# 11 Overenie stability systémov pomocou frekvenčných kritérií (Michajlov, Nyquist)

## 11.1 Ciele cvičenia

- Vyšetrenie stability uzavretého regulačného obvodu pomocou Michajlovho kritéria
- Určenie kritického parametra uzavretého regulačného obvodu pomocou Michajlovho kritéria
- Vyšetrenie stability uzavretého regulačného obvodu pomocou Nyquistovho kritéria
- Určenie kritického parametra uzavretého regulačného obvodu pomocou Nyquistovho kritéria

## 11.2 Riešené príklady

**Zadanie:** Podľa Michajlovho kritéria vyšetrite stabilitu lineárneho regulačného obvodu, ak má jeho charakteristická rovnica tvar

$$s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 5s + 2 = 0 \tag{11.1}$$

**Riešenie:** Dosadením $s = j\omega$ do charakteristického polynómu dostaneme Michajlov hodograf $H(j\omega)$ uvedeného systému

$$H(j\omega) = \omega^4 - j3\omega^3 - 4\omega^2 + 5j\omega + 2 = \tag{11.2}$$

$$\omega^4 - 4\omega^2 + 2 - j(3\omega^3 + 5\omega) \tag{11.3}$$

Vyjadríme $H(j\omega)$ ako algebraický tvar komplexného čísla

$$H(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) \tag{11.4}$$

pričom reálna zložka $Re[H(j\omega)] = U(\omega)$ a imaginárna zložka $Im[H(j\omega)] = V(\omega)$.

$$U(\omega) = \omega^4 - 4\omega^2 + 2, \qquad V(\omega) = -(3\omega^3 + 5\omega) \tag{11.5}$$

**Priesečníky s reálnou osou:** Imaginárnu zložku $V(\omega) = \omega(5-3\omega^2)$ hodografu $H(j\omega)$ položíme rovnú nule:

$$V(\omega) = 0 \left\{ \begin{array}{r} \omega_1 = 0 \\ 5 - 3\omega^2 = 0 \Rightarrow \quad \omega_2 = 1.291 \end{array} \right. \tag{11.6}$$

a vypočítané hodnoty frekvencií dosadíme do reálnej zložky $U(\omega)$ hodografu $H(j\omega)$ a získame priesečníky v bodoch

$$\begin{aligned} U(\omega_1) &= \omega_1^4 - 4\omega_1^2 + 2 = 2 \\ U(\omega_2) &= \omega_2^4 - 4\omega_2^2 + 2 = 1.291^4 - 4 \cdot 1.291^2 + 2 = -1.8889 \end{aligned} \tag{11.7}$$

**Priesečníky s imaginárnou osou:** Reálnu zložku $U(\omega) = \omega^4 - 4\omega^2 + 2$ hodografu $H(j\omega)$ položíme rovnú nule. V tomto prípade je možné nájsť riešenie bi-kvadratickej funkcie pre $z = \omega^2$ v tvare $u(z) = z^2 - 4z + 2$, pričom korene $U(\omega)$ sú druhými odmocninami koreňov kvadratickej rovnice $u(z)$. Zaujímajú nás iba kladné hodnoty

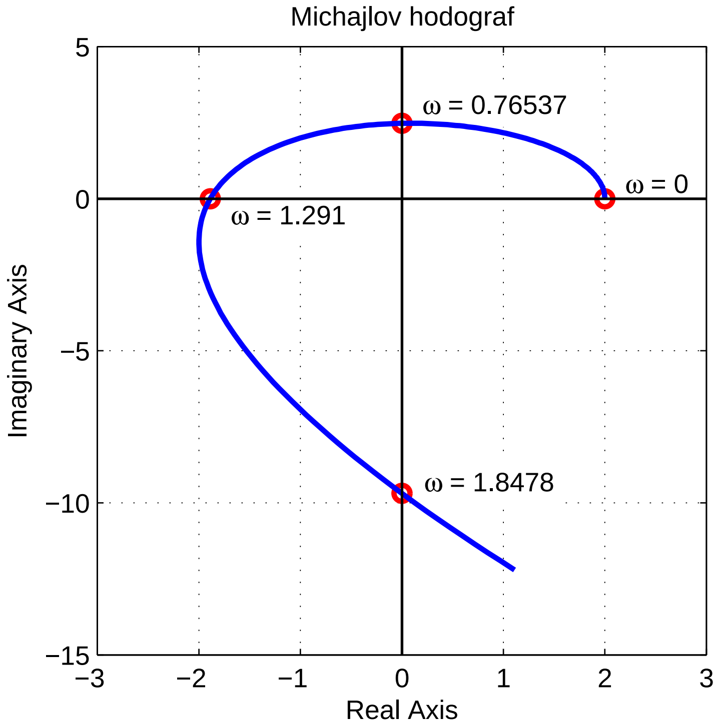
$$u(z) = z^2 - 4z + 2 = (z - 3.4142)(z - 0.5858) \tag{11.8}$$

$$U(\omega) = 0 \left\{ \begin{array}{l} \omega_3 = \sqrt{0.5858} = 0.7654 \\ \omega_4 = \sqrt{3.4142} = 1.8478 \end{array} \right. \tag{11.9}$$

Vypočítané hodnoty frekvencií dosadíme do imaginárnej zložky $V(\omega)$ hodografu $H(j\omega)$ a získame priesečníky v bodoch

$$\begin{aligned} V(\omega_3) &= -3\omega_3^3 + 5\omega_3 = -3 \cdot 0.7654^3 + 5 \cdot 0.7654 = 2.4818 \\ V(\omega_4) &= -3\omega_4^3 + 5\omega_4 = -3 \cdot 1.8478^3 + 5 \cdot 1.8478 = -9.6871 \end{aligned} \tag{11.10}$$

Výsledný Michajlov hodograf má následujúci tvar




Charakteristická rovnica reprezentujúca lineárnu diferenciálnu rovnicu 4. rádu uzavretého regulačného obvodu a jej odpovedajúci Michajlov hodograf prechádza postupne 1., 2., 3. a končí vo 4. kvadrante komplexnej roviny. Z tvaru krivky Michajlovho hodografu je možné usúdiť, že vyšetrovaný uzavretý regulačný obvod je stabilný.

**Zadanie:** Uvažujme systém 3.rádu, ktorého prenos je:

$$F_P(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} \tag{11.11}$$

a pre tri P-regulátory $F_P(s)$ so zosilnením $K_1 = 4, K_2 = 8, K_3 = 12$ vyšetrite stabilitu pomocou Michajlovho kritéria a porovnajte výsledky s riešením podľa Hurwitziovho kritéria.

**Riešenie:** Vyjadríme charakteristickú rovnicu z

$$1 + F_s(s)F_R(s) = 0 \tag{11.12}$$

ako

$$1 + \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} \cdot K = 0 \Rightarrow \overbrace{\underbrace{1}_{a_3} s^3 + \underbrace{3}_{a_2} s^2 + \underbrace{3}_{a_1} s + \underbrace{1 + K}_{a_0} = 0}^{\text{Charakteristická rovnica}} \tag{11.13}$$

Dosadením $s = j\omega$ do charakteristického polynómu dostaneme Michajlov hodograf $H(j\omega)$ uvedeného systému

$$H(j\omega) = -j\omega^3 - 3\omega^2 + 3j\omega + 1 + K \tag{11.14}$$

$$H(j\omega) = -3\omega^2 + 1 + K + j(3j\omega - \omega^3) \tag{11.15}$$

Vyjadríme $H(j\omega)$ ako algebraický tvar komplexného čísla

$$H(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) \tag{11.16}$$

$$U(\omega) = -3\omega^2 + 1 + K, \qquad V(\omega) = 3\omega - \omega^3 \tag{11.17}$$

Aby bol systém na hranici stability, musí platiť že reálna zložka $Re[H(j\omega)] = U(\omega) = 0$ a zároveň imaginárna zložka $Im[H(j\omega)] = V(\omega) = 0$

$$U(\omega) = 0 \wedge V(\omega) = 0 \tag{11.18}$$

čo vedie na sústavu dvoch rovníc s o dvoch neznámych. Z rovnice $V(\omega) = 0$ určíme hodnotu $\omega_k$

$$\begin{aligned} \omega(3 - \omega^2) &= 0 \\ 3 - \omega^2 &= 0 \\ \omega_k &= 1.7321 \end{aligned} \tag{11.19}$$

Z rovnice $U(\omega) = 0$ pre $\omega = \omega_k$ určíme kritický parameter $K_{KRIT}$ a to dosadením známej hodnoty $\omega_k$

$$\begin{aligned} -3\omega_k^2 + 1 + K &= 0 \\ K &= 3 \cdot 1.7321^2 - 1 \\ K_{KRIT} &= 8 \end{aligned} \tag{11.20}$$

Teraz je možné vypočítať priesečníky s reálnou a imaginárnou osou ako v predchádzajúcom príklade. Ako príklad sú uvedené priesečníky pre hodnotu $K$ menšiu ako je $K_{KRIT}$, ktorá vedie na stabilný systém, hodnotu $K$ rovnú $K_{KRIT}$, a hodnotu $K$ väčšiu ako $K_{KRIT}$ ktorá vedie na nestabilný systém.

**Stabilný systém (K = 4)**

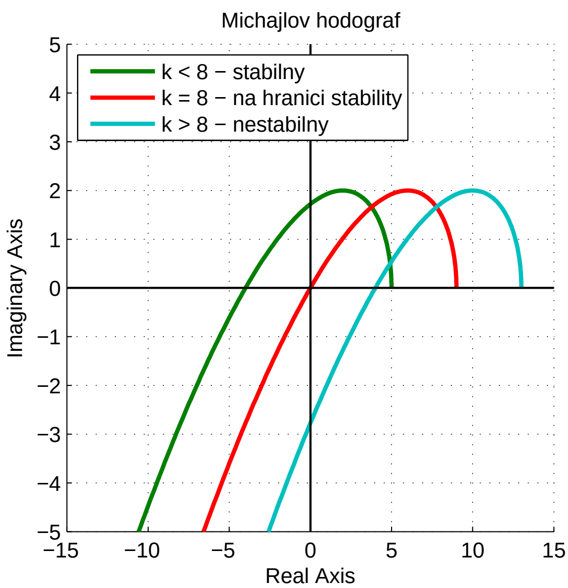
$$\begin{array}{lll} \omega_1 = 0, & U_1(\omega) = 5, & V_1(\omega) = 0 \\ \omega_2 = 1.2910, & U_2(\omega) = 0, & V_2(\omega) = 1.7213 \\ \omega_3 = 1.7321, & U_3(\omega) = -4, & V_3(\omega) = 0 \end{array} \tag{11.21}$$

**Systém na hranici stability (K = 8)**

$$\begin{array}{lll} \omega_1 = 0, & U_1(\omega) = 9, & V_1(\omega) = 0 \\ \omega_k = 1.7321, & U_2(\omega) = 0, & V_2(\omega) = 0 \end{array} \tag{11.22}$$

**Nestabilný systém (K = 12)**

$$\begin{array}{lll} \omega_1 = 0, & U_1(\omega) = 13, & V_1(\omega) = 0 \\ \omega_2 = 1.7321, & U_2(\omega) = 4, & V_2(\omega) = 0 \\ \omega_3 = 2.0817, & U_3(\omega) = 0, & V_3(\omega) = -2.7756 \end{array} \tag{11.23}$$



**Zadanie:** Podľa Nyquistovho kritéria vyšetrite stabilitu uzavretého regulačného obvodu, ak je zadaný prenos otvoreného regulačného obvodu $F_o(s)$ v tvare

$$F_o(s) = \frac{Z}{s(T_1s+1)(T_2s+1)} \tag{11.24}$$

kde $Z = 86, T_1 = 0.02[s], T_2 = 0.03[s]$.

**Zadanie:** Za $s$ je nutné dosadiť $j\omega$ aby sme získali frekvenčný prenos otvoreného obvodu a to

$$F_o(s) = \frac{Z}{s(T_1s+1)(T_2s+1)} \quad \cong \quad F_o(j\omega) = \frac{Z}{j\omega(T_1j\omega+1)(T_2j\omega+1)} \tag{11.25}$$

$F_o(j\omega)$ prepíšeme na algebraický tvar komplexného čísla

$$F_o(j\omega) = \frac{Z}{-(T_1+T_2)\omega^2 - j(T_1T_2i\omega^3 - \omega)} \tag{11.26}$$

$$F_o(j\omega) = -\frac{Z(T_1+T_2)}{T_1^2T_2^2\omega^4 + (T_1^2+T_2^2)\omega^2 + 1} + j\frac{Z(T_1T_2\omega^2-1)}{T_1^2T_2^2\omega^5 + (T_1^2+T_2^3)\omega^3 + \omega} \tag{11.27}$$

Po dosadení zosilnenia a konštánt je možné frekvenčný prenos otvoreného obvodu $F_o(j\omega)$ vyjadriť v algebraickom tvare

$$F_o(j\omega) = \underbrace{-\frac{4.3}{3.6\cdot10^{-7}\omega^4 + 1.3\cdot10^{-3}\omega^2 + 1}}_{\text{Reálna časť - } P(\omega)} \underbrace{-i\frac{86-0.0516\omega^2}{3.6\cdot10^{-7}\omega^5 + 1.3\cdot10^{-3}\omega^5 + \omega}}_{\text{Imaginárna časť - } Q(\omega)} \tag{11.28}$$

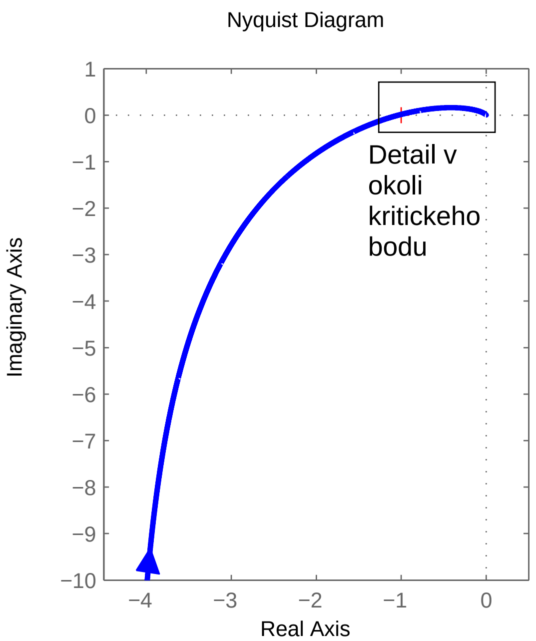
Keďže sa jedná o systém 3.rádu, postačuje vyšetriť priesečník s reálnou osou

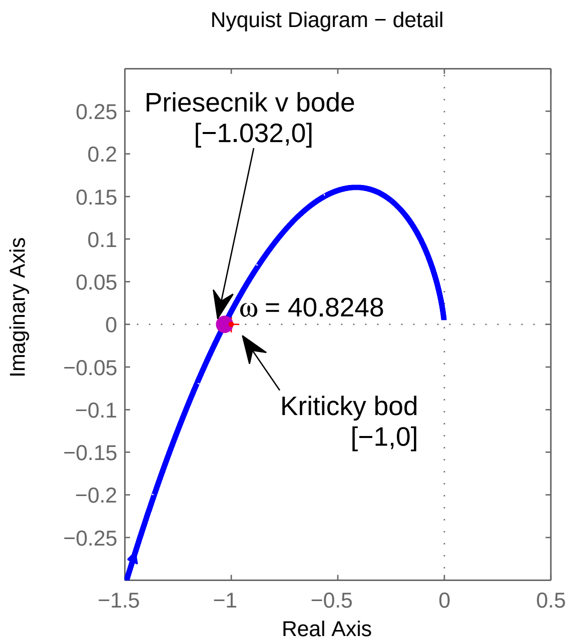
$$Q(\omega) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 86 - 0.0516\omega^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_p = 40.8248 \tag{11.29}$$

Dosadením $\omega = \omega_p$ do reálnej časti $P(\omega)$ získame priesečník Nyquistovej charakteristiky s reálnou osou

$$P(\omega_p) = -\frac{4.3}{3.6\cdot10^{-7}\omega_p^4 + 1.3\cdot10^{-3}\omega_p^2 + 1} = -1.032 \tag{11.30}$$

z čoho vyplýva, že Nyquistová charakteristika obieha kritický bod $[-1,0]$ a daný uzavretý regulačný obvod je nestabilný.



**Zadanie:** Uvažujme systém 3.rádu, ktorej prenos je:

$$F_P(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} \tag{11.31}$$

Pomocou Nyquistovho kritéria navrhnite P regulátor s parametrom $r_0 = K_{Krit}$ tak, aby bol uzavretý regulačný obvod na hranici stability.

**Riešenie:** Obvod 3. rádu je na hranici stability, ak frekvenčná charakteristika otvoreného obvodu prechádza kritickým bodom $[-1, 0]$. Vyjadríme frekvenčný prenos otvoreného obvodu.

$$F_o(s) = F_P(s)F_o(s) = \frac{K_{Krit}}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} \tag{11.32}$$

Za $s$ dosadíme $i\omega$

$$F_o(i\omega) = \frac{K_{Krit}}{1 - 3\omega^2 + j(3\omega - \omega^3)} \tag{11.33}$$

Rozložíme frekvenčný prenos na algebraický tvar $F_o(i\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$

$$F_o(i\omega) = \frac{K_{Krit}}{1 - 3\omega^2 + j(3\omega - \omega^3)} \cdot \frac{1 - 3\omega^2 - j(3\omega - \omega^3)}{1 - 3\omega^2 - j(3\omega - \omega^3)} \tag{11.34}$$

$$F_o(i\omega) = \frac{K_{Krit} - 3K_{Krit}\omega^2}{1 + 3\omega^2 + 3\omega^4 + \omega^6} - j\frac{3K_{Krit}\omega - K_{Krit}\omega^3}{1 + 3\omega^2 + 3\omega^4 + \omega^6} \tag{11.35}$$

Aby bol uzavretý regulačný obvod na hranici stability, musí platiť že

$$P(\omega) = -1 \quad \wedge \quad Q(\omega) = 0 \tag{11.36}$$

Imaginárna časť $Q(\omega) = 0$ ak

$$\omega(3K_{Krit} - K_{Krit}\omega^2) = 0 \tag{11.37}$$

pričom pre $\omega = 0$ sa nejedná o kritickú hodnotu.

$$3K_{Krit} = K_{Krit}\omega^2 \tag{11.38}$$

Kritickú hodnotu $\omega_k$ je možné určiť ako

$$\omega_k = \sqrt{3} = 1.7321 \tag{11.39}$$

Po dosadení kritickej frekvencie do rovnice pre reálnu časť Nyquistovej charakteristiky určíme hodnotu kritického zosilnenia

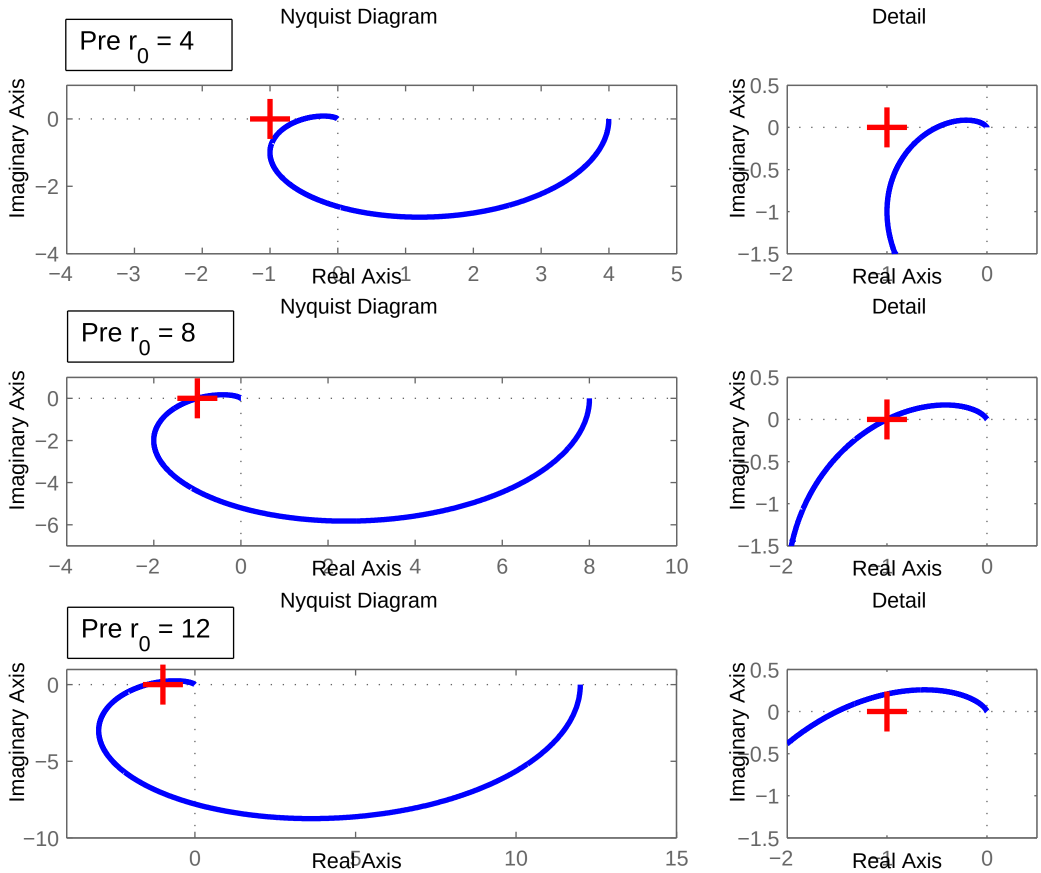
$$\frac{K_{Krit} - 3K_{Krit}\omega_k^2}{1 + 3\omega_k^2 + 3\omega_k^4 + \omega_k^6} = -1 \tag{11.40}$$

$$K_{Krit}(1 - 3\omega_k^2) = -1 - 3\omega_k^2 - 3\omega_k^4 - \omega_k^6 \tag{11.41}$$

$$K_{Krit} = \frac{-1 - 3\omega_k^2 - 3\omega_k^4 - \omega_k^6}{1 - 3\omega_k^2} \tag{11.42}$$

$$K_{Krit} = 8 \tag{11.43}$$

Hodnota získaného zosilnenia je rovnaká ako pri Hurwitzovom a Michajlovom kritériu stability. Pre porovnanie sú znázornené Nyquistové charakteristiky pre $K = 4, K = K_{Krit} = 8, K = 12$.


Nyquist Diagram
Detail
Pre r0 = 4
Pre r0 = 8
Pre r0 = 12
Imaginary Axis
Real Axis