jej koreň. Pre potenciálny koreň +1 dostávame

$$1^3 + 8 \cdot 1^2 + 19 \cdot 1 + 12 = \tag{1.6}$$

$$1 + 8 + 19 + 12 \neq 0 \tag{1.7}$$

a teda +1 nie je koreňom rovnice. Dosadíme potenciálny koreň −1 a dostaneme

$$(-1)^3 + 8 \cdot (-1)^2 + 19 \cdot (-1) + 12 = \tag{1.8}$$

$$-1 + 8 - 19 + 12 = 0 \tag{1.9}$$

a −1 je koreňom rovnice. Teraz vydelíme rovnicu známym koreňom

$$\begin{array}{l} (s^3 + 8s^2 + 19s + 12) : (s+1) = s^2 + 7s + 12 \\ -(s^3 + s^2) \\ \quad 7s^2 + 19s + 12 \\ \quad -(7s^2 + 7s) \\ \qquad 12s + 12 \\ \qquad -(12s + 12) \\ \qquad\qquad 0 \end{array} \tag{1.10}$$

Teraz môžeme vyriešiť kvadratickú rovnicu

$$s^2 + 7s + 12 = 0 \tag{1.11}$$

ako

$$s_3 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 + \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = -3 \tag{1.12}$$

$$s_4 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 - \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = -4 \tag{1.13}$$

Korene sú teda $s_1 = 0$, $s_2 = -1$, $s_3 = -3$, $s_4 = -4$. Ďalej nasleduje rozklad na parciálne zlomky a to následovne

$$\begin{aligned} Y(s) =& \frac{12}{s(s^3 + 8s^2 + 19s + 12)} = \frac{12}{s(s+1)(s+3)(s+4)} \\ =& \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+3} + \frac{K_4}{s+4} \end{aligned} \tag{1.14}$$

A. **Všeobecný postup** určenia koeficientov rozkladu na parciálne zlomky - po vynásobení

$$\frac{12}{s(s+1)(s+3)(s+4)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+3} + \frac{K_4}{s+4} \tag{1.15}$$

menovateľom $s(s^3 + 8s^2 + 19s + 12)$ dostaneme

$$\begin{aligned} 12 =& K_1(s+1)(s+3)(s+4) + K_2 s(s+3)(s+4) + \\ & K_3 s(s+1)(s+4) + K_4 s(s+1)(s+3) \\ 12 =& K_1(s^3 + 8s^2 + 19s + 12) + K_2(s^3 + 7s^2 + 12s) + \\ & K_3(s^3 + 5s^2 + 4s) + K_4(s^3 + 4s^2 + 3s) \\ 12 =& s^3(K_1 + K_2 + K_3 + K_4) + \\ & s^2(8K_1 + 7K_2 + 5K_3 + 4K_4) + \\ & s(19K_1 + 12K_2 + 4K_3 + 3K_4) + 12K_1 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Porovnaním koeficientov pre mocniny s je možné zostaviť sústavu 4 rovníc o 4 neznámych a to

$$\begin{aligned} s^3 &: 0 = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 \\ s^2 &: 0 = 8K_1 + 7K_2 + 5K_3 + 4K_4 \\ s^1 &: 0 = 19K_1 + 12K_2 + 4K_3 + 3K_4 \\ s^0 &: 12 = 12K_1 \end{aligned} \tag{1.17}$$

vyjadrené ako sústava rovníc

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{B} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \\ 19 & 12 & 4 & 3 \\ 12 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

Z posledného riadka matice je zrejmé, že koeficient $K_1 = 1$. Ostatné koeficienty je možné vypočítať Gaussovou metódou pre sústavu troch rovníc o troch neznámych, keďže je možné K_1 dosadiť a preniesť na pravú stranu.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 7 & 5 & 4 & -8 \\ 12 & 4 & 3 & -19 \end{array} \right) \tag{1.19}$$

Od druhého riadku odpočítame -7 násobok prvého riadku a od tretieho odpočítame -12 násobok prvého riadku

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 7-7 & 5-7 & 4-7 & -8+7 \\ 12-12 & 4-12 & 3-12 & -19+12 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -8 & -9 & -7 \end{array} \right) \tag{1.20}$$

Ďalej od tretieho odpočítame -4 násobok druhého riadka

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -8+8 & -9+12 & -7+4 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array} \right) \tag{1.21}$$

Teraz je možné postupným dosadzovaním určiť ostatné koeficienty

$$\begin{aligned} 3K_4 = -3 \qquad &\longrightarrow \qquad K_4 = -1 \\ -2 * K_3 - 3 * (-1) = -1 \qquad &\longrightarrow \qquad K_3 = 2 \\ K_2 + 2 - 1 = -1 \qquad &\longrightarrow \qquad K_2 = -2 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Riešením sústavy rovníc sme získali koeficienty $K_1 = 1, K_2 = -2, K_3 = 2, K_4 = -1$. Pre obraz riešenia $Y(s)$ je rozklad nasledovný

$$Y(s) = \frac{1}{s} - 2 \cdot \frac{1}{s+1} + 2 \cdot \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+4} \tag{1.23}$$

Prevod do časovej oblasti pomocou Laplace slovníka

$$y(t) = 1 - 2 \cdot e^{-t} + 2 \cdot e^{-3t} - e^{-4t} \tag{1.24}$$

B. **Riešenie pomocou limít** - v prípade, že **korene sú navzájom rôzne**.

Poznámka - predpokladajme že chceme urobiť spätnú Laplaceovú transformáciu obrazu v tvare racionálnej funkcie

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0} \tag{1.25}$$

kde $B(s)$ je polynóm stupňa m a $A(s)$ je polynóm stupňa n. Keďže predpokladáme, že polynóm $A(s)$ má rôzne reálne korene $s_1, s_2, \ldots, s_n$, môžeme racionálnu funkciu (1.25) vyjadriť v tvare

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{a_n(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_n)} = \frac{\frac{B(s)}{a_n}}{(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_n)} \\ &= \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{K_n}{s-s_n} \end{aligned} \tag{1.26}$$

Konštanty $K_1, K_2, \ldots, K_n$ nájdeme metódou porovnania koeficientov.

Originál $f(t)$ má tvar

$$f(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \cdots + K_n e^{s_n t} \tag{1.27}$$

a teda je možné vypočítať hodnoty konštánt $K_1, K_2, \ldots, K_n$ vypočítať pomocou nasledovného vzťahu

$$K_j = \lim_{s \to s_j} \frac{\frac{B(s)}{a_n}}{\prod_{i=1, i\neq j}^{n}(s-s_i)} \tag{1.28}$$

a teda

$$\begin{aligned} K_1 &= \lim_{s\to 0} \frac{12}{((s+1)(s+3)(s+4))} = \frac{12}{1\cdot 3\cdot 4} = \frac{12}{12} = 1 \\ K_2 &= \lim_{s\to -1} \frac{12}{(s(s+3)(s+4))} = \frac{12}{-1\cdot 2\cdot 3} = -\frac{12}{6} = -2 \\ K_3 &= \lim_{s\to -3} \frac{12}{(s(s+1)(s+4))} = \frac{12}{-3\cdot(-2)\cdot 1} = \frac{12}{6} = 2 \\ K_4 &= \lim_{s\to -4} \frac{12}{(s(s+1)(s+3))} = \frac{12}{-4\cdot(-3)\cdot(-1)} = -\frac{12}{12} = -1 \end{aligned} \tag{1.29}$$

Pre obraz riešenia $Y(s)$ je rozklad nasledovný

$$Y(s) = \frac{1}{s} - 2\cdot\frac{1}{s+1} + 2\cdot\frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+4} \tag{1.30}$$

Prevod do časovej oblasti pomocou Laplace slovníka

$$y(t) = 1 - 2\cdot e^{-t} + 2\cdot e^{-3t} - e^{-4t} \tag{1.31}$$

C. **Skúška správnosti** - Vyjadríme si postupným derivovaním derivácie ako

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - 2\cdot e^{-t} + 2\cdot e^{-3t} - e^{-4t} \\ y'(t) &= 2\cdot e^{-t} - 6\cdot e^{-3t} + 4e^{-4t} \\ y''(t) &= -2\cdot e^{-t} + 18\cdot e^{-3t} - 16e^{-4t} \\ y'''(t) &= 2\cdot e^{-t} - 54\cdot e^{-3t} + 64e^{-4t} \end{aligned} \tag{1.32}$$

a dosadíme do pôvodnej funkcie

$$y'''(t) + 8y''(t) + 19y'(t) + 12y(t) = 12 \tag{1.33}$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} &2\cdot e^{-t} - 54\cdot e^{-3t} + 64e^{-4t} \\ &+ 8(-2\cdot e^{-t} + 18\cdot e^{-3t} - 16e^{-4t}) \\ &+ 19(2\cdot e^{-t} - 6\cdot e^{-3t} + 4e^{-4t}) \\ &+ 12(1 - 2\cdot e^{-t} + 2\cdot e^{-3t} - e^{-4t}) = 12 \end{aligned} \tag{1.34}$$

$$
\begin{aligned}
&2 \cdot e^{-t} - 54 \cdot e^{-3t} + 64e^{-4t} \\
&- 16 \cdot e^{-t} + 144 \cdot e^{-3t} - 128e^{-4t}) \\
&+ 38 \cdot e^{-t} - 114 \cdot e^{-3t} + 76e^{-4t}) \\
&- 24 \cdot e^{-t} + 24 \cdot e^{-3t} - 12e^{-4t}) + 12 = 12 \\
&12 = 12
\end{aligned} \tag{1.35}
$$

čím je potvrdené riešenie v tvare

$$
y(t) = 1 - 2 \cdot e^{-t} + 2 \cdot e^{-3t} - e^{-4t} \tag{1.36}
$$

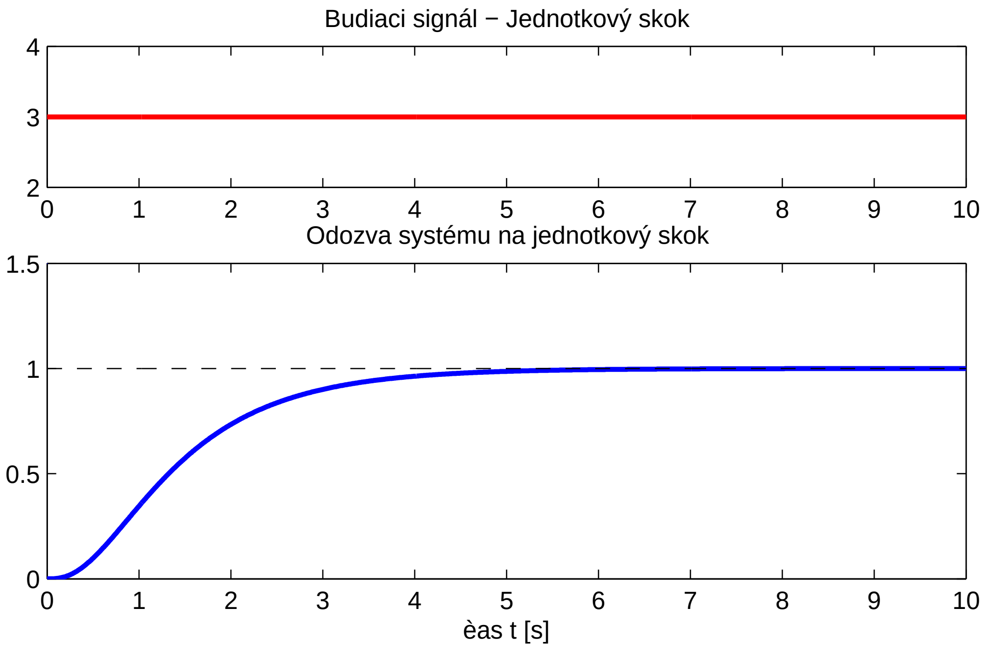

Figure 1: Graf odozvy $y(t)$ systému na budenie $u(t) = 3$

Nestabilný dynamický systém 3. rádu s rôznymi reálnymi koreňmi

Zadanie: Dynamický systém je opísaný lineárnou diferenciálnou rovnicou

$$2y'''(t) + 5y''(t) - 9y'(t) - 18y(t) = 4u(t), \tag{1.37}$$

s nulovými počiatočnými podmienkami $y''(0) = y'(0) = y(0) = 0$. Vypočítajte riešenie $y(t)$ LDR pomocou Laplaceovej a spätnej Laplaceovej transformácie ak systém je budený vstupným signálom v tvare $u(t) = e^{-4t}$.

Riešenie pomocou LP a SLP: Najprv vydelíme lineárnu diferenciálnu rovnicu najvyšším koeficientom 2 - normujeme

$$y'''(t) + 2.5y''(t) - 4.5y'(t) - 9y(t) = 2u(t), \tag{1.38}$$

Pomocou Laplace slovníka prepíšeme diferenciálnu rovnicu na

$$s^3Y(s) + 2.5s^2Y(s) - 4.5sY(s) - 9Y(s) = \frac{2}{s+4}, \tag{1.39}$$

Z predošlej rovnice vyjadríme obraz riešenia $Y(s)$. Postup je nasledovný:

$$\begin{aligned} (s^3 + 2.5s^2 - 4.5s - 9)Y(s) &= \frac{2}{s+4}, \\ Y(s) &= \frac{2}{(s+4)(s^3 + 2.5s^2 - 4.5s - 9)} \end{aligned} \tag{1.40}$$

Pre použitie spätnej Laplaceovej transformácie je nutné vyjadriť riešenie algebrickej rovnice fo forme parciálnych zlomkov. Z tohto dôvodu je potrebné určiť zvyšné korene obrazu riešenia $Y(s)$, keďže jeden koreň je už známy hneď po prevode - $s_1 = -4$. Ostatné korene určíme na základe možných deliteľov koeficientu najnižšieho stupňa. V tomto prípade sú to delitele čísla 9 a to $\pm 1, \pm 3$. Postupným dosadzovaním do rovnice

$$s^3 + 2.5s^2 - 4.5s - 9 = 0 \tag{1.41}$$

je možné zistiť jej koreň. Pre potenciálny koreň -3 dostávame

$$(-3)^3 + 2.5 \cdot (-3)^2 - 4.5 \cdot (-3) - 9 = \tag{1.42}$$

$$-27 + 22.5 + 13.5 - 9 = 0 \tag{1.43}$$

a teda $s_2 = -3$ je koreňom charakteristickej rovnice. Rovnicu vydelíme známym koreňom

$$\begin{array}{l} \quad (s^3 + 2.5s^2 - 4.5s - 9) : (s+3) = s^2 - 0.5s - 3 \\ -(s^3 \quad + 3s^2) \\ \qquad - 0.5s^2 - 4.5s - 9 \\ \quad - (-0.5s^2 + \quad -1.5s) \\ \qquad\qquad - 3s - 9 \\ \qquad\quad - (-3s - 9) \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array} \tag{1.44}$$

Teraz môžeme vyriešiť kvadratickú rovnicu

$$s^2 - 0.5s - 3 = 0 \tag{1.45}$$

Jej korene sú $s_3 = -1.5$ a $s_4 = 2$.

Výsledné korene menovateľa $Y(s)$ sú teda $s_1 = -4$, $s_2 = -3$, $s_3 = -1.5$, $s_4 = 2$. Ďalej nasleduje rozklad na parciálne zlomky obrazu riešenia $Y(s)$ LDR v Laplaceovej transformácii

$$\begin{aligned} Y(s) =& \frac{2}{(s+4)(s^3+2.5s^2-4.5s-9)} = \frac{2}{(s+4)(s+3)(s+1.5)(s-2)} \\ =& \frac{K_1}{s+4} + \frac{K_2}{s+3} + \frac{K_3}{s+1.5} + \frac{K_4}{s-2} \end{aligned} \tag{1.46}$$

Riešenie pomocou limít - keďže **korene sú navzájom rôzne**, je možné aplikovať postup s využitím limít a to podľa vzťahu

$$K_j = \lim_{s \to s_j} \frac{\frac{B(s)}{a_n}}{\prod_{i=1, i \neq j}^{n} (s - s_i)} \tag{1.47}$$

a teda

$$\begin{aligned} K_1 &= \lim_{s \to -4} \frac{2}{(s-2)(s+1.5)(s+3)} = \frac{2}{(-6) \cdot (-2.5) \cdot (-1)} = \frac{2}{-15} = -0.1333\bar{3} \\ K_2 &= \lim_{s \to -3} \frac{2}{(s+4)(s-2)(s+1.5)} = \frac{2}{1 \cdot (-5) \cdot (-1.5)} = \frac{2}{7.5} = 0.266\bar{6} \\ K_3 &= \lim_{s \to -1.5} \frac{2}{(s+4)(s-2)(s+3)} = \frac{2}{2.5 \cdot (-3.5) \cdot 1.5} = \frac{2}{-13.125} = -0.1524 \\ K_4 &= \lim_{s \to 2} \frac{2}{(s+4)(s+1.5)(s+3)} = \frac{2}{6 \cdot 3.5 \cdot 5} = \frac{2}{105} = 0.0190 \end{aligned} \tag{1.48}$$

Pre obraz $Y(s)$ je rozklad nasledovný

$$Y(s) = -0.1333 \frac{1}{s+4} + 0.2667 \frac{1}{s+3} - 0.1524 \frac{1}{s+1.5} + 0.0190 \frac{1}{s-2} \tag{1.49}$$

Následný prevod spätnou laplaceovou transformáciou do časovej oblasti

$$y(t) = -0.1333 e^{-4t} + 0.2667 e^{-3t} - 0.1524 e^{-1.5t} + 0.0190 e^{2t} \tag{1.50}$$

1.3 Analytické riešenie LDR (v časovej oblasti)

Postup:

1. Popis lineárneho dynamického systému pomocou matematického modelu v tvare LDR $n-$tého rádu.
2. Riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice (s nulovou pravou stranou), bez budiaceho signálu
3. Riešenie LDR s definovaným typom pravej strany, s budiacim signálom
4. Zostavenie výsledného riešenia $y(t)$,
5. Skúška správnosti pomocou Laplaceovej transformácie

Riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice 2. rádu v časovej oblasti

Zadanie: Dynamický systém je opísaný lineárnou diferenciálnou rovnicou

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 1, \tag{1.51}$$

s nulovými počiatočnými podmienkami $y'(0) = y(0) = 0$. Vypočítajte riešenie $y(t)$ LDR v časovej oblasti.

Riešenie: Riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice s konštantnými koeficientami sa skladá z riešenia homogénnej diferenciálnej rovnice $y_H(t)$ a partikulárneho riešenia $y_P(t)$:

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) \tag{1.52}$$

Riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice: Charakteristická rovnica odpovedajúca homogénnej diferenciálnej rovnici:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0 \tag{1.53}$$

má tvar:

$$r^2 + 5r + 6 = (r+2)(r+3) = 0 \tag{1.54}$$

Homogénne riešenie $y_H(t)$ môžeme potom zapísať v tvare

$$y_h(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-3t} \tag{1.55}$$

Partikulárne riešenie: Ak pravá strana diferenciálnej rovnice má tvar

$$P_m(x)e^{\alpha x} \tag{1.56}$$

kde α je koreňom charakteristickej rovnice, potom hľadáme partikulárne riešenie v tvare:

$$y_P(t) = x^kQ_m(x)e^{\alpha x} \tag{1.57}$$

kde k je násobnosť koreňa α. Keďže naša pravá strana má tvar polynómu nultého stupňa, aj naše partikulárne riešenie budeme hľadať v tvare polynómu nultého stupňa:

$$y_P(t) = A, \quad y_P^{'}(t) = 0, \quad y_P^{''}(t) = 0 \tag{1.58}$$

Po dosadení do pôvodnej diferenciálnej rovnice 1.51:

$$\begin{aligned} &y_P^{''}(t) + 5y_P^{'}(t) + 6y_P(t) = 1 \\ &0 + 5\cdot 0 + 6\cdot A = 1 \end{aligned} \tag{1.59}$$

a následnom vyriešení lineárnej rovnice:

$$6A = 1 \Rightarrow A = 1/6 \tag{1.60}$$

získame partikulárne riešenie $y_P(t)$ diferenciálnej rovnice:

$$y_P(t) = 1/6 \tag{1.61}$$

Pre výsledné riešenie DR a jeho deriváciu platí:

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1e^{-2t} + c_2e^{-3t} + 1/6 \\ y^{'}(t) &= -2c_1e^{-2t} + -3c_2e^{-3t} \end{aligned} \tag{1.62}$$

Dosadením počiatočných podmienok do riešenia DR dostávame sústavu lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + 1/6 &= 0 \\ -2c_1 - 3c_2 &= 0 \end{aligned} \tag{1.63}$$

ktorej riešením vypočítame konštanty:

$$c_1 = -1/2, \qquad c_2 = 1/3 \tag{1.64}$$

a pre výsledné riešenie s počiatočnými podmienkami platí:

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t} + 1/6 \tag{1.65}$$

Skúška správnosti - pomocou Laplaceovej transformácie: Pomocou Laplaceovho slovníka prepíšeme diferenciálnu rovnicu do tvaru:

$$s^2Y(s) + 5sY(s) + 6Y(s) = \frac{1}{s}, \tag{1.66}$$

Z predošlej rovnice vyjadríme obraz riešenia $Y(s)$. Postup je nasledovný:

$$\begin{aligned}(s^2 + 5s + 6)Y(s) &= \frac{1}{s},\\ Y(s) &= \frac{1}{s(s^2 + 5s + 6)}\end{aligned} \tag{1.67}$$

Pre použitie spätnej Laplaceovej transformácie je nutné vyjadriť riešenie algebrickej rovnice vo forme parciálnych zlomkov. Z riešenia homogénnej diferenciálnej rovnice v časovej oblasti poznáme korene obrazu riešenia $Y(s)$.

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+3} \tag{1.68}$$

Riešenie pomocou limít - keďže **korene sú navzájom rôzne**, je možné aplikovať postup s využitím limít, a teda

$$\begin{aligned}K_1 &= \lim_{s\to 0} \frac{1}{(s+2)(s+3)} = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}\\ K_2 &= \lim_{s\to -2} \frac{1}{s(s+3)} = \frac{1}{-2\cdot 1} = -\frac{1}{2}\\ K_3 &= \lim_{s\to -3} \frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{-3\cdot(-1)} = \frac{1}{3}\end{aligned} \tag{1.69}$$

Pre obraz $Y(s)$ je rozklad nasledovný

$$Y(s) == \frac{1}{6}\frac{1}{s} + \frac{-1}{2}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{3}\frac{1}{s+3} \tag{1.70}$$

Následný prevod spätnou Laplaceovou transformáciou do časovej oblasti

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t} + 1/6 \tag{1.71}$$

Týmto sme overili správnosť riešenia $y(t)$ v časovej oblasti.

1.4 Príklady na samostatné riešenie

1. Zadanie: Je zadaná lineárna diferenciálna rovnica

$$3y'''(t) + 21y''(t) + 42y'(t) + 24y(t) = 3u(t), \tag{1.72}$$

s nulovými počiatočnými podmienkami $y''(0) = y'(0) = y(0) = 0$ a $u(t) = 2$.

- Riešte LDR s pravou stranou s využitím LT s zadanými PP, ktorá reprezentuje model lineárneho dynamického systému.

Výsledky porovnajte a urobte skúšku správnosti.

Riešenie:

$$y(t) = 0.25 - 0.0833 \cdot e^{-4t} + 0.5 \cdot e^{-2t} - 0.6667e^{-t} \tag{1.73}$$

2. Zadanie: Je zadaná lineárna diferenciálna rovnica

$$y'''(t) + 5.5y''(t) + 8.5y'(t) + 3y(t) = 3u(t), \tag{1.74}$$

s nulovými počiatočnými podmienkami $y''(0) = y'(0) = y(0) = 0$ a $u(t) = 2$.

- Riešte LDR s pravou stranou s využitím LT s zadanými PP, ktorá reprezentuje model lineárneho dynamického systému.

Výsledky porovnajte a urobte skúšku správnosti.

Riešenie:

$$y(t) = 2 - 3.2 \cdot e^{-0.5t} + 2 \cdot e^{-2t} - 0.8e^{-3t} \tag{1.75}$$