12 Syntéza regulátorov s využitím metódy bezo-zvyškového delenia polynómov a metódy umiestnenia pólov

12.1 Ciele cvičenia

- Navrhnúť a vypočítať parametre PI/PD/PID regulátorov s využitím metódy bezo-zvyškového delenia,
- Navrhnúť a vypočítať parametre PI/PD/PID regulátorov s využitím metódy umiestňovania pólov.

12.2 Riešené príklady

Zadanie: Pre systém s prenosom $F_P(s)$ druhého rádu v tvare

$$F_P(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 4} \tag{12.1}$$

navrhnite parametre r_0, r_{-1} PI regulátora v tvare

$$F_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} \tag{12.2}$$

aby bol prechodový dej tlmený, charakterizovaný komplexne združenými koreňmi $s_{1,2} = -1 \pm i$.

Riešenie: Volí sa dominantný koreň charakteristickej rovnice tak, aby počet zvolených koreňov bol rovný počtu neznámych parametrov regulátora.

1. Zostavíme charakteristickú rovnicu uzavretého regulačného obvodu

$$\begin{aligned} \text{CHR:} \qquad 1 + F_P(s) \cdot F_R(s) &= 0 \\ 1 + \frac{1}{s^2 + 4s + 4} \cdot \left(r_0 + \frac{r_{-1}}{s}\right) &= 0 \\ 1 + \frac{1}{s^2 + 4s + 4} \cdot \left(\frac{r_0 s + r_{-1}}{s}\right) &= 0 \\ 1 + \frac{r_0 s + r_{-1}}{s^3 + 4s^2 + 4s} &= 0 \end{aligned} \tag{12.3}$$

   Výsledná charakteristická rovnica uzavretého regulačného obvodu má tvar

$$s^3 + 4s^2 + (4 + r_0)s + r_{-1} = 0 \tag{12.4}$$

   respektíve charakteristický polynóm

$$N_{URO}(s) = s^3 + 4s^2 + (4 + r_0)s + r_{-1} \tag{12.5}$$

2. Zo zadaných koreňov $s_{1,2} = -1 \pm i$ vypočítame referenčný polynóm $N_{ref}(s)$

$$\begin{aligned} N_{ref}(s) &= (s - s_1)(s - s_2) \\ &= (s + 1 - i)(s + 1 + i) \\ &= s^2 + 2s + 2 \end{aligned} \tag{12.6}$$

3. Vydelením charakteristického polynómu $N_{URO}(s)$ referenčným polynómom $N_{ref}(s)$ získame zvyšok z ktorého určíme neznáme parametre regulátora r_0 a r_{-1}.

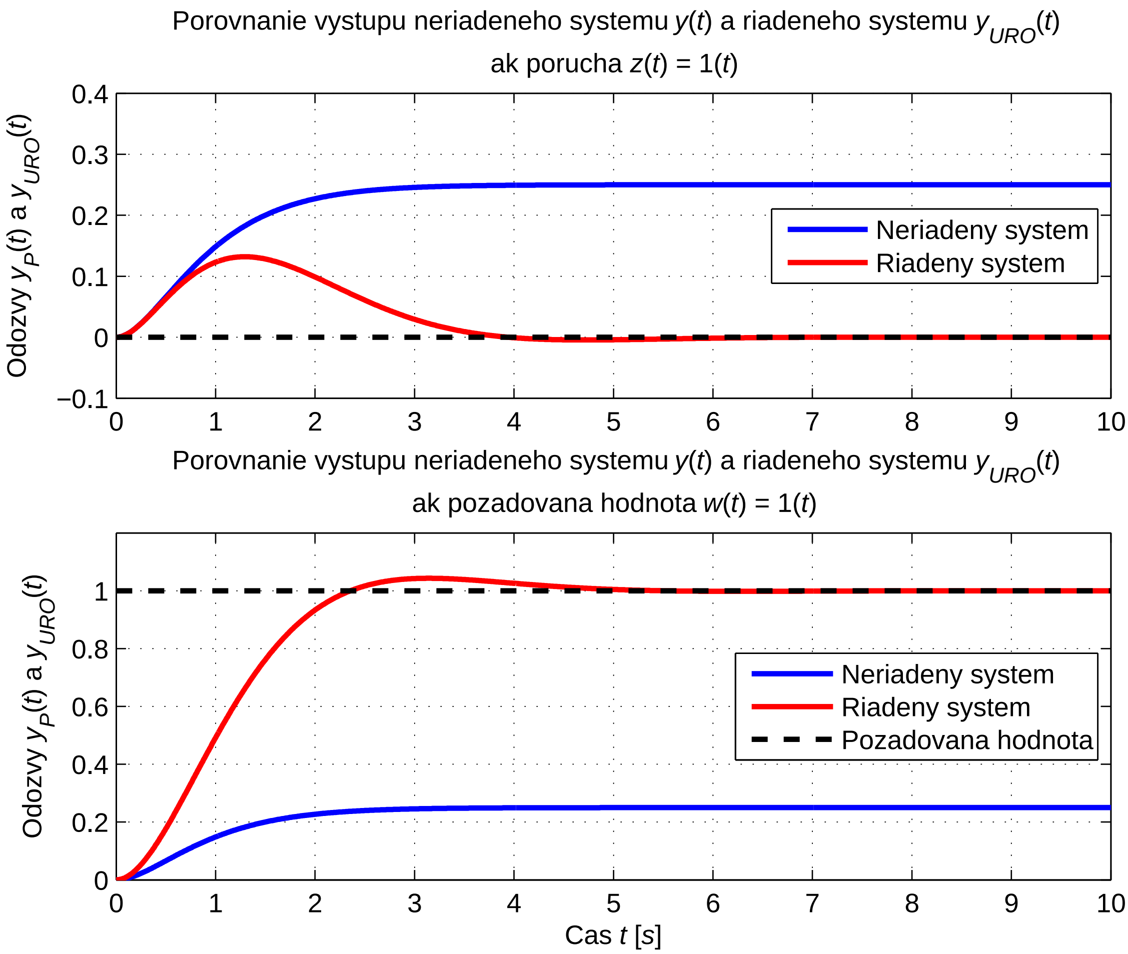
$$\begin{aligned} &\left[s^3 + 4s^2 + (4 + r_0)s + r_{-1}\right] : \left(s^2 + 2s + 2\right) = s + 2 \\ -&\left(s^3 + 2s^2 + 2s\right) \\ &\quad 2s^2 + 2s + r_0 s + r_{-1} \\ &\quad -\left(2s^2 + 4s + 4\right) \\ &\quad \boxed{-2s + r_0 s - 4 + r_{-1} \overset{!}{=} 0} \end{aligned} \tag{12.7}$$

Hodnota tretieho koreňa $s_3 = -2$ čiže zvolené korene $s_{1,2} = -1 \pm i$ sú dominantné. Zo zvyšku, ktorý postavíme rovný nule vypočítame parametre PI regulátora porovnaním pri rovnakých mocninách s ako

$$\begin{array}{llll} s^1: & r_0 - 2 = 0 & \Rightarrow & r_0 = 2 \\ s^0: & r_{-1} - 4 = 0 & \Rightarrow & r_{-1} = 4 \end{array} \tag{12.8}$$

4. Zhodnotenie výsledkov

   - trvalá regulačná odchýlka pre vplyv poruchy alebo požadovanej hodnoty bude nulová vzhľadom na I zložku regulátora,
   - ak je vstupom do neriadeného systému signál v tvare $u(t) = 1(t)$, neriadený systém sa ustáli na $\frac{1}{a_0} = 0.25$ a jeho prechodový dej je aperiodický,
   - pri pôsobení poruchy $z(t) = 1(t)$ na vstupe sa výstup uzavretého regulačného obvodu $y(t)$ ustáli v nule pričom prechodový dej má tlmený, kmitavý charakter.



Zadanie: Pre systém s prenosom $F_P(s)$ druhého rádu v tvare

$$F_P(s) = \frac{1}{s^2 + 1.5s + 1} \tag{12.9}$$

navrhnite parametre r_0, r_1 PD regulátora s prenosom

$$F_R(s) = r_0 + r_1 s \tag{12.10}$$

tak, aby prechodový dej v uzavretom regulačnom obvode bol na hranici aperiodicity pre koreň $s_1 = -1.5$. Vypočítajte trvalú regulačnú odchýlku.

Riešenie:

1. Zostavíme charakteristickú rovnicu uzavretého regulačného obvodu

$$\begin{aligned} \text{CHR:} \qquad 1 + F_P(s) \cdot F_R(s) &= 0 \\ 1 + \frac{1}{s^2 + 1.5s + 1} \cdot (r_0 + r_1 s) &= 0 \\ 1 + \frac{r_1 s + r_0}{s^2 + 1.5s + 1} &= 0 \end{aligned} \tag{12.11}$$

   Výsledná charakteristická rovnica má tvar

$$s^2 + (1.5 + r_1)s + 1 + r_0 = 0 \tag{12.12}$$

   a charakteristický polynóm $N_{URO}(s)$ má tvar

$$N_{URO}(s) = s^2 + (1.5 + r_1)s + 1 + r_0 \tag{12.13}$$

2. Regulačný obvod je na hranici aperiodicity ak má jeho charakteristická rovnica dvojnásobný záporný koreň. Na základe požadovaného koreňa $s_1 = -1.5$ vieme určiť $s_2 = -1.5$ a vypočítame polynóm

$$\begin{aligned} (s - s_1)(s - s_2) &= (s + 1.5)(s + 1.5) \\ N_{ref}(s) &= s^2 + 3s + 2.25 \end{aligned} \tag{12.14}$$

3. Porovnaním charakteristického polynómu $N_{URO}(s)$ s referenčným polynómom $N_{ref}(s)$ pri odpovedajúcich mocninách s vieme určiť parametre PD regulátora

$$\begin{array}{llll} s^2: & 1 = 1 & & \\ s^1: & 1.5 + r_1 = 3 & \Rightarrow & r_1 = 1.5 \\ s^0: & 1 + r_0 = 2.25 & \Rightarrow & r_0 = 1.25 \end{array} \tag{12.15}$$

4. Trvalú regulačnú odchýlku je možné vypočítať ako

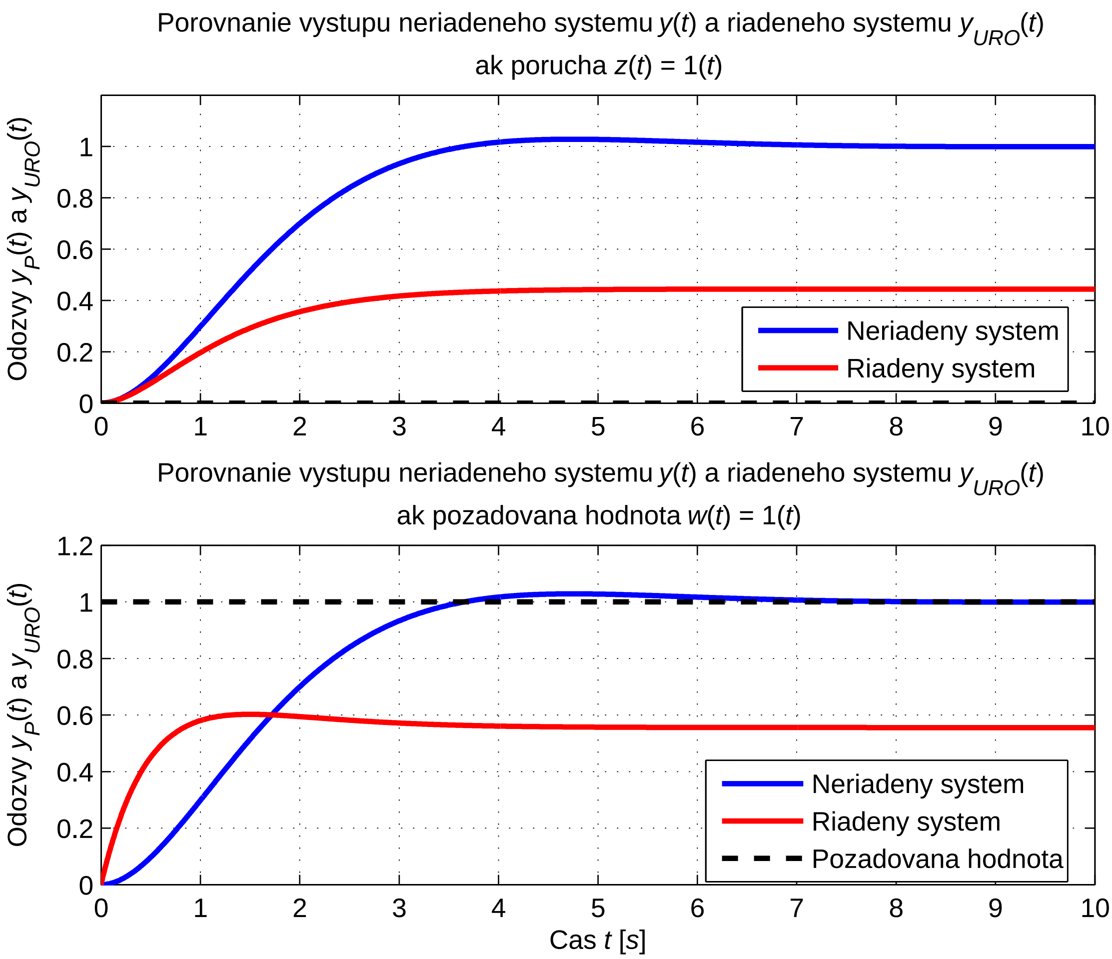
$$e(\infty) = \frac{1}{a_0 + r_0} \cdot 100\,[\%] \tag{12.16}$$

   kde a_0 je absolútny člen v menovateli prenosu riadeného systému a r_0 je zosilenie regulátora. V tomto prípade je trvalá regulačná odchýlka

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + 1.25} \cdot 100\,[\%] = 44.44\bar{4}\,\% \tag{12.17}$$

5. Zhodnotenie výsledkov

   - trvalá regulačná odchýlka pre vplyv poruchy alebo požadovanej hodnoty bude nenulová,
   - ak je vstupom do neriadeného systému signál v tvare $u(t) = 1(t)$, výstup neriadeného systému je charakterizovaný koreňmi $-0.75 \pm 0.6\bar{6}i$ a ustáli sa na $\frac{1}{a_0} = 1$ pričom jeho prechodový dej má tlmený, kmitavý charakter,
   - pri pôsobení poruchy v tvare $z(t) = 1(t)$ sa uzavretý regulačný obvod ustáli s trvalou regulačnou odchýlkou na hodnote $0.44\bar{4}$ pričom prechodový dej je na hranici aperiodicity.
   - Pôsobením PD regulátora bol potlačený vplyv poruchy na $44.44\bar{4}\%$ z pôvodnej hodnoty a zlepšila sa kvalita prechodového deja.



Zadanie: Pre systém s prenosom $F_P(s)$ druhého rádu v tvare

$$F_P(s) = \frac{1}{s^2 + 8s + 4} \tag{12.18}$$

navrhnite parametre r_0, r_1 PD regulátora s prenosom

$$F_R(s) = r_0 + r_1 s \tag{12.19}$$

tak, aby trvalá regulačná odchýlka v ustálenom stave bola 3% a priebeh regulovanej veličiny bol nekmitavý.

Riešenie: Trvalú regulačnú odchýlku je možné vypočítať ako

$$e(\infty) = \frac{1}{a_0 + r_0} \cdot 100\,[\%] \tag{12.20}$$

kde a_0 je absolútny člen v menovateli prenosu riadeného systému a r_0 je zosilenie regulátora. V tomto prípade je $a_0 = 4$ a predpísaná trvalá regulačná odchýlka $e(\infty) = 0.03\%$ pričom jedinou neznámou hodnotou vo vzťahu je zosilnenie regulátora r_0.

$$0.03 = \frac{1}{4 + r_0} \qquad \Rightarrow \qquad r_0 = 29.\bar{3} \tag{12.21}$$

Teraz je možné zostaviť charakteristickú rovnicu uzavretého regulačného obvodu ako

$$\begin{aligned} \text{CHR:} \qquad 1 + \frac{1}{s^2 + 8s + 8} \cdot (r_0 + r_1 s) &= 0 \\ 1 + \frac{r_1 s + r_0}{s^2 + 8s + 4} &= 0 \\ s^2 + (8 + r_1)s + 4 + r_0 &= 0 \end{aligned} \tag{12.22}$$

Výsledná charakteristická rovnica má po dosadení r_0 tvar

$$s^2 + (8 + r_1)s + 33.\bar{3} = 0 \tag{12.23}$$

respektíve charakteristický polynóm

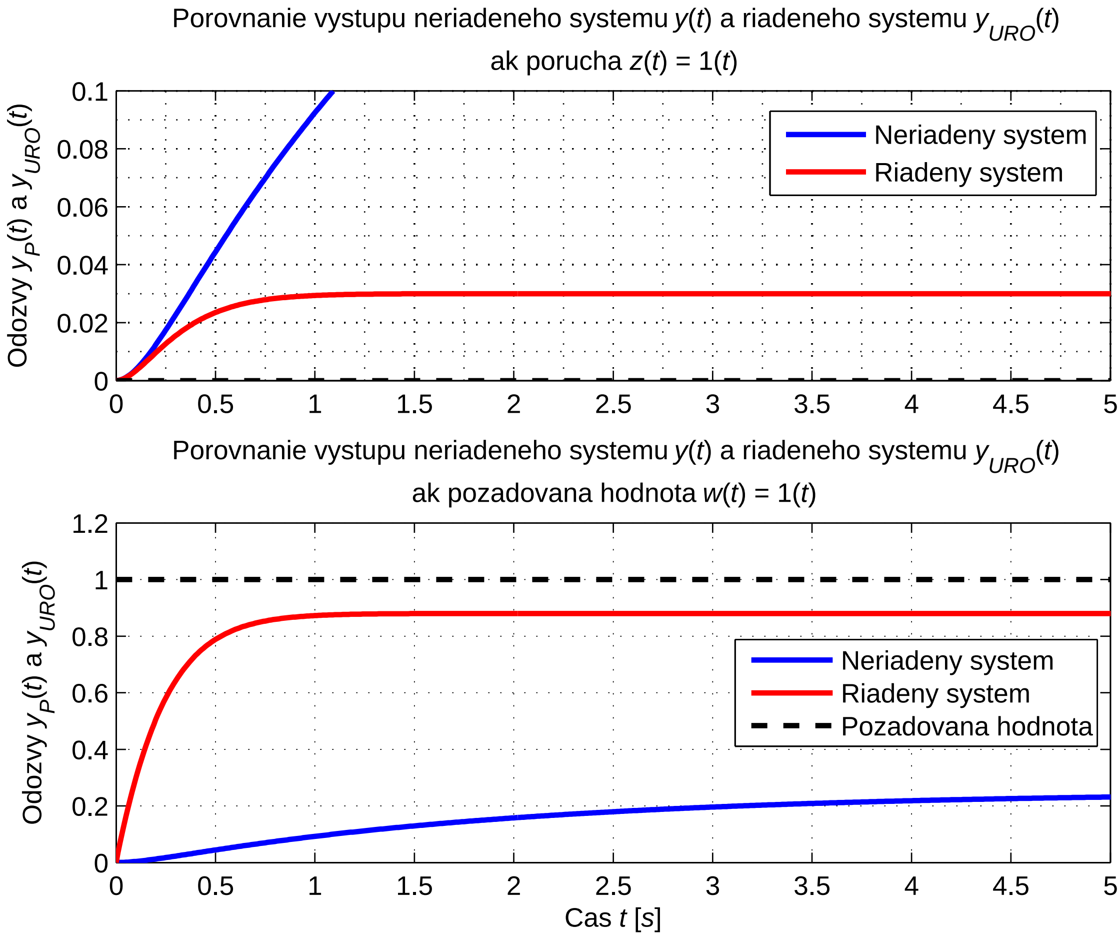
$$N_{URO}(s) = s^2 + (8 + r_1)s + 33.\bar{3} \tag{12.24}$$

Požiadavka je, aby priebeh regulovanej veličiny bol nekmitavý, čo predpokladá záporne reálne korene. Nakoľko veľkosť koreňov nie je zadaná, môžeme zvoliť dvojnásobný koreň $-\alpha$, z ktorého je možné zostaviť súčin koreňových činiteľov v tvare

$$N_{ref}(s) = (s + \alpha)^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 \tag{12.25}$$

Z rovnosti polynómov $N_{ref}(s) = N_{ref}(s)$ zostavíme rovnice a porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách s určíme druhý parameter regulátora r_1

$$\begin{array}{llll} s^0: & 33.\bar{3} = \alpha^2 & \Rightarrow & \alpha = \sqrt{33.\bar{3}} = 5.77 \\ s^1: & 8 + r_1 = 2\alpha & \Rightarrow & r_1 = 3.54 \end{array} \tag{12.26}$$



Zadanie: Pre systém s prenosom $F_P(s)$ druhého rádu v tvare

$$F_P(s) = \frac{1}{s^2 + 1.5s + 1} \tag{12.27}$$

navrhnite PD regulátor v tvare

$$F_R(s) = r_0 + r_1 s \tag{12.28}$$

aby priebeh regulovanej veličiny pri pôsobení poruchy $z(t) = 1(t)$ bol kmitavý, pričom miera stability bola $m = 1.5$ a miera tlmenia $\zeta = 0.3$. Ustálená hodnota regulovanej veličiny $y(\infty) \leq 5\%$

Riešenie: Zostavíme charakteristickú rovnicu uzavretého regulačného obvodu

$$\begin{aligned} \text{CHR:} \qquad 1 + \frac{1}{s^2+1.5s+1} \cdot (r_0 + r_1 s) &= 0 \\ 1 + \frac{r_0 + r_1 s}{s^2+1.5s+1} &= 0 \end{aligned} \tag{12.29}$$

Výsledná charakteristická rovnica má tvar

$$s^2 + (1.5 + r_1)s + 1 + r_0 \tag{12.30}$$

Ak má byť priebeh regulovanej veličiny $y(t)$ kmitavý, znamená to že žiadaným hodnotám miery stability ξ a miery tlmenia ζ odpovedajú komplexne združené korene $s_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ pričom

$$\begin{aligned} \alpha &= m && \Rightarrow && && \alpha = 1.5, \\ \frac{\alpha}{\beta} &= \zeta, && \Rightarrow && \beta = \frac{\alpha}{\zeta}, && \beta = 5 \end{aligned} \tag{12.31}$$

Určeným koreňom $s_{1,2} = 1.5 \pm j5$ odpovedá požadovaný polynóm $N_{ref}(s)$

$$\begin{aligned} (s - s_1)(s - s_2) &= (s + 1.5 - i)(s + 1.5 + i) \\ N_{ref}(s) &= s^2 + 3s + 27.25 \end{aligned} \tag{12.32}$$

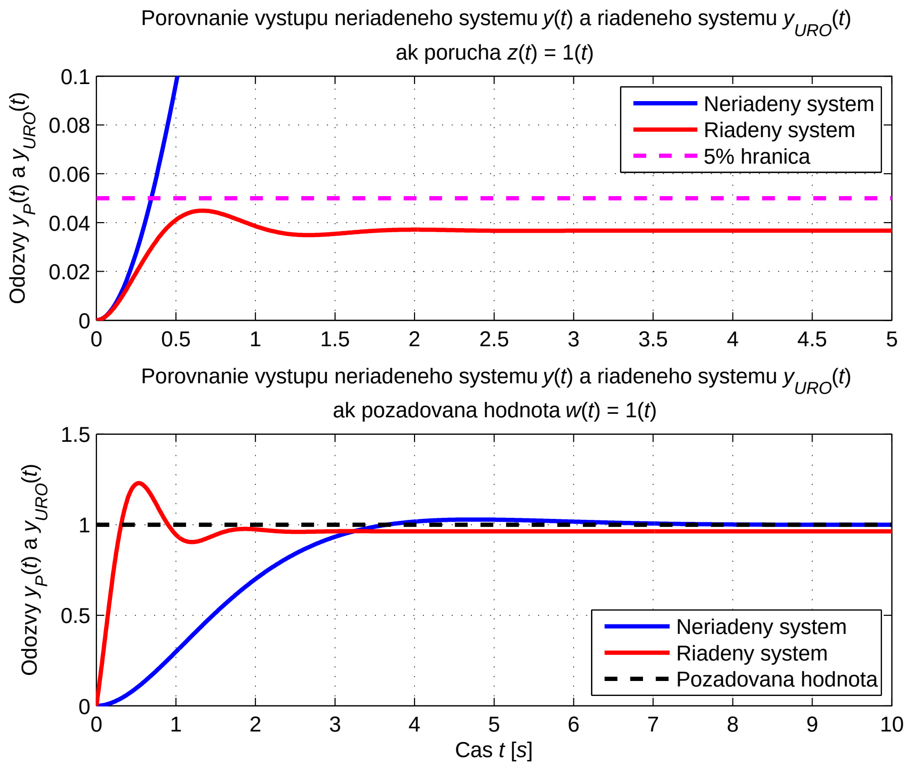
Ak má byť priebeh regulovanej veličiny $y(t)$ kmitavý, charakteristický polynóm $N_{URO}(s)$ musí mať také koeficienty, aby odpovedali koeficientom $N_{ref}(s)$

$$\begin{aligned} s^2: &\quad 1 = 1 \\ s^1: &\quad 1.5 + r_1 = 3 && \Rightarrow && r_1 = 1.5 \\ s^0: &\quad 1 + r_0 = 27.25 && \Rightarrow && r_0 = 26.25 \end{aligned} \tag{12.33}$$

Teraz je možné overiť splnenie podmienky pre odchýlku $e(\infty)$ ustálenej hodnoty regulovanej veličiny pre poruchu v tvare $z(t) = 1(t)$

$$e(\infty) = \frac{1}{a_0 + r_0} \cdot 100\,[\%] \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{1 + 26.25} \cdot 100\,[\%] \leq 5\% \tag{12.34}$$

čím je podmienka 5% splnená.



12.3 Príklady na samostatne riešenie

Zadanie: Pre systém s prenosom $F_P(s)$ druhého rádu v tvare

$$F_P(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 5} \tag{12.35}$$

navrhnite PI regulátor v tvare

$$F_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} \tag{12.36}$$

aby dominantná dvojica koreňov bola $s_{1,2} = -1 \pm i$.

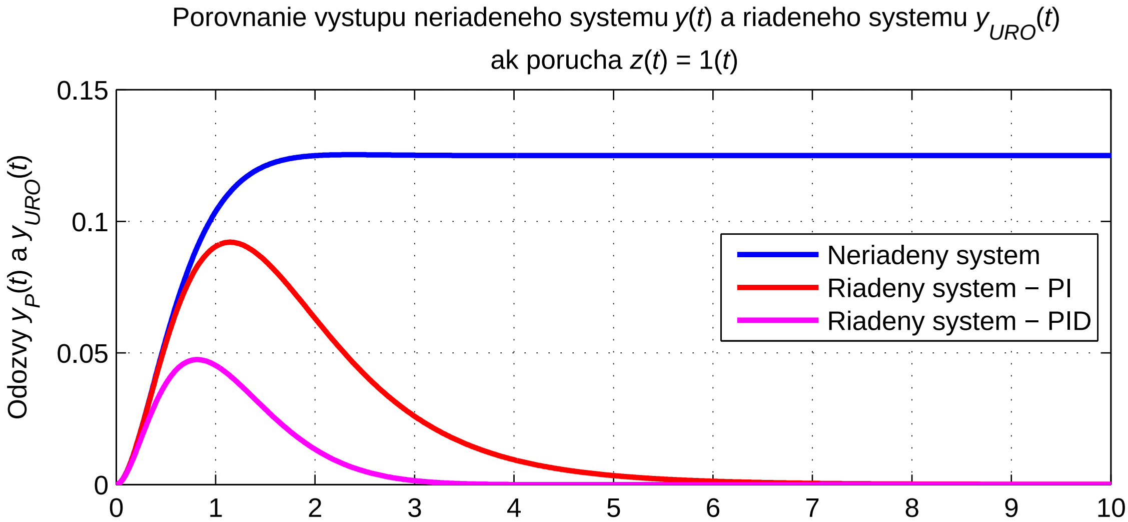
Riešenie: Parametre regulátora sú $r_0 = 5, r_{-1} = 8$ a tretí koreň má hodnotu $s_3 = -4$ čím je zabezpečená dominantnosť koreňov.

Zadanie: Pre systém s prenosom $F_P(s)$ druhého rádu v tvare

$$F_P(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 8} \tag{12.37}$$

navrhnite vhodný regulátor aby trvalá regulačná odchýlka bola nulová a aby dominantná dvojica koreňov bola $s_{1,2} = -2 \pm i$.

Riešenie: Aby bola trvalá regulačná odchýlka nulová, je nutné voliť regulátor s I-zložkou. Voľba PI regulátora s vypočítanými parametrami $r_0 = 1, r_{-1} = 5$ síce zabezpečí trvalú regulačnú odchýlku rovnú nule, avšak nezabezpečí dominanciu koreňov $s_{1,2} = -2 \pm i$. Preto je nutné zvoliť PID regulátor, kde je jeden z parametrov voliteľný - napríklad pre $r_1 = 2$ budú zvyšné parametre $r_0 = 9, r_{-1} = 15$.



Zadanie: Pre systém s prenosom $F_P(s)$ druhého rádu v tvare

$$F_P(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 3} \tag{12.38}$$

navrhnite PD regulátor v tvare

$$F_R(s) = r_0 + r_1 s \tag{12.39}$$

aby prechodový dej bol na hranici aperiodicity pre koreň -3